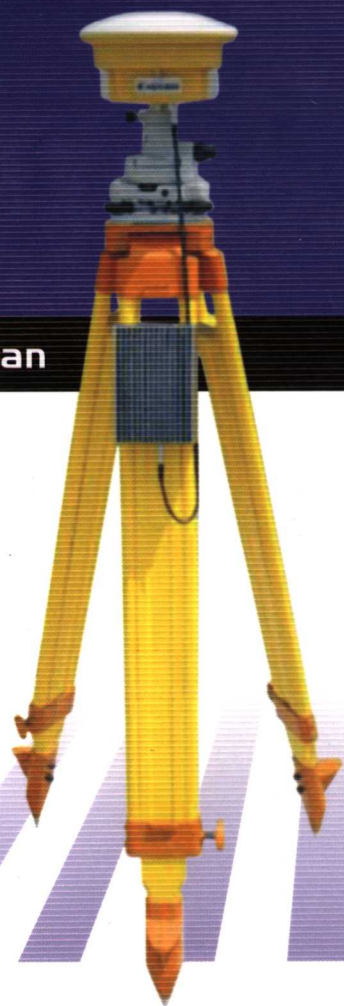


■ 重庆市测绘学会第二次会员代表大会论文选编

测绘新技术 的理论与实践

Cehui Xinjishu De Lilun Yu Shijian



西南交通大学出版社
[Http://press.swjtu.edu.cn](http://press.swjtu.edu.cn)

测绘新技术的理论与实践

——重庆市测绘学会第二次会员代表大会论文选编

重庆市测绘学会 编

西南交通大学出版社

· 成 都 ·

图书在版编目 (C I P) 数据

测绘新技术的理论与实践:重庆市测绘学会第二次会员代表大会论文选编 / 重庆市测绘学会编. —成都: 西南交通大学出版社, 2005.11

ISBN 7-81104-158-8

I. 测... II. 重... III. 测绘学—学术会议—文集
IV. P2-53

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2005) 第 103956 号

测绘新技术的理论与实践

——重庆市测绘学会第二次会员代表大会论文选编

重庆市测绘学会 编

*

责任编辑 万 方

特邀编辑 闻毓民

封面设计 王 可

西南交通大学出版社出版发行

(成都二环路北一段 111 号 邮政编码: 610031 发行部电话: 028-87600564)

<http://press.swjtu.edu.cn>

E-mail: cbsxx@swjtu.edu.cn

成都蜀通印务有限责任公司印刷

*

成品尺寸: 185 mm×260 mm 印张: 25.25

字数: 653 千字

2005 年 11 月第 1 版 2005 年 11 月第 1 次印刷

ISBN 7-81104-158-8/P·001

定价: 48.00 元

图书如有印装问题 本社负责退换

版权所有 盗版必究 举报电话: 028-87600562

《测绘新技术的理论与实践》

编 委 会

主 任：张 远

副主任：刘渝民

编 委：刘 星 吴 斌 曹智祥 冯 晓

目 录

“3S” 技术研究及应用

约束最小二乘问题研究及其在 GPS 定位与导航中的应用	彭军还 章红平	3
基于 GPS 的高层建筑环境激励动态特性研究及应用	刘 星 姚 刚 游扬声 王吉明	13
GPS 技术在高层建筑物轴线监测中的应用	刘 星 姚 刚 王吉明	19
利用中国区域 GPS 网分析电离层波动现象	章红平 彭军还	25
车载 GPS 监控调度系统的设计与开发	夏定辉	36
地理信息社会化应用与发展	罗灵军 梁建国 陈良超	42
动态 GPS 监控调度系统原理及设计	丁 忆	46
高分辨率卫星遥感影像用于城市土地利用分类研究	袁 超	54
基于 GIS 与 DSS 结合的重庆市国民经济辅助决策系统	许 盛 罗灵军 熊朝阳	59
基于 SUPERMAP 的公路地理信息系统	郑 磊	64
三峡库区地质灾害卫星监测系统的应用研究	袁 超 张泽烈	69
推动空间信息平台建设 服务重庆电子政务	罗灵军 张 远	74
西部省区县市挂图工程重庆市子工程的设计与制作	郑运松	78
重庆市城市基础地理信息系统建设及应用	罗灵军 张 远 周 平 张泽烈	84
重庆市 119 通信调度指挥信息系统项目管理实践	朱 圣	90
地理信息系统与城镇化	张亚利 刘 星	95
空间信息可视化的研究	吴 斌 赵健赞 熊先才	98
利用 MicroStation 建立数字摄影测量工作站联机测图环境	王昌瀚	102
控制测量平差软件系统的设计	韩嘉钰 吴尚科 邓小川 黄三才	106
利用数据库大对象 (Binary Large Object) 存取 GIS 空间数据	高 翔 程小河	113
GIS 系统的功能分析与技术途径	刘 星 冯 晓	119
地理信息系统与城市规划	周祖渊	127
GIS 在校园房产信息管理中的应用	林孝松	130

工程测量技术

用磨光法拟合误差分布探讨	万奇灵 赵健赞 游扬声 吴 斌	141
高层建筑物上升期间主要轴线监测简介	谢征海 李仁忠	145
浅谈双塔柱斜拉桥变形观测	谢征海 李仁忠 肖 勇	152
测边控制网的精度分析及应用	周宗君 程小河	162

