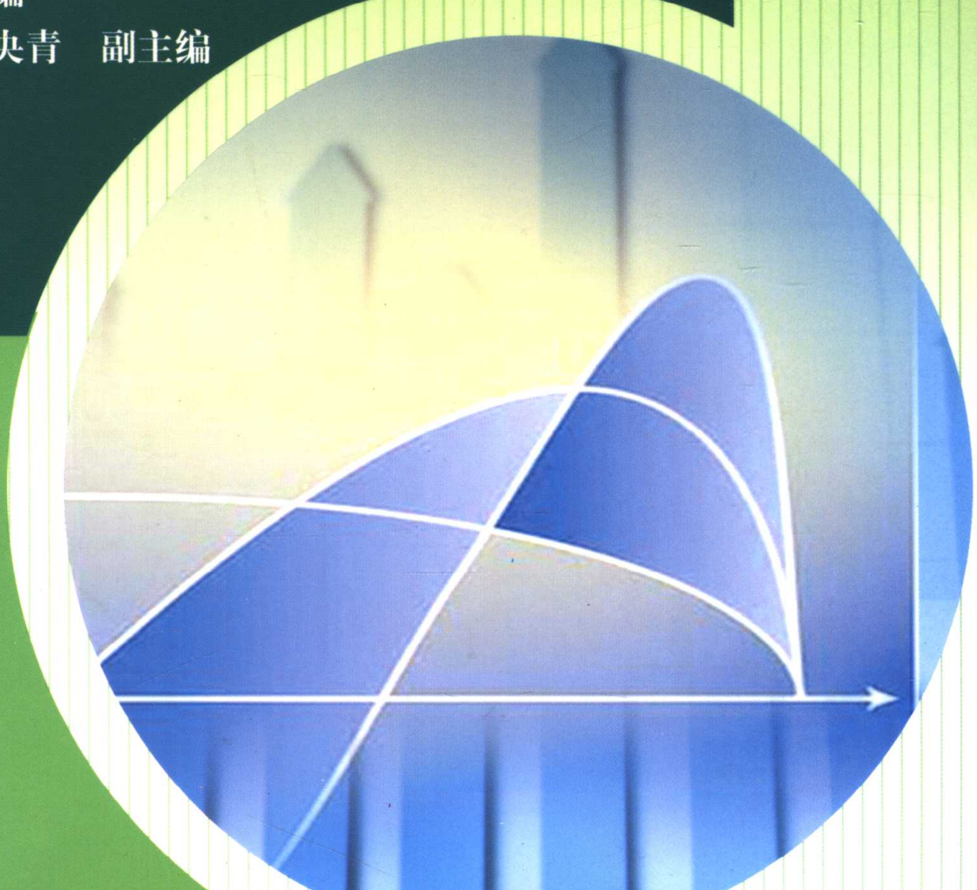
银领工程

高等职业教育应用型人才培养培训工程系列教材

经济应用数学

汪荣伟 主编

乔树文 顾央青 副主编



高等教育出版社

Higher Education Press

银领工程

高等职业教育应用型人才培养培训工程系列教材

经济应用数学

汪荣伟 主编

乔树文 顾央青 副主编

高等教育出版社

内容提要

本教材是针对经管类专业学生的专业学习和未来工作需要而编写的，体现了“以应用为导向的，以必需、够用为度”的基本原则。教材的主要特色为突出实用、关注现实、案例驱动、强化软件应用，教材共分为4章，具体内容包括微积分在经济管理中的应用、矩阵代数、线性规划、数理统计基础等。

按照高职数学教学的特点，我们还与主教材同步建设了配套的电子教案、试题库等教学资源，力求为教学过程提供更完整周到的服务。

本书可作为高等职业学校、高等专科学校、成人高校及本科院校举办的二级职业技术学院和民办高校经管类专业的教材，也可供科技人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

经济应用数学/汪荣伟主编 .—北京：高等教育出版社，2006.5

ISBN 7-04-019359-0

Ⅰ.经… Ⅱ.汪… Ⅲ.经济数学-高等学校：技术学校-教材 Ⅳ.F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 043177 号

策划编辑 周先海 **责任编辑** 董达英 **封面设计** 王凌波 **责任绘图** 尹 莉
版式设计 王艳红 **责任校对** 王效珍 **责任印制** 陈伟光

