全国高等医学院校配套教材

医学基础课程学习指导与强化训练

供临床、预防、基础、口腔、麻醉、影像、药学、检验、
护理、中西医结合等专业用

高等数学学习指导

陈　琳　主编

科学出版社
www.sciencep.com

全国高等医学院校配套教材

医学基础课程学习指导与强化训练

供临床、预防、基础、口腔、麻醉、影像、药学、检验、护理、中西医结合等专业用

高等数学学习指导

主　编　陈　琳

副主编　张学良

编　委（以姓氏笔画为序）

刘　浩　吐　娅　张学良

陈　琳　岳　华　祝丽萍

秦伶俐

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书是根据本科《高等数学教学大纲》基本要求、结合医学生高等数学培养特点编写的，是医学本科高等数学教材的配套教材. 全书内容分 8 章，分别是：函数、极限与连续，导数与微分，中值定理及导数应用，不定积分，定积分及其应用等. 每章后附有强化训练及模拟试题，参考答案另附书末. 目的是强化学习. 特点是实用性强，内容全面.

本书可供医学本科临床、预防、基础、口腔、麻醉、影像、药学、检验、护理、中西医结合等专业数学使用.

图书在版编目（CIP）数据

高等数学学习指导/陈琳主编. —北京：科学出版社，2006
全国高等医学院校配套教材·医学基础课程学习指导与强化训练
ISBN 7-03-017912-9

Ⅰ. 高… Ⅱ. 陈… Ⅲ. 高等数学－医学院校－教学参考资料
Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 100883 号

责任编辑：郭海燕 夏 宇 / 责任校对：纪振红
责任印制：刘士平 / 封面设计：黄 超

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

丽源印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2006 年 8 月第 一 版 开本：787×1092 1/16
2006 年 8 月第一次印刷 印张：17 3/4
印数：1—4 000 字数：418 000

定价：24.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈新欣〉）

前　　言

随着现代科学技术和信息技术的迅速发展，各门学科和技术都朝着定量化的趋势发展，数学的应用正在向一切领域渗透．尤其近年来，作为素质教育的一项重要改革，高等数学已经不再是单纯为其他专业课程提供数学工具，更是成为培养和提高大学生科学与数学素质的重要课程．

鉴于目前高等学校非数学类专业学时较少，同时，许多非数学类高等数学教材受到篇幅的限制，存在题型不全、例题简单、强化训练较少等不足，很多学生感到这门课程内容概念复杂，方法深奥灵活，尤其解题困难而不易掌握，而有些学生又感到学得不够．因此，如何满足学生学习的要求，使学生能真正掌握数学的基本思想和基本技能，是目前高等数学课程教学改革与实践的一项重要课题．基于此，在多年从事高等数学教学实践的基础上，我们参阅了大量参考书籍，编写了这本主要针对非数学类专业高等数学课程的学习指导，以促进这些专业高等数学的教学和学习．

本书适用于开设高等数学的非数学类本科各专业．还可以作为学生的教学辅导用书，也可以作为教师的教学参考用书．

全书分为 8 章，每章包括知识点、题型分析、解题常见错误剖析、强化训练、模拟试题五部分．知识点为本章必须掌握的内容；题型分析按常见的题型进行分类，所选例题代表性较强，难易结合，并有解题思路和详细的解题过程；解题常见错误剖析部分选择学生在解题过程中经常出现的错误进行深入分析，并给出正确的解题过程；强化训练是针对教材中强化内容过少，题型不全所补充的练习题，并按照考试中经常出现的题型分为单项选择题、填空题、计算题（包括应用题），难易适中，有少量有一定难度的题目；模拟试题部分按照本章知识点选题．书后附有强化训练及模拟试题参考答案．

本书第 1 章由刘浩编写，第 2 章由吐娅编写，第 3 章由祝丽萍编写，第 4 章由秦伶俐编写，第 5 章由陈琳编写，第 6 章由岳华编写，第 7 章、第 8 章由张学良编写．

本书在编写过程中参考了国内大量高等数学的教材和著作，在此表示真诚的感谢．

我们所做的工作仅是一种尝试，加之水平有限，时间仓促，错误之处在所难免，恳请专家、同行和读者批评指正．

编　者

2006 年 5 月

目 录

第1章 函数、极限与连续

1.1 知 识 点

(1) 了解函数的概念.熟悉求函数的定义域、表达式及函数值.熟悉建立简单应用问题的函数关系式.