重庆市黄花园大桥施工平面控制网的建立	辜益民	167
重庆轻轨较新线地下管线探测方法探讨	陈光亚 唐富川	170
关于数字测图精度的几个问题	沈高钰	174
探测地下管线中三种观测系统的异常特点对比	江周勇	177
工程勘察地基波速测试质量问题的研究	杨 宁	184
航测作业在大比例尺成图中精度方面的几点体会	胡开全	190
浅析重庆市主城区三级排水管网普查	蒲德祥 成维新	193
实施《重庆市 1:10 000 地形图更新项目》的几点思考	张泽烈	197
关于对中误差在精密测角中的影响分析及其估计	甄登春	200
曲线五大桩坐标计算	廖振环	206
利用 1:10 000 航测资料做 1:2 000 地形图的几点感受	魏太渊 杨 洪	210
利用 DEM 进行地形分析和计算的探讨	赵健赞 吴 斌 刘 星	214
菜园坝长江大桥三维变形自动监测系统的设计	熊先才 陈伟民 雷小华 赵健赞	219
高效纵横断面测量技术的研究	李华蓉 刘 煜	223
MATLAB 软件在测量平差中的应用	曹智翔 黄显贵	227
公路线路勘测与设计制图软件的研制	李宏博	235
数字摄影测量系统 VirtuoZo 简介	刘国栋	239
前方交会在桥梁索塔位移检测中的应用研究	何泽平 向泽君 冯 晓	243
一种椭圆曲线施工测量方法的应用研究	何泽平 向泽君 曹智翔 冯 晓	248
一种道路交叉口边线曲线的测设方法	何泽平 向泽君 冯 晓	252
非对称道路交叉口缘石曲线设计方法的探讨	何泽平 向泽君 冯 晓	255
建筑中的摄影测量	周祖渊	259
测量新技术在桥梁挠度测量中的应用	邓明镜	266
煤矿测量生产限差合理性的探讨	钟世良	271
积极推行矿山测量作业最优化	钟世良	274
同一矿井中边长不改正坐标与边长改正坐标误差处理	刘承云 熊天君	277
重庆市忠县引水工程特大型贯通测量方案设计	熊天君 刘承云	280
全站仪与传统测距仪棱镜配合使用有关问题探讨	王文斌	285
浅谈内控法结合交会法在高层建筑轴线放样中的应用	杜开福	289

地籍与房产测量

在创新中发展的重庆房产测量	陶 渝	297
GPS RTK 技术及其在地籍测量方面的应用	包义超	304
层高、室内净高标准在房测中的应用	杨盛宇	309
土地开发整理中新增耕地面积测算方法探讨	张孝成 石 伟	312
地理信息系统在土地利用规划中的应用	田水松	316
关于基于 GIS 的重庆市主城区地籍数据集成建库的思考	汪 陵	320
基于 UML 的房产测绘管理信息系统设计与实现——以重庆市为例	李爱迪	323
加快地籍信息化建设 促进“数字重庆”发展	汪 陵	328

建设项目用地勘测定界规程（试行）的实践及思考	孔庆勇	332
MAPINFO 软件在土地整理规划中的应用	周志跃 张孝成	337
商品房预售面积测绘研讨	聂尊贤 官开浩	342
重庆市主城核心区地籍空间数据建库工作探讨	李集庄 孔庆勇	345
安图公司土地利用现状建库数据采集系统	李兆雄 杨小琴 孙 俊	349
中小型地籍管理信息系统设计	杨小琴 李兆雄	353
浅论土地整理综合效益评价	黄文妍 胡渝清	357
土地整理（开发、复垦）后新增耕地面积测算方法研究	胡渝清 星财华	363
服务窗口行风建设贵在创新	陶 渝 丁洪富	368

教 学 改 革

“摄影测量学”教学改革探析	张亚利 吴 斌	375
测量与地图学实践教学模式探索与创新	刘明皓 田水松 罗小波 方义秋 袁正午 魏秉铎 刘伯红	378
论继续教育的管理创新	陶 渝 丁洪富	385
GIS 软件研发应用与教学若干问题的探讨	冯 晓 刘国栋 邓明镜	390

“3S”技术研究及应用



约束最小二乘问题研究及其在 GPS 定位与导航中的应用

彭军还¹ 章红平²

¹重庆大学土木工程学院 重庆 400045

²上海天文台 上海 200030

【摘 要】 不等式约束的最小二乘问题可以通过二次规划中的单纯形算法求解参数。这种方法的主要缺点是估计的统计性质不易确定并且无法对解的最优性进行结论,其原因在于参数解或估计量无法表示为观测的明显表达式。在不等式约束最小二乘问题被重新描述为一个贝叶斯问题后,贝叶斯解与单纯形解完全一致,其优点就是这种方法能导出贝叶斯解的验后分布,由此,可以计算贝叶斯解的均方误差,验后均值及其均方误差,然而,贝叶斯解仍然不是观测的明显函数。本文借助非线性规划中的凝聚约束方法把多个不等式约束转化为一个等式约束,采用拉格朗日极值法求解,解与贝叶斯解或单纯形解一致。其优点在于该解能够表示为观测的明显不等式,由此解的统计性质与最优性可以确定。本文给出了演示该方法的数值例子。