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京印刷一厂	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	787×1092 1/16	**版　　次**	2006年5月第1版
印　　张	8	**印　　次**	2006年5月第1次印刷
字　　数	180 000	**定　　价**	10.70元

物料号 19359-00

郑 重 声 明

编写委员会成员名单

出版说明

为了认真贯彻《国务院关于大力推进职业教育改革与发展的决定》，落实《2003—2007年教育振兴行动计划》，缓解国内劳动力市场技能型人才紧缺现状，为我国走新型工业化道路服务，自2001年10月以来，教育部在永州、武汉和无锡连续三次召开全国高等职业教育产学研经验交流会，明确了高等职业教育要“以服务为宗旨，以就业为导向，走产学研结合的发展道路”，同时明确了高等职业教育的主要任务是培养高技能人才。这类人才，既要能动脑，更要能动手，他们既不是白领，也不是蓝领，而是应用型白领，是“银领”。从而为我国高等职业教育的进一步发展指明了方向。

培养目标的变化直接带来了高等职业教育办学宗旨、教学内容与课程体系、教学方法与手段、教学管理等诸多方面的改变。与之相应，也产生了若干值得关注与研究的新课题。为此，我们组织有关高等职业院校进行了多次探讨，并从中遴选出一些较为成熟的成果，组织编写了“银领工程”丛书。本丛书围绕培养符合社会主义市场经济和全面建设小康社会发展要求的“银领”人才的这一宗旨，结合最新的教改成果，反映了最新的职业教育工作思路和发展方向，有益于固化并更好地推广这些经验和成果，很值得广大高等职业院校借鉴。我们的这一想法和做法也得到了教育部领导的肯定，教育部副部长吴启迪专门为首批“银领工程”丛书提笔作序。

我社出版的高等职业教育各专业领域技能型紧缺人才或应用型人才培养培训工程系列教材也将陆续纳入“银领工程”丛书系列。

“银领工程”丛书适用于高等职业学校、高等专科学校、成人高校及本科院校举办的二级职业技术学院、继续教育学院和民办高校使用。

高等教育出版社
2006年5月

前 言

本教材《经济应用数学》与《微积分应用基础》、《工程应用数学》构成系列教材，是《微积分应用基础》的后续教材。主要是针对经管类专业学生的专业学习和未来工作需要而编写的。

在我国，高等职业技术教育是一类新的高等教育类型，它培养的是基本掌握高新技术、面向生产和管理第一线的应用性人才。这类人才对基础理论的要求是以应用为导向的，以必需、够用为度。高职院校的数学教学要为人才培养目标服务。基于此，本套教材试图突出下列编写特色：

1. **突出实用** 主要有：一是适应高职生源的特点，叙述方式上较少严密性，较多文字描述和几何图形说明，这种方式贯穿于本书的始终；二是突出专业需求，经管类专业需要的知识多讲、案例多列。本教材从数学知识体系上可能是不完整的，但是经济管理方面的内容却不显得零乱；三是融入数学建模的基本内容。例如，在每章都有较为综合性的案例，采用数学建模的方法解决。

2. **案例驱动** 这也是近几年高职教材编写的成功模式，数学教材的编写也在进行探索。本书引入了大量来自于经济管理中的生动实例，将其融入数学知识的结构。每章始于案例，知识的讲解在案例中进行，最终的落脚点仍然回到现实的实例中。经济用数学来表述是最经济的，数学用于经济是最有魅力的。

3. **软件应用** 数学软件在解决繁琐演算中的优越性是不言而喻的，现代技术的应用是高职数学教学中应有之义。本书针对高职学生的特点及培养模式实践性强的要求，在编写上对软件的应用进行探索。在每章都辟有一节介绍与本章内容相关的数学软件的语句，并辅以一定数量的练习题，甚至在知识的介绍中也贯穿了软件的使用，这在目前国内的教材中是罕见的。

4. **关注现实** 现实的经济生活和管理实践赋予数学教学以生动的内容。本书在编写上，大量的案例和实例来自于现实生活中，尤其是东部经济发达地区。我们的这些探索使学生在学习过程中一方面感到数学的有用，另一方面也对将来要面对的现实有初步的了解；同时结合应用在教材中还介绍了有关的数学史知识。这也体现了数学教学的素质教育功能。