(2) 了解函数的几种简单性质,熟悉判断函数的有界性、奇偶性.

(3) 了解复合函数的概念,掌握将一个复合函数分解为基本初等函数或简单函数的方法.

(4) 掌握基本初等函数及其图形的有关知识(复习初等数学).

(5) 了解极限概念("$\varepsilon-N$"与"$\varepsilon-\delta$"定义不作要求),熟悉利用极限概念分析函数的变化趋势.了解左极限与右极限的概念.了解 $x\to x_0$ 时函数极限存在的充分必要条件,了解极限存在的两个准则.

(6) 掌握极限四则运算法则.

(7) 掌握用两个重要极限求极限的方法.

(8) 了解无穷小量、无穷大量的概念,熟悉无穷小量的性质、无穷小量与无穷大量的关系.熟悉无穷小量的比较.

(9) 掌握分段函数极限的求法.

(10) 了解函数(含分段函数)在一点连续与间断的概念,掌握判断简单函数在一点的连续性.熟悉函数在一点连续与在一点极限存在之间的关系.

(11) 熟悉求函数的间断点并确定其类型.

(12) 了解初等函数在其定义区间的连续性.掌握利用复合函数连续性求极限的方法,熟悉在闭区间上连续函数的性质,了解介值定理及其应用.

1.2 题 型 分 析

1. 求函数的定义域

解题思路 自变量的取值范围称为函数的定义域.

例1 求函数 $y=\sqrt{x^2-x-6}+\arcsin\dfrac{2x-1}{7}$ 的定义域.

解 这是两个函数之和的定义域,先分别求出每个函数的定义域,然后求其公共部分即可.

$\sqrt{x^2-x-6}$ 的定义域必须满足 $x^2-x-6\geqslant 0$,即 $(x-3)(x+2)\geqslant 0$,解得 $x\geqslant 3$ 或 $x\leqslant -2$,而 $\arcsin\dfrac{2x-1}{7}$ 的定义域是 $\left|\dfrac{2x-1}{7}\right|\leqslant 1$,即 $-7\leqslant 2x-1\leqslant 7$,解得 $-3\leqslant x\leqslant 4$.这两个函数

的定义域的公共部分是 $-3\leqslant x\leqslant -2, 3\leqslant x\leqslant 4$. 于是,所求函数的定义域是 $-3\leqslant x\leqslant -2, 3\leqslant x\leqslant 4$,即 $[-3,-2]$,$[3,4]$.

例 2 设 $y=f(x)$ 的定义域是 $[-1,1]$,求 $y=f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域,其中 $0\leqslant a\leqslant 1$.

解 因为 $y=f(x)$ 的定义域是 $[-1,1]$,所以 $y=f(x+a)$ 的定义域为 $-1\leqslant x+a\leqslant 1$,即 $-1-a\leqslant x\leqslant 1-a$. $y=f(x-a)$ 的定义域为 $-1\leqslant x-a\leqslant 1$,即 $-1+a\leqslant x\leqslant 1+a$. 这两个函数的定义域的公共部分是 $-1-a\leqslant x\leqslant 1-a$, $-1+a\leqslant x\leqslant 1+a$. 于是,所求函数的定义域是 $-1-a\leqslant x\leqslant 1-a$, $-1+a\leqslant x\leqslant 1+a$,即 $[a-1,1-a]$.

2. 判断两个函数是否相同

解题思路 若两个函数的定义域和对应法则相同,则这两个函数相等或相同.

例 下列函数中 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否相同?

(1) $f(x)=\lg x^2, g(x)=2\lg x$; (2) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}, g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$;

(3) $f(x)=1, g(x)=\sec^2 x-\tan^2 x$.