【关键词】 不等式约束最小二乘 贝叶斯估计 非线性规划 凝聚约束方法

1 引 言

合理地使用不等式约束能够改善平差结果,其在 GPS 数据处理中的应用已经表明了这一点^[1-4]。线性不等式约束最小二乘问题可以通过二次规划中的单纯形法求解,可是这种方法的不利之处是解的统计性质不易确定,并且没有关于最优性的一般结论^[4-6]。

朱建军等^[4]假设未知参数在不等式规定的区域内服从均匀分布,将线性不等式约束最小二乘问题重新描述为一个贝叶斯问题,相应的贝叶斯解与单纯形解的数值完全一致,所不同的是贝叶斯解有一个明确的验后分布,能够计算贝叶斯解的均方误差矩阵(MSE),验后均值及其均方误差矩阵^[4]。然而,贝叶斯解不是观测值或观测误差的明显表达式,像包括观测值、估计参数、残差以及观测值平差值的基本向量的方差协方差矩阵仍然无法确定,并且也无法讨论解的最优性。

当不等式约束是区间形式时,可以转化为椭圆形约束。由二次风险函数定义的椭圆形约束的最小最大估计可以求未知参数^[5, pp75-82]。该方法的优点是:最小最大解是观测的明显表示,有关的统计性质能够确定。但是,与岭估计类似,最小最大解是有偏估计,并且也可能不满足不等式。还有,对一般的不等式约束,比较难于转化成椭圆形形式。

在非线性规划中,一种鲜为人知的处理多约束问题的方法称为代理约束方法^[7-9],该

方法将多个约束化为一个代理约束,该代理约束是原多个约束的加权和。李兴斯用原约束集的最大约束作为代理约束,并证明了这两种方案的可行域完全一致^[10-11]。进一步,根据最大熵原理,导出了能够逼近最大约束的可微凝聚函数。在原约束集中,至少有一个约束将是“紧”约束(active constraint),因此,作为不等式的凝聚函数约束就变为等式,原不等式约束的非线性规划问题就变成了具有等式约束的非线性规划问题,得到了深入地研究与应用^[12-20]。本文用该方法来研究不等式约束最小二乘问题,尤其解的统计性质与最优性。

2 不等式约束问题及其典型解

线性不等式约束问题可以表示为

$$\mathbf{y} = \mathbf{Ax} + \mathbf{e} \quad (1a)$$

$$\mathbf{Bx} - \mathbf{d} \leq 0 \quad (1b)$$

式中方程(1a)是误差方程;(1b)是表示先验知识的不等式约束; $\mathbf{y}$ 是 n -维观测向量或观测与计算观测之差; $\mathbf{A}$ 是 $n \times t$ 设计矩阵; $\mathbf{x}$ 是 $t \times 1$ 参数向量; $\mathbf{e}$ 是误差向量,具有0均值与方差协方差矩阵 $D(\mathbf{e}) = \sigma^2 \mathbf{Q}_e$, $\mathbf{Q}_e = \mathbf{P}^{-1}$ 是协因数矩阵, $\mathbf{P}$ 是权矩阵; $\mathbf{B}$ 是 $m \times t$ 系数矩阵; $\mathbf{d}$ 是 m 维常数向量。

2.1 单纯形解及其特征

在不等式约束下,使 $\Phi(\mathbf{x}) = (\mathbf{Ax} - \mathbf{y})^T \mathbf{P}(\mathbf{Ax} - \mathbf{y})$ 最小化,即是不等式约束最小二乘问题

$$\min \Phi(\mathbf{x}) = (\mathbf{Ax} - \mathbf{y})^T \mathbf{P}(\mathbf{Ax} - \mathbf{y}) \quad (2a)$$

$$\text{Subject to } \mathbf{Bx} - \mathbf{d} \leq 0 \quad (2b)$$

该问题可以用二次规划中的单纯形法求解^[15, 22],解记为 $\hat{\mathbf{x}}_{ICLS}$ 。

最小二乘解为 $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{y}$,服从正态分布 $\hat{\mathbf{x}} \sim N(\mathbf{x} = E(\hat{\mathbf{x}}), \sigma^2 \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}})$,这里 $\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}$, $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{N}^{-1}$ 是协因数矩阵。目标函数(2a)可被写为

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}) &= (\mathbf{Ax} - \mathbf{y})^T \mathbf{P}(\mathbf{Ax} - \mathbf{y}) \\ &= (\mathbf{Ax} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{y})^T \mathbf{P}(\mathbf{Ax} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{y}) \\ &= (\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{y})^T \mathbf{P}(\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{y}) + (\mathbf{Ax} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}})^T \mathbf{P}(\mathbf{Ax} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}) \\ &= (\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{y})^T \mathbf{P}(\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{y}) + (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}^{-1} (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \\ &= \text{constant} + (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}^{-1} (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \end{aligned} \quad (3)$$