5. **形成体系** 本教材按照高职数学教学的特点，与主教材同步设计了配套的试题库、电子教案和学生自测等教学资源，为教学过程提供完整周到的服务。

参加本教材编写的人员有台州职业技术学院的汪荣伟副教授、云连英副教授、陈祥霞和章文燕老师、浙江宁波职业技术学院的吴甬翔老师。

教材的编写得到了台州职业技术学院、宁波职业技术学院、浙江警官职业学院、浙江东方职业技术学院等四所院校有关领导和部门的支持，院内外同行专家提出了许多指导性意见，在此一并表示感谢。

限于水平，针对教材中不足之处，恳请使用者批评指正。

编者

2006 年 3 月

目　　录

第 1 章

微积分在经济管理中的应用

本章介绍微积分在经济管理中的初步应用,主要有边际与弹性分析、经济管理问题的最优化以及总量函数等.

1.1 经济管理与数学

数学起源于簿记、丈量等人类的实际生产活动.因此,数学与经济生活和生产管理有着天然的联系.然而在小农经济时代,还没有现代意义上的管理,加之人们对经商的轻视以及经济数据采集的困难,数学在经济管理方面的应用受到了限制.只是到了 18 世纪现代经济学产生和 20 世纪初科学管理出现,才使得数学逐步渗透到经济管理的各个领域.

时至今日,数学与经济管理的关系越来越密切.

首先,日常的经济事务和管理工作离不开数学特别是初等数学的应用,而经济科学与管理科学的理论研究则大多以高等数学为工具了.

其次,研究经济与管理的问题离不开定性与定量分析的相互结合与彼此促进,这就要用数学模型、求解算法、统计分析等工具.实践表明,单纯文字探讨的经济知识不但空洞而且用起来往往出错,而数学工具的运用固然有得当与否的问题,但是排斥数量分析的研究结果,在实践中肯定是没有什么价值的.

第三,数学科学与经济科学和管理科学的交叉融合导出了许多学科,例如:数理经济学、运筹学、经济控制论、经济学、计量经济学、决策论、博弈论、投入产出分析、价值工程、金融数学等等;而这些学科的发展也给数学学科提出新的问题,推动数学学科的发展.因此,在数学与经济和管理的融合中数学不仅是输出者,也是输入者,即数学不单施益,也会受益.

第四,我们知道,诺贝尔(Nobel)奖没有数学奖.人们常把四年一评的菲尔兹(Fields)奖譬喻为数学的诺贝尔奖,其实有不少的数学家获得过诺贝尔奖,他们得的是经济学奖,因为他们发展了数学来研究经济与管理问题,从而取得了卓越的成果.

对于经济管理类专业的学生,学习并掌握一定的高等数学知识,具有一定的积极作用:一是可以培养定量思维的能力,从严格意义上关心成本和收益,这是精明的企业家、经济工作者应具备的素质;二是可以提高逻辑推理能力,这有助于明晰地思考问题,从而避免被看来似是而非的

事物所迷惑；三是有助于专业课的学习、抽象思维能力的提高，使得学习经济学和管理学变得容易，而且可以更完整、更深刻地理解和解释经济和管理理论.

在经济与管理对数学的使用中，数学既是研究和处理经济问题必不可少的方法和工具，也是理论研究的重要手段，同时还是分析问题时所使用的工具. 这是经济管理类专业的学生在学习和使用数学时不可忽视的问题，但它并不能替代经济理论与管理科学，也不能独立地反映鲜活的经济生活和管理实践.

1.2 经济管理中的常见函数

在用数学方法解决实际经济问题时，往往需要找出经济变量之间的函数关系，建立数学模型. 下面介绍几个常见的经济函数.

1.2.1 需求函数与供给函数

一、需求函数

需求量是指在特定时间内，消费者打算并能够购买的某种商品的数量，用 Q 表示，它与商品价格 P 密切相关，通常降低商品价格会使需求量增加；提高商品价格会使需求量减少. 如果不考虑其他因素的影响（或其他因素不变），则 Q 是 P 的函数，称为需求函数，记作

$$Q = f(P).$$

它通常是一个单调减少函数.

常见的需求函数有以下几种类型：

1. 线性需求函数 $Q = a - bP \quad (a > 0, b > 0)$.