解 (1) 不同,因为定义域不同.

(2) 相同,因为定义域、对应法则均相同.

(3) 不同,因为定义域不同.

3. 判断函数的奇偶性

解题思路 设 I 为关于原点对称的区间,若 $\forall x\in I$,都有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为偶函数;若 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$ 为奇函数.

例 判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x)=x\sin x$; (2) $f(x)=\sin x-\cos x$;

(3) $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

解 (1) 因为 $f(-x)=-x\sin(-x)=x\sin x=f(x)$,所以 $f(x)=x\sin x$ 是偶函数.

(2) 因为 $f(-x)=\sin(-x)-\cos(-x)=-\sin x-\cos x$. 所以 $f(x)=\sin x-\cos x$ 既不是奇函数也不是偶函数.

(3) 因为

$$\begin{aligned} f(-x)&=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=\ln\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)\\ &=\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\,\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}}\right)=\ln\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right)\\ &=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{-1}=-\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=-f(x) \end{aligned}$$

所以 $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ 是奇函数.

4. 函数的有界性与无界性

解题思路 设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义,若对任意的 $M>0$,都存在 $x\in I$,使 $|f(x)|\leqslant M$,则称 $f(x)$ 在 I 上有界.

如果对任意的 $M>0$,都存在 $x\in I$,使 $|f(x)|>M$,则称 $f(x)$ 在 I 上无界.

例 1 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界,因为 $|\sin x|\leqslant 1$;函数的有界与无界是相对于

某个区间而言的，如 $\varphi(x)=\frac{1}{x}$在$(0,1)$内无界，但 $\varphi(x)=\frac{1}{x}$在$[0.001,2]$上却是有界的.

例2　下列函数是否有界？

(1) $y=\frac{1}{x^2}, a\leqslant x\leqslant 1$，其中 $0<a<1$；(2) $y=x\cos x, x\in(-\infty,+\infty)$.

解　(1) 因为 $a\leqslant x\leqslant 1$，所以 $a^2\leqslant x^2\leqslant 1$，所以 $1\leqslant\frac{1}{x^2}\leqslant\frac{1}{a^2}$$\left(\text{因为 } 0<a<1\text{，所以}\frac{1}{a^2}>1\right)$，即 $y=\frac{1}{x^2}, a\leqslant x\leqslant 1$，其中 $0<a<1$ 有界.

(2) 对任意的 $M>0$，取 $x=(2[M]+1)\pi$（$[M]$表示取 M 的整数部分），则 $\cos x=-1$. 此时 $|f(x)|=|(2[M]+1)\pi\cos(2[M]+1)\pi|=(2[M]+1)\pi>M$，所以 $y=x\cos x, x\in(-\infty,+\infty)$无界.

5. 复合函数的分解

解题思路　分解复合函数要求所分解出的每一个函数都是基本初等函数或基本初等函数的四则运算形式，即不再含有复合函数.

例1　分解复合函数：$y=\sqrt{\cot\frac{x}{2}}$.

解　$y=\sqrt{u}, u=\cot v, v=\frac{x}{2}$.

例2　分解复合函数：$y=e^{\sin\sqrt{x^2+1}}$.

解　$y=e^u, u=\sin v, v=\sqrt{t}, t=x^2+1$.

6. 数列的极限

解题思路　利用判断数列收敛的两个准则.

准则1：（迫敛性定理）若 $\forall n\in N$，有 $x_n\leqslant y_n\leqslant z_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=A$，则 $\{y_n\}$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=A$.

准则2：（单调有界定理）单调有界数列必有极限.

例1　$x_1=\sqrt{2}, x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}\,(n=1,2,3,\cdots)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解　用数学归纳法证明数列 $\{x_n\}$ 严格单调递增且有上界.