上式第一项是常数,因此,不等式约束最小二乘问题等价于

$$\min \Phi_{\hat{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}^{-1} (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \quad (4a)$$

$$\text{Subject to } \mathbf{Bx} - \mathbf{d} \leq 0 \quad (4b)$$

问题(4)与问题(2)有相同的解,即 $\hat{\mathbf{x}}_{ICLS}$ 。缺点是解 $\hat{\mathbf{x}}_{ICLS}$ 的统计性质不易确定,也无法对解的最优性得出结论^[4,5]。

2.2 最小最大解及其特点

如果不等式约束定义了一个凸区域,并能包括在椭圆形不等式中 ($\mathbf{x}^T \mathbf{T} \mathbf{x} \leq k, \mathbf{T} > 0$)。根据 Kuks' 定理^[5, 23], 方程 (1) 的线性最小最大估计为

$$\hat{\mathbf{x}}_* = (\mathbf{N} + k\sigma^2 \mathbf{T})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{y} \quad (5)$$

$\hat{\mathbf{x}}_*$ 的方差协方差为

$$D(\hat{\mathbf{x}}_*) = \sigma^2 (\mathbf{N} + k^{-1} \sigma^2 \mathbf{T})^{-1} \mathbf{N} (\mathbf{N} + k^{-1} \sigma^2 \mathbf{T})^{-1} \quad (6)$$

最小最大估计的优点在于,估计量与方差有一个明显的表达式;缺点是该估计量是有偏的,并且有可能不满足不等式,此外,并非所有不等式约束都能转化为一个椭圆形。

2.3 贝叶斯解

贝叶斯技术已经在大地测量数据处理中得到了研究和应用^[24-28]。贝叶斯解的优点在于,它不仅充分利用观测值中的信息,还可以利用来自历史数据以及其他数据源的信息。朱建军等假设参数是具有均匀分布的先验信息^[4]

$$\mathbf{x} \sim f(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1/s & \text{if } \mathbf{B}\mathbf{x} - \mathbf{d} \leq 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (7)$$

同时,假设观测误差具有正态分布

$$\mathbf{e} \sim N(0, \sigma^2 \mathbf{Q}_e) \quad (8a)$$

$$f(\mathbf{y} / \mathbf{x}) = f(\mathbf{e}) \propto \exp[-(2\sigma^2)^{-1} (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{y})^T \mathbf{Q}_e^{-1} (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{y})] \quad (8b)$$

根据贝叶斯统计学并考虑方程 (3), 参数 $\mathbf{x}$ 的验后分布满足

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x} / \mathbf{y}) &\propto f(\mathbf{y} / \mathbf{x}) f(\mathbf{x}) \\ &\propto \begin{cases} \exp[-(2\sigma^2)^{-1} (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{y})^T \mathbf{Q}_e^{-1} (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{y})] / s & \text{if } \mathbf{B}\mathbf{x} - \mathbf{d} \leq 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \\ &\propto \begin{cases} \exp[-(2\sigma^2)^{-1} (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{y})^T \mathbf{Q}_e^{-1} (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{y})] & \text{if } \mathbf{B}\mathbf{x} - \mathbf{d} \leq 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \\ &\propto \begin{cases} \exp[-(2\sigma^2)^{-1} (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T \mathbf{Q}_x^{-1} (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})] & \text{if } \mathbf{B}\mathbf{x} - \mathbf{d} \leq 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \end{aligned} \quad (9)$$

这样,不等式约束最小二乘问题就被重新描述为贝叶斯估计问题

$$\max f(\mathbf{x} / \mathbf{y}) \equiv \exp[-(2\sigma^2)^{-1} (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T \mathbf{Q}_x^{-1} (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})] \quad (10a)$$

$$\text{Subject to } \mathbf{B}\mathbf{x} - \mathbf{d} \leq 0 \quad (10b)$$

可以看出,由 (10) 获得的解与由 (2) 或 (4) 获得的解完全相同,即 $\hat{\mathbf{x}}_{ICLS}$ 。贝叶斯解的优点在于,贝叶斯解的均方误差矩阵、验后均值及其均方误差矩阵可以分别计算如下

贝叶斯解的均方误差

$$\mathbf{MSE}(\hat{\mathbf{x}}_{ICLS}) = \int (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_{ICLS})(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_{ICLS})^T f(\mathbf{x} / \mathbf{y}) d\mathbf{x} \quad (11)$$

$$\text{验后均值} \quad \bar{\mathbf{x}} = E(\mathbf{x} / \mathbf{y}) = \int \mathbf{x} f(\mathbf{x} / \mathbf{y}) d\mathbf{x} \quad (12)$$

验后均值的均方误差

$$\text{MSE}(\bar{\mathbf{x}}) = \int (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T f(\mathbf{x}/\mathbf{y}) d\mathbf{x} \quad (13)$$

缺点在于, 贝叶斯解仍然不是观测的明显表达式。尽管能够计算贝叶斯解、验后均值及其均方误差矩阵, 但由于缺少明显表达式, 贝叶斯解的方差协方差矩阵仍然无法确定。并且, 数值积分也是个麻烦。