2. 二次需求函数 $Q = a - bP - cP^2 \quad (a > 0, b \geqslant 0, c > 0)$.

3. 指数需求函数 $Q = ae^{-bP} \quad (a > 0, b > 0)$.

有时也把 $Q = f(P)$ 的反函数 $P = f^{-1}(Q)$ 称为价格函数，有时也称为需求函数.

二、供给函数

供给量是指在特定时间内，厂商愿意并能够出售的某种商品的数量，用 S 表示，假设除了商品的价格 P 外影响供给的其他因素均不变，则 S 是 P 的函数，记作

$$S = g(P).$$

它通常是一个单调增函数.

常见的供给函数有以下几种类型：

1. 线性供给函数 $S = -a + bP \quad (a > 0, b > 0)$.

2. 指数供给函数 $S = aP^b \quad (a > 0, b > 0)$.

当 $Q = S$ 时，市场的供需处于平衡状态，此时的价格称为均衡价格，需求（或供给）量称为均衡数量.

当商品由某厂商独家生产时，厂商是价格的制定者，它自然会考虑消费者对价格的反应，并

依需求规律组织生产，其产量即需求量，价格与产量（需求量）的关系由需求函数确定，称该商品市场为完全垄断市场；当商品由众多互不占优势的厂商共同生产时，各厂商之间、消费者之间展开竞争并最终使市场处于均衡状态，此时商品价格即为均衡价格，单一厂商或消费者的行为（改变产量或需求量）不再影响市场均衡，称该商品市场为完全竞争市场.

案例 1【鸡蛋的供给】 当鸡蛋收购价为每千克 4.5 元时，某收购站每月能收购 5 000 千克. 若收购价每千克提高 0.1 元，则收购时可增加 400 千克，求鸡蛋的线性供给函数.

解 设鸡蛋的线性供给函数为

$$S = -c + dP.$$

由题意有

$$5\,000 = -c + 4.5d,$$

$$5\,400 = -c + 4.6d,$$

解得 $d = 4\,000$，$c = 13\,000$，所求供给函数为

$$S = -13\,000 + 4\,000P.$$

案例 2【市场均衡】 已知某商品的需求函数和供给函数分别为

$$Q = 14 - 1.5P, S = -5 + 4P.$$

求该商品的均衡价格和均衡数量.

解 由供需平衡条件有

$$14 - 1.5P = -5 + 4P,$$

解得均衡价格为

$$P = 19/5.5 \approx 3.45.$$

将均衡价格代入需求函数，得均衡数量为

$$Q = 97/11 \approx 8.82.$$

1.2.2 总成本函数、收入函数和利润函数

在生产和经营活动中，如果投入的各要素价格不变，则成本 C 是产量或销售量 Q 的函数 $C = C(Q)$，称为总成本函数. 一般地总成本函数由两部分组成

$$C(Q) = C_0 + C_1(Q),$$

其中 C_0 为固定成本，它与产量无关，如厂房、设备的折旧费、企业管理费等；$C_1(Q)$ 为可变成本，它随产量的增加而增加，如原材料、动力、工人的工资等. 常见的成本函数是线性函数

$$C(Q) = C_0 + aQ \quad (a > 0).$$

以总成本除以产量，得平均成本函数

$$\overline{C}(Q)=\frac{C(Q)}{Q}=\overline{C}_0(Q)+\overline{C}_1(Q),$$

其中 $\overline{C}_0(Q)$ 与 $\overline{C}_1(Q)$ 分别称为平均固定成本与平均可变成本.

厂商销售 Q 单位的商品所得收入为 $R=R(Q)$,称为总收入(益)函数.设商品的价格为 P,则总收入函数为

$$R(Q)=PQ.$$

总利润 L 等于总收入与总成本的差,于是总利润函数为

$$L(Q)=R(Q)-C(Q).$$

案例3【盈亏平衡点】 玉宏混凝土建筑企业A公司的混凝土需求函数为 $P=110-4Q$,公司的固定成本为400千元,每生产一个单位(百吨)的混凝土需增加10个单位的成本,该公司的最大生产能力为18个单位,给出其总利润函数并计算盈亏平衡点处的产量及价格.