(1) 显然，当 $n=1$ 时，有 $x_1<x_2$ 即 $\sqrt{2}<\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

设 $n=k(k\geqslant 1)$ 时，有 $x_k<x_{k+1}$ 成立，则 $2+x_k<2+x_{k+1}$，所以 $\sqrt{2+x_k}<\sqrt{2+x_{k+1}}$，即 $x_{k+1}<x_{k+2}$. 所以 $x_{k+1}<x_{(k+1)+1}$，即当 $n=k+1(k\geqslant 1)$ 时，命题也成立. 所以数列 $\{x_n\}$ 严格单调递增.

(2) 显然，当 $n=1$ 时，有 $x_1=\sqrt{2}<\sqrt{2}+1$.

设 $n=k(k\geqslant 1)$，有 $x_k<\sqrt{2}+1$ 成立（下界为$\sqrt{2}$），则

$$x_{k+1}=\sqrt{2+x_k}<\sqrt{2+(\sqrt{2}+1)}<\sqrt{2+2\sqrt{2}+1}=\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}=\sqrt{2}+1$$

所以当 $n=k+1$ 时，命题也成立. 所以 $\forall n\geqslant 1$，都有 $x_n<\sqrt{2}+1$ 即数列 $\{x_n\}$ 有上界（上界为 $\sqrt{2}+1$）. 所以数列 $\{x_n\}$ 严格单调递增且有界. 所以由单调有界定理数列 $\{x_n\}$ 必存在极限，设

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$，由已知 $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$，所以 $x_{n+1}^2=2+x_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}^2=\lim\limits_{n\to\infty}(2+x_n)=2+\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，即 $l^2=2+l$，$l^2-l-2=0$，$(l-2)(l+1)=0$，所以 $l=2$ 或 $l=-1$（因为$\sqrt{2}\leqslant x_n<\sqrt{2}+1$）. 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$.

例 2 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

解 因为

$$n\cdot\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant n\cdot\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

又因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=1$$

所以由追敛性定理

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1$$

7. 函数的极限

解题思路 函数的左、右极限，函数极限存在的判断.

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A$$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=A$$

例 1 设

$$f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x<0\\ x, & x>0\end{cases}$$

求$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$、$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$，并问$\lim\limits_{x\to0}f(x)$是否存在.

解 因为

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}(x^2+1)=1,\ \lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}x=0$$

所以$\lim\limits_{x\to0}f(x)$不存在.

例 2 问$f(x)=x\cdot\arctan\frac{1}{x}$在 $x=0$ 处是否存在极限.

解 因为

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}x\cdot\arctan\frac{1}{x}=0\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}x\cdot\arctan\frac{1}{x}=0\cdot\frac{\pi}{2}=0$$

所以$\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$ 存在.

8. 两个重要极限

解题思路 利用两个重要极限$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$,$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$来求函数的极限.

例1 求$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin3x}{\sin4x}$.

解 $$\lim_{x\to0}\frac{\sin3x}{\sin4x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin3x}{3x}\cdot\frac{4x}{\sin4x}\cdot\frac{3x}{4x}=\frac{3}{4}\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{4x}{\sin4x}\cdot\frac{3x}{4x}=\frac{3}{4}$$

例2 求$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

解 $$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}$$

例3 求$\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

解 $$\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos x}\frac{\sin x}{x}\frac{1-\cos x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos x}\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}$$

$$=1\cdot1\cdot\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}$$

由例2知$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$,故$\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{2}$.

例4 求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{x}{3}\right)^x$.

解 令$\frac{x}{3}=u$,则$x=3u$,并且$x\to\infty\Leftrightarrow u\to\infty$,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x}{3}\right)^x=\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{3u}=\lim_{u\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{u}\right)^u\right]^3=\mathrm{e}^3$$

例5 求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x$.

解 $$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-\frac{x}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^{-2}=\mathrm{e}^{-2}$$

例6 求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2-x}{3-x}\right)^x$.