3 凝聚函数方法求解原理与解有关的统计性质

为了获得线性不等式约束问题的解的统计性质, 并能够讨论其最优性, 贝叶斯方法与最小最大方法都做出了自己的贡献。然而这两种方法都有其自己的缺点。不等式约束最小二乘问题的统计性仍然未被确定, 其最优性也无法讨论。如果不等式约束能够被转换为等式约束, 其统计性质自然就能够确定, 最优性也可以讨论。非线性规划中的凝聚约束方法的特点就是将多个不等式约束转换为一个等式约束^[10,11]。该方法已经在最优化理论与测量数据处理中得到了研究与应用^[10-21]。这里, 被引入用于研究不等式约束最小二乘问题。

非线性规划问题为

$$\min h(\mathbf{x}) \quad (14a)$$

$$\text{subject to } g_i(\mathbf{x}) \leq 0 \quad i=1,2,\dots,m \quad (14b)$$

式中 $h(\mathbf{x})$, $g_i(\mathbf{x})$ 是 $\mathbf{x}$ 的实值、光滑函数。最大约束为

$$r(\mathbf{x}) = \max_i \{g_i(\mathbf{x})\} \quad (15)$$

李兴斯已经证明问题 (14) 与下面的问题 (16) 有完全相同的可行域, 该两种问题完全等价^[11]。

$$\min h(\mathbf{x}) \quad (16a)$$

$$\text{subject to } r(\mathbf{x}) \leq 0 \quad (16b)$$

由于最大约束 $r(\mathbf{x})$ 是不可微的。根据代理约束概念与最大熵原理, 可微的凝聚约束函数被导出如下^[10,11]

$$g_p(\mathbf{x}) = (1/p) \ln \left(\sum_{i=1}^m \exp(p g_i(\mathbf{x})) \right) \quad (17)$$

式中 p 是正的控制参数。可以看到下面式子成立^[10,11]

$$g_p(\mathbf{x}) = r(\mathbf{x}) + (1/p) \ln \sum_{i=1}^m \exp[p(g_i(\mathbf{x}) - r(\mathbf{x}))] \quad (18a)$$

$$r(\mathbf{x}) \leq g_p(\mathbf{x}) \leq r(\mathbf{x}) + \ln(m)/p \quad (18b)$$

当 p 趋于无穷大时, 有

$$\lim_{p \rightarrow \infty} g_p(\mathbf{x}) = r(\mathbf{x}) \quad (19)$$

显然, 随着 p 趋于无穷, 问题 (16) 渐渐等价于

$$\min h(\mathbf{x}) \quad (20a)$$

$$\text{subject to } g_p(\mathbf{x}) = (1/p) \ln \sum_{i=1}^m \exp[p g_i(\mathbf{x})] \leq 0 \quad (20b)$$

严格地讲, 当 p 是有限数时, 问题 (16) 与 (20) 是不完全等价的。而在数值计算中, 只要 p 足够大, $r(\mathbf{x})$ 与 $g_p(\mathbf{x})$ 的差就趋于零。在不等式约束 (14b), 至少会有一个约束是“紧”约束^[10]或称为起作用约束 (active constraint)^[11], 由此, 不等式约束问题 (20) 可以被处理成为一个等式的等式约束问题^[11, pp1007], 亦即

$$\min h(\mathbf{x}) \quad (21a)$$

$$\text{subject to } g_p(\mathbf{x}) = (1/p) \ln \sum_{i=1}^m \exp[p g_i(\mathbf{x})] = 0 \quad (21b)$$

如果问题 (21) 简单, 其解就很容易通过解下面的最小化问题获得

$$\text{minimize } \Phi(\mathbf{x}, \alpha) = h(\mathbf{x}) + \alpha g_p(\mathbf{x}) \quad (22)$$

式中 α 是等式约束的拉格郎日乘子。如果问题 (20) 比较复杂, 解 (22) 就可能不收敛。此时, 就要采用乘子惩罚函数策略^[10, 11, 29], 也就是解如下无约束最小化问题^[10, 11]

$$\text{minimize } \Phi(\mathbf{x}, \alpha) = h(\mathbf{x}) + \alpha g_p(\mathbf{x}) + c g_p^2(\mathbf{x})/2 \quad (23)$$

式中 c 是惩罚因子, 一个充分大的、正的常数。拉格郎日乘子 α 通过下式迭代修正。

$$\alpha^{k+1} = \alpha^k + c g_p(\mathbf{x}^k) \quad (24)$$

显然, 不等式约束最小二乘问题 (2) 可以用上述结论重新描述为一个等式约束最小二乘问题, 此时, 有

$$h(\mathbf{x}) = (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{y})^T \mathbf{P}(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{y})/2 \quad (25)$$

$$g_i(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_i^T \mathbf{x} - d_i \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (26)$$

$$\mathbf{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_m)^T, \quad \mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_m)^T$$

$$r(\mathbf{x}) = \max_i \{ \mathbf{b}_i^T \mathbf{x} - d_i \} \quad (27)$$

$$g_p(\mathbf{x}) = (1/p) \ln \sum_{i=1}^m \exp(p(\mathbf{b}_i^T \mathbf{x} - d_i)) \quad (28)$$