解 收入函数与成本函数分别为

$$R(Q)=PQ=110Q-4Q^2,$$

$$C(Q)=400+10Q,$$

则总利润函数为

$$\begin{aligned}L(Q)&=R(Q)-C(Q)\\&=-4Q^2+100Q-400\quad(0<Q\leqslant 18).\end{aligned}$$

令 $L(Q)=0$,得盈亏平衡时的产量 $Q=5$($Q=20$ 舍去),此时价格 $P=90$.

上述仅是当厂商或消费者面临一个商品时,相关函数的建立过程.当厂商生产多种不同的产品时,成本、收入和利润均为各产品产量的多元函数.

案例4【企业利润】 某企业生产A,B两种相互关联的产品,产量分别为 Q_1,Q_2,该企业的总成本函数为

$$C=2Q_1^2+Q_1Q_2+2Q_2^2+200,$$

A,B两种产品的需求函数分别为

$$Q_1=28-0.4P_1+0.2P_2,\qquad Q_2=26-0.6P_2+0.2P_1,$$

其中 P_1,P_2 分别为两产品的价格.求该企业的总利润函数.

解 联立两产品的需求函数

$$\begin{cases}Q_1=28-0.4P_1+0.2P_2,\\Q_2=26-0.6P_2+0.2P_1,\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} P_1 = 110 - 3Q_1 - Q_2, \\ P_2 = 80 - 2Q_2 - Q_1, \end{cases}$$

则总利润函数为

$$\begin{aligned} L(Q_1,Q_2) &= R(Q_1,Q_2) - C(Q_1,Q_2) \\ &= P_1Q_1 + P_2Q_2 - C(Q_1,Q_2) \\ &= (110 - 3Q_1 - Q_2)Q_1 + (80 - 2Q_2 - Q_1)Q_2 - \\ &\quad (2Q_1^2 + Q_1Q_2 + 2Q_2^2 + 200) \\ &= 110Q_1 + 80Q_2 - 5Q_1^2 - 3Q_1Q_2 - 4Q_2^2 - 200. \end{aligned}$$

1.2.3 生产函数

生产函数是指产量 Q 与各种投入要素之间的函数关系：

$$Q = f(x_1, x_2, \cdots, x_n),$$

其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 分别为 n 种要素的投入量.

如果只考虑两种投入要素:资本 K 和劳动 L,则生产函数为

$$Q = f(K, L).$$

常见的生产函数有

1. 线性生产函数

$$Q = aK + bL \quad (a, b > 0).$$

2. Cobb - Douglas 生产函数

$$Q = AK^{\alpha}L^{\beta} \quad (A, \alpha, \beta > 0).$$

当生产函数满足

$$f(\lambda K, \lambda L) = \lambda f(K, L)$$

时,称为规模报酬不变.上述线性生产函数显然满足这一条件,Cobb - Douglas 生产函数当 $\alpha + \beta = 1$ 时,也满足这个条件.

1.3 边际分析和弹性分析

1.3.1 边际分析

引例 1 下表是某个企业总成本 C 随着产量 Q 变化的规律,试进行成本分析.

产量(Q)	总成本(C)	产量(Q)	总成本(C)
0	100	4	129
1	110	5	135
2	118	6	148
3	124		

上表说明,生产该产品的固定成本为100(当 $Q=0$ 时),生产第1个产品时成本增加10,即花费在第1个产品的成本为10. 同理,花费在第2个产品的成本为 $118-110=8$. 这种在生产不同产品上所花费的成本在经济学上称为边际成本.

一般地,在经济分析中通常将函数的导数称为边际函数,利用导数研究经济变量的边际变化的方法,称作边际分析. 所谓"边际",表示在自变量 x 的某一个值的"边缘上"函数 y 的变化情况. 即 x 从一个给定值发生微小变化时 y 的变化情况. 显然,这就是 y 的瞬时变化率,也就是变量 y 对变量 x 的导数. 即边际的概念就是导数的经济意义.

以总成本函数 $C=C(Q)$ 为例,其导数

$$C'(Q)=\lim_{\Delta Q\to 0}\frac{C(Q+\Delta Q)-C(Q)}{\Delta Q}$$

称为边际成本函数,记为 MC,显然 $MC>0$.