解 $\hat{\mathbf{x}}_{ICLS}$ 与 α 的估计量 $\hat{\alpha}$ 满足下面法方程

$$\left. \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{ICLS}} = g_p(\hat{\mathbf{x}}_{ICLS}) = 0 \quad (29a)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}, \alpha)}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{ICLS}} &= (\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{ICLS} - \mathbf{y})^T \mathbf{P} \mathbf{A} + \hat{\alpha} \left. \frac{\partial g_p(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{ICLS}} \\ &\quad + c g_p(\hat{\mathbf{x}}_{ICLS}) \left. \frac{\partial g_p(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{ICLS}} \\ &= (\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{ICLS} - \mathbf{y})^T \mathbf{P} \mathbf{A} + \hat{\alpha} \left. \frac{\partial g_p(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{ICLS}} = 0 \end{aligned} \quad (29b)$$

记 $\mathbf{c}^T = \left. \frac{\partial g_p(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|$, 是 $1 \times t$ 向量。根据大数定律有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left. \frac{\partial g_p(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{ICLS}} = \frac{\partial g_p(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{c}^T \quad (30)$$

在方程 (29b) 中, 用 $\frac{\partial g_p(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{c}^T$ 代替 $\left. \frac{\partial g_p(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{ICLS}}$ 并转置得

$$\mathbf{N}\hat{\mathbf{x}}_{ICLS} + \hat{\alpha}\mathbf{c} - \mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{y} \approx \mathbf{0} \quad (31)$$

将 $g_p(\hat{\mathbf{x}}_{ICLS})$ 在 $\mathbf{x}$ 处展开成为 Talor 级数并忽略 $(\hat{\mathbf{x}}_{ICLS} - \mathbf{x})$ 的高次项得

$$g_p(\hat{\mathbf{x}}_{ICLS}) = g_p(\mathbf{x}) + \mathbf{c}^T(\hat{\mathbf{x}}_{ICLS} - \mathbf{x}) = \mathbf{c}^T(\hat{\mathbf{x}}_{ICLS} - \mathbf{x}) \approx 0 \quad (32)$$

根据方程 (31) 得

$$\hat{\mathbf{x}}_{ICLS} \approx -\mathbf{N}^{-1}\mathbf{c}\hat{\alpha} + \mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{y} \quad (33)$$

把 (33) 代入 (32) 得

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} &\approx (\mathbf{c}^T\mathbf{N}^{-1}\mathbf{c})^{-1}(\mathbf{c}^T\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{y} - \mathbf{c}^T\mathbf{x}) \\ &= n_c^{-1}(\mathbf{c}^T\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{y} - \mathbf{c}^T\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (34)$$

式中 $n_c = \mathbf{c}^T\mathbf{N}^{-1}\mathbf{c}$ 是一个纯量。把 (34) 代入 (33) 得

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{ICLS} &\approx -n_c^{-1}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{c}(\mathbf{c}^T\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{y} - \mathbf{c}^T\mathbf{x}) + \mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{y} \\ &= (\mathbf{I} - n_c^{-1}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{c}\mathbf{c}^T)\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{y} + n_c^{-1}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{c}\mathbf{c}^T\mathbf{x} \end{aligned} \quad (35)$$

在方程 (35) 中增加一个无穷小量得

$$\hat{\mathbf{x}}_{ICLS} = (\mathbf{I} - n_c^{-1}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{c}\mathbf{c}^T)\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{y} + n_c^{-1}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{c}\mathbf{c}^T\mathbf{x} + O(1/n) \quad (36)$$

$\hat{\mathbf{x}}_{ICLS}$ 的数学期望为

$$\begin{aligned} E(\hat{\mathbf{x}}_{ICLS}) &= (\mathbf{I} - n_c^{-1}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{c}\mathbf{c}^T)\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{x} + n_c^{-1}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{c}\mathbf{c}^T\mathbf{x} + O(1/n) \\ &= (\mathbf{I} - n_c^{-1}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{c}\mathbf{c}^T)\mathbf{x} + n_c^{-1}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{c}\mathbf{c}^T\mathbf{x} + O(1/n) = \mathbf{x} + O(1/n) \end{aligned} \quad (37)$$

可以看到 $\hat{\mathbf{x}}_{ICLS}$ 在 n 趋于无穷大时, 是渐渐无偏的。根据方差协方差传播定律, $\hat{\mathbf{x}}_{ICLS}$ 的方差协方差矩阵为

$$\begin{aligned} D(\hat{\mathbf{x}}_{ICLS}) &= (\mathbf{I} - n_c^{-1}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{c}\mathbf{c}^T)\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{P}D(\mathbf{y})\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}(\mathbf{I} - n_c^{-1}\mathbf{c}\mathbf{c}^T\mathbf{N}^{-1}) \\ &= \sigma^2(\mathbf{I} - n_c^{-1}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{c}\mathbf{c}^T)\mathbf{N}^{-1}(\mathbf{I} - n_c^{-1}\mathbf{c}\mathbf{c}^T\mathbf{N}^{-1}) \\ &= \sigma^2(\mathbf{N}^{-1} - 2n_c^{-1}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{c}\mathbf{c}^T\mathbf{N}^{-1} + n_c^{-2}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{c}\mathbf{c}^T\mathbf{N}^{-1}\mathbf{c}\mathbf{c}^T\mathbf{N}^{-1}) \\ &= \sigma^2(\mathbf{N}^{-1} - n_c^{-1}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{c}\mathbf{c}^T\mathbf{N}^{-1}) = \sigma^2\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_{ICLS}} \\ &= D(\hat{\mathbf{x}}) - \sigma^2n_c^{-1}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{c}\mathbf{c}^T\mathbf{N}^{-1} < D(\hat{\mathbf{x}}) \end{aligned} \quad (38)$$