设产量由 Q 增加到 $Q+\Delta Q$,当 $|\Delta Q|$ 很小时,比值

$$\frac{\Delta C}{\Delta Q}=\frac{C(Q+\Delta Q)-C(Q)}{\Delta Q}\approx\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}Q}=C'(Q),$$

即产量由 Q 增加到 $Q+\Delta Q$ 这一生产过程中,每增加一个单位产量,总成本的增量约为总成本函数 $C(Q)$ 在 Q 处的导数.

下面讨论边际成本与平均成本的关系. 平均成本函数为

$$\overline{C}(Q)=\frac{C(Q)}{Q},$$

$$\begin{aligned}\overline{C}'(Q)&=\left(\frac{C(Q)}{Q}\right)'=\frac{QC'(Q)-C(Q)}{Q^2}\\&=\frac{1}{Q}\left[C'(Q)-\frac{C(Q)}{Q}\right]\\&=\frac{1}{Q}[C'(Q)-\overline{C}(Q)].\end{aligned}$$

由于产量 $Q>0$,则当 $C'(Q)<\overline{C}$ 时,此时 $\overline{C}'<0$,增加产量将使平均成本减少;当 $C'(Q)>\overline{C}$ 时,$\overline{C}'>0$,增加产量将使平均成本增加.

例如吉利汽车公司生产300辆小汽车,其成本为600万元,平均成本为2万元. 当它生产第201辆车时,如其成本也是2万元,则平均成本不变;若此辆车成本为1.9万元,即边际成本小于

平均成本，则多生产此辆车使平均成本下降；若此辆车的成本为 2.1 万元，即边际成本大于平均成本，则多生产此辆车使平均成本增加.

对其他经济函数，“边际”概念有类似的意义. 例如，总收入函数 $R=R(Q)$，则 R 对 Q 的导数 $R'(Q)$ 称为边际收入，它可以解释为：销售第 $Q+1$ 个单位产品时，总收入增加的数额.

案例 1【边际收入】 设某产品的需求函数为 $P=\frac{1}{5}(100-Q)$，求边际收入函数，以及 $Q=20,50$ 和 70 时的边际收入.

解 收入函数为

$$R(Q)=PQ=\frac{1}{5}(100-Q)Q.$$

边际收入函数为

$$R'(Q)=\frac{1}{5}(100-2Q).$$

$$R'(20)=12,\quad R'(50)=0,\quad R'(70)=-8.$$

由所得结果可知，当销售量即需求量为 20 个单位时，再增加销售可使总收入增加，再多销售一个单位产品时，总收入约增加 12 个单位；当销售量为 50 个单位时，再增加销售总收入不会再增加；当销售量为 70 个单位时，再多销售一个单位产品，反而使总收入大约减少 8 个单位.

1.3.2 弹性分析

弹性分析也是经济分析中常用的一种方法，主要用于对需求、生产、供给等问题的研究.

引例 2 笔记本电脑经销商和手机经销商均宣布将商品价格降低 100 元，试分析其对消费者的影响.

笔记本电脑和手机存在价格上的差异，假设笔记本电脑的价格为每台 10 000 元，手机的价格为每部 2 000 元. 尽管两种商品降价相同，但对笔记本电脑来说，其降价幅度为$\frac{10\,000-9\,900}{10\,000}=0.01$，而手机的降价幅度却为$\frac{2\,000-1\,900}{2\,000}=0.05$，是笔记本电脑的 5 倍. 可以预见，手机经销商的降价措施对消费者的影响会大些. 这种相对数的变化对另一变量的影响就是弹性的概念.

下面给出弹性的一般概念：

设函数 $y=f(x)$ 在点 x 处可导，当自变量从 x 起改变了 Δx 时，自变量相对改变量是$\frac{\Delta x}{x}$，函数 y 相对应的相对改变量则是$\frac{\Delta y}{y}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{f(x)}$.

称极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x}{y}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x}{y}f'(x)$$

为函数 $f(x)$ 在点 x 处的弹性（点弹性），记作 E，即

$$E=\frac{x}{y}f'(x).$$

从以上概念可以看出，函数$f(x)$的弹性是函数相对改变量与自变量相对改变量比值的极限，它是函数的相对变化率，或解释成当自变量变化1%时函数变化了$E\%$. 它反映了函数相对变动对自变量相对变动的敏感程度.