式中 $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_{ICLS}} = \mathbf{N}^{-1} - n_c^{-1}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{c}\mathbf{c}^T\mathbf{N}^{-1}$ 。显然, $tr(D(\hat{\mathbf{x}}_{ICLS})) < tr(D(\hat{\mathbf{x}}))$, 这意味着不等式约束最

小二乘估计 $\hat{\mathbf{x}}_{ICLS}$ 比没有不等式约束的最小二乘估计 $\hat{\mathbf{x}}$ 的方差更小相应的残差与观测值平差值分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{ICLS} - \mathbf{y} \\ &= \mathbf{A}(\mathbf{I} - \mathbf{n}_\xi^{-1}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{c}\mathbf{c}^T)\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{y} - \mathbf{y} + \mathbf{n}_\xi^{-1}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{c}\mathbf{c}^T\mathbf{x} + O(1/n) \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{y}} &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{ICLS} \\ &= \mathbf{A}(\mathbf{I} - \mathbf{n}_\xi^{-1}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{c}\mathbf{c}^T)\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{y} + \mathbf{n}_\xi^{-1}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{c}\mathbf{c}^T\mathbf{x} + O(1/n) \\ &= (\mathbf{A}O(1/n) \sim O(1/n)) \end{aligned} \quad (40)$$

在引入基本向量 $\mathbf{z} = (\mathbf{y}^T, \hat{\mathbf{x}}_{ICLS}^T, \mathbf{v}^T, \hat{\mathbf{y}}^T)^T$ 后, 其方差协方差矩阵反映了各子向量的相关性^[30]

$$\begin{aligned} D(\mathbf{z}) &= \begin{bmatrix} D(\mathbf{e}) & D(\mathbf{e}, \hat{\mathbf{x}}_{ICLS}) & D(\mathbf{e}, \mathbf{v}) & D(\mathbf{e}, \hat{\mathbf{y}}) \\ D(\hat{\mathbf{x}}_{ICLS}, \mathbf{e}) & D(\hat{\mathbf{x}}_{ICLS}) & D(\hat{\mathbf{x}}_{ICLS}, \mathbf{v}) & D(\hat{\mathbf{x}}_{ICLS}, \hat{\mathbf{y}}) \\ D(\mathbf{v}, \mathbf{e}) & D(\mathbf{v}, \hat{\mathbf{x}}_{ICLS}) & D(\mathbf{v}) & D(\mathbf{v}, \hat{\mathbf{y}}) \\ D(\hat{\mathbf{y}}, \mathbf{e}) & D(\hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{x}}_{ICLS}) & D(\hat{\mathbf{y}}, \mathbf{v}) & D(\hat{\mathbf{y}}) \end{bmatrix} \\ &= \sigma^2 \begin{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} & \mathbf{A}\mathbf{Q}_{\mathbf{x}_{ICLS}} & \mathbf{A}\mathbf{Q}_{\mathbf{x}_{ICLS}}\mathbf{A}^T - \mathbf{P}^{-1} & \mathbf{A}\mathbf{Q}_{\mathbf{x}_{ICLS}}\mathbf{A}^T \\ \mathbf{Q}_{\mathbf{x}_{ICLS}}\mathbf{A}^T & \mathbf{Q}_{\mathbf{x}_{ICLS}} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{\mathbf{x}_{ICLS}}\mathbf{A}^T \\ \mathbf{A}\mathbf{Q}_{\mathbf{x}_{ICLS}}\mathbf{A}^T - \mathbf{P}^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{P}^{-1} - \mathbf{A}\mathbf{Q}_{\mathbf{x}_{ICLS}}\mathbf{A}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}\mathbf{Q}_{\mathbf{x}_{ICLS}}\mathbf{A}^T & \mathbf{A}\mathbf{Q}_{\mathbf{x}_{ICLS}} & \mathbf{0} & \mathbf{A}\mathbf{Q}_{\mathbf{x}_{ICLS}}\mathbf{A}^T \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (41)$$

式中“0”。子向量意味着残差向量 $\mathbf{v}$ 与 $\hat{\mathbf{x}}_{ICLS}$ 或 $\hat{\mathbf{y}}$ 是统计独立的。

根据具有等式约束平差原理, 单位权方差估计量为^[30]

$$\hat{\sigma}^2 = \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} / (n - t + 1) \quad (42)$$

4 基本算法与数值例子

4.1 算法

① 置 $\alpha^0 = 0$, p 和 c 是一充分大的数 (即 $p = c = 10^6$ 或其他更大的数), 以及 $\hat{\mathbf{x}}_{ICLS}$ 的初值; $\varepsilon = 10^{-6}$ 和 $k = 0$;

② 用任意一个可行的算法 (比如, BFP 或 BFGS 算法) 对方程 (22) 中的 $\Phi(\mathbf{x}, \alpha)$ 进行无约束优化;

③ 检查收敛条件 $\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\| \leq \varepsilon$, 如果满足, 计算向量 $\mathbf{c}$ 以及有关的方差协方差矩阵, 然后结束;

④ 用公式 (23) 修正 α ; 置 $k = k + 1$ 并转到 (2)。

4.2 数值例子

一个 GPS 定位与导航可以用如下算例描述。该例子中, 既有不等式约束 $\mathbf{B}_0 \mathbf{x} - \mathbf{d}_0 = \mathbf{w} \leq 0$ 也有区间约束 $-0.1 \leq x_i \leq 2$ ($i = 1, 2, 3, 4$) $\mathbf{B} = (\mathbf{B}_0^T, -\mathbf{I}_4^T, \mathbf{I}_4^T)^T$, $\mathbf{d} = (\mathbf{d}_0^T, 0.1\mathbf{1}_4^T, 2\mathbf{1}_4^T)^T$, 这里, $\mathbf{1}_4^T = (1, 1, 1, 1)$ 。

我们采用两种算法: 一是二次规划中的单纯形法, 解是表 2 中的 $\hat{\mathbf{x}}_{ICLS}$ (1); 二就是本文

4.1 节的凝聚函数方法, 解是表 2 中的 $\hat{\mathbf{x}}_{ICLS}(2)$, 可以看到两种算法所得结果差别很小。但是, 根据单纯形法, 我们是无法确定其解得统计性质, 凝聚函数法则不然, 它提供了我们计算并研究有关统计性质的途径。

表 2 中, $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}$ 是无约束最小二乘解的协因数矩阵, $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_{ICLS}}$ 是不等式约束最小二乘解的协因数矩阵, 可以看到 $\text{trace}(\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}) = 9.4207 > \text{trace}(\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_{ICLS}}) = 5.8177$, 说明不等式约束最小二乘解优于无约束最小二乘解。

表 1 已知数据与余差

A	y	v
0.9501 0.7620 0.6153 0.4057	0.0578	0.0452
0.2311 0.4564 0.7919 0.9354	0.3528	0.0767
0.6068 0.0185 0.9218 0.9169	0.8131	-0.3561
0.4859 0.8214 0.7382 0.4102	0.0098	0.1615
0.8912 0.4447 0.1762 0.8936	0.1388	0.0796
$\mathbf{B}_0$	$\mathbf{d}_0$	w
0.2027 0.2721 0.7467 0.4659	0.5251	-0.2491
0.1987 0.1988 0.4450 0.4186	0.2026	-0.0000
0.6037 0.0152 0.9318 0.8462	0.6721	-0.2372
$-0.1 \leq x_i \leq 2 \text{ for } i = 1, 2, 3, 4$		

表 2 计算结果

$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}$	2.4155	-1.5671	0.4575	-1.3775
	-1.5671	2.4578	-1.1233	0.8073
	0.4575	-1.1233	2.2845	-1.6015
	-1.3775	0.8073	-1.6015	2.2629
$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_{ICLS}}$	1.9172	-0.5021	-0.1381	-1.1368
	-0.5021	0.1813	0.1499	0.2929
	-0.1381	0.1499	1.5725	-1.3139
	-1.1368	0.2929	-1.3139	2.1467
$\hat{\mathbf{x}}_{ICLS}(1)$	-0.1000	-0.1000	0.2152	0.3502
$\hat{\mathbf{x}}_{ICLS}(2)$	-0.1000	-0.1000	0.2137	0.3518
$\mathbf{c}^T$	0.0104	0.1894	-0.4157	0.1781
$p = c = 10^5, \hat{\alpha} = 0.5581, \hat{\sigma}^2 = 0.0836$				

5 结 论

对不等式约束问题, 确定解的统计性质并对其最优性做出一般的结论是有重要意义的, 贝叶斯方法与最小最大方法都做出了自己的努力。贝叶斯解与单纯形解完全等价, 但贝叶斯解有一个明显的验后分布, 允许计算解的均方误差、验后均值以及验后均值的均方误差。贝叶斯解的不利处是该解不能表示成为观测的明显表达式, 因而不能计算基本向量的方差协方差矩阵, 也无法比较贝叶斯解与无约束最小二乘解的方差。最小最大估计能表示为观测的明显不等式, 具有比无约束最小二乘解更小的方差, 但它是有偏的且有可能不满足不等式。

凝聚函数方法克服了前面的缺点, 该方法把不等式约束转换成一个等式约束, 使解能够表示为观测的明显不等式, 其统计性质与最优性可以确定, 结论如下:

- ① 不等式约束最小二乘估计能够表示为观测的明显表达式, 是无偏估计;
- ② 解的方差协方差可以由公式 (37) 确定并计算, 具有比无约束最小二乘解更小的方差;
- ③ 基本向量的方差协方差矩阵可以由公式 (38) 确定并计算;
- ④ 凝聚函数方法是一种计算不等式约束最小二乘问题并研究其统计性质的有效方法。

参 考 文 献

- [1] Lu G, Krakiwsky EJ, Lachapelle G. Application of inequality constraint least squares to GPS navigation under selective availability[J]. Manuscr Geod 1993,18: 124-130