对需求函数$Q=Q(P)$，可定义需求价格弹性

$$E_P=\frac{P}{Q}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}.$$

由于$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}$为负，故$E_P$表示在价格为$P$时，价格上涨或下跌1%时，需求量约减少或增加$E_P\%$. 它反映了当价格变动时需求量相对变动对价格相对变动的灵敏程度.

案例2【弹性分类】 设需求函数$Q=100(6-P)(0<P<6)$. 求价格$P=1.5,3,4$时的需求价格弹性.

解 $Q'=-100, E_P=-100\dfrac{P}{100(6-P)}=\dfrac{P}{P-6}.$

$E_{1.5}=\dfrac{1.5}{1.5-6}\approx-0.33$，此时提价1%，需求量只减少0.33%；

$E_3=\dfrac{3}{3-6}=-1$，此时提价1%，需求量也减少1%；

$E_4=\dfrac{4}{4-6}=-2$，此时提价1%，需求量将减少2%.

对需求弹性有如下分类：

(1) 如果$|E_P|>1$，称需求富有弹性；

(2) 如果$|E_P|<1$，称需求缺乏弹性；

(3) 如果$|E_P|=1$，称需求是单位弹性.

特别地，$E_P=0$，称需求完全缺乏弹性；$E_P=-\infty$，称需求完全有弹性.

案例3【需求弹性】 设某商品需求量Q是价格P的单调减少函数：$Q=Q(P)$，其需求弹性

$$|E_P|=\frac{2P^2}{192-P^2}>0.$$

(1) 设R为总收益函数，证明$\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P}=Q(1-|E_P|)$；

(2) 求$P=6$时总收益对价格的弹性，并说明其经济意义.

解 (1) $R(P)=PQ(P)$将其两边对P求导，得

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P}=Q+P\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}=Q\left(1+\frac{P}{Q}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}\right)=Q(1-|E_P|).$$

(2) 总收益对价格的弹性记为$\dfrac{ER}{EP}$,

$$\frac{ER}{EP}=\frac{P}{R}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P}=\frac{PQ}{PQ}(1-|E_P|)=1-|E_P|=1-\frac{2P^2}{192-P^2}=\frac{192-3P^2}{192-P^2},$$

$$\left.\frac{ER}{EP}\right|_{P=6}=\frac{192-3\times6^2}{192-6^2}=\frac{9}{13}\approx0.54.$$

其经济意义：当 $P=6$ 时，若价格上涨 1%，则总收益增加 0.54%.

上面仅仅是关于一元函数的边际分析和弹性分析的简介，对多元函数也可进行类似的分析，有兴趣的读者可以参阅有关书籍.

1.4 经济管理的最优化

本节和下一节通过几个实例来说明微积分学在优化理论及经济管理中的一些应用.

案例 1【最小平均成本】 设成本函数为 $C(Q)=9\,000+40Q+0.001Q^2$，求平均成本最小时的产量、边际成本及最小平均成本.

解 平均成本函数为

$$\overline{C}(Q)=\frac{C(Q)}{Q}=\frac{9\,000}{Q}+40+0.001Q,$$

$$\overline{C}'(Q)=-\frac{9\,000}{Q^2}+0.001.$$

令 $\overline{C}'(Q)=0$，得唯一驻点 $Q=3\,000$（$-3\,000$ 不合题意，舍去）. 又因为

$$\overline{C}''(Q)=\frac{18\,000}{Q^3}>0,$$

则在 $Q=3\,000$ 时平均成本最小，最小平均成本为

$$\overline{C}(3\,000)=46.$$

边际成本函数为

$$C'(Q)=40+0.002Q.$$

当 $Q=3\,000$ 时，$C'(3\,000)=46$.

案例 2【销售收入】 一家销售公司批发某种小商品，该公司提供以下的价格折扣：如果订购量不超过 50 000 件，则每千件价格为 300 元；如果订购量超过 50 000 件，则每超过 1 000 件价格可下浮 1.25%. 问订单是多大时，该公司的销售收入最大？最大收入是多少？

解 设订单为 Q 千件，则 $Q\leqslant50$ 时，销售收入为 $R(Q)=300Q$ 元；$Q>50$ 时，$R(Q)=[300-3.75(Q-50)]Q$ 元，即

$$R(Q)=\begin{cases}300Q, & 0\leqslant Q\leqslant50,\\ -3.75Q^2+487.5Q, & Q>50.\end{cases}$$