解法一 令$\frac{2-x}{3-x}=1+\frac{1}{u}$,解得$x=u+3$,并且$x\to\infty\Leftrightarrow u\to\infty$,故

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2-x}{3-x}\right)^x=\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u+3}=\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^u\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^3=\mathrm{e}\cdot1^3=\mathrm{e}$$

解法二 $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2-x}{3-x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{-x\left(1-\frac{2}{x}\right)}{-x\left(1-\frac{3}{x}\right)}\right]^x=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-\frac{2}{x}\right)^x}{\left(1-\frac{3}{x}\right)^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left[\left(1-\frac{2}{x}\right)^{\frac{-x}{2}}\right]^{-2}}{\left[\left(1-\frac{3}{x}\right)^{\frac{-x}{3}}\right]^{-3}}$$

$$=\frac{e^{-2}}{e^{-3}}=e^{-2+3}=e$$

解法三 $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2-x}{3-x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3-x-1}{3-x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{3-x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x-3}\right)^x$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x-3}\right)^{x-3}\cdot\left(1+\frac{1}{x-3}\right)^3=e\cdot 1^3=e$$

9. 无穷小量与无穷大量

解题思路 无穷小量是指在某变化过程中以0为极限的一个变量(函数),而不是指很小很小的一个数.但零是可以作为无穷小的惟一常数.

无穷小的性质:①有限个无穷小的代数和仍为无穷小;②有界变量与无穷小之积仍是无穷小;③有限个无穷小之积仍是一个无穷小.

两个无穷小的和、差、积仍是无穷小,但两个无穷小的商不一定是无穷小.无穷小的阶的比较及利用等价无穷小代换来求极限.

下面是常用的几个等价无穷小代换的例子:

当 $x\to0$ 时,有 $\sin x\sim x,\tan x\sim x,\arcsin x\sim x,\arctan x\sim x,1-\cos x\sim\frac{x^2}{2},\ln(1+x)\sim x,$

$e^x-1\sim x,\sqrt{1+x}-1\sim\frac{1}{2}x,(1+x)^{\frac{1}{n}}-1\sim\frac{1}{n}x.$

例1 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x})$.

解 $$\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x}=-2\sin\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\cdot\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}$$

因为 $\left|-2\sin\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right|\leqslant2$ 有界,而

$$0\leqslant\left|\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right|<\left|\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right|=\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\to0\quad(x\to+\infty)$$

故 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}=0$,故是无穷小量.因此 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x})=0$.

例2 求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan2x}{\sin5x}$.

解 当 $x\to0$ 时,$\tan 2x\sim2x,\sin 5x\sim5x$,

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan 2x}{\sin 5x}=\lim_{x\to0}\frac{2x}{5x}=\frac{2}{5}$$

例3 证明当 $x\to0$ 时,$\sin(\sin x)\sim\ln(1+x)$.

解 当 $x\to0$ 时,$\sin(\sin x)\to0,\ln(1+x)\to0$,

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(\sin x)}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin(\sin x)}{x}}{\frac{\ln(1+x)}{x}}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin x}{x}\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}}{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}}=\frac{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}}{\lim\limits_{x\to0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}}=\frac{1\cdot1}{1}=1$$

所以当 $x\to 0$ 时，$\sin(\sin x)\sim\ln(1+x)$.

10. 几种常见的求极限的类型

解题思路 几种常见的求极限的类型，如：

①$\frac{0}{0}$型不定式；②$\frac{\infty}{\infty}$型不定式；③$\infty-\infty$型不定式；④$1^{\infty}$型不定式等.

例 1 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{x+\sqrt{x}}$ $\left(\frac{0}{0}型\right)$.

解法一

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x+\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}=0$$

解法二

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x+\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x(x-\sqrt{x})}{(x+\sqrt{x})(x-\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{x(x-\sqrt{x})}{x^2-x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-\sqrt{x}}{x-1}=0$$

例 2 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$ $\left(\frac{0}{0}型\right)$.

解法一

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sqrt{1-\cos x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\cdot\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{1-\cos x}\cdot\sqrt{1+\cos x}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\cdot\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{\sin^2 x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\cdot\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sin x}\cdot\sqrt{1+\cos x}=\sqrt{2}$$

解法二

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sqrt{1-\cos x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sqrt{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=\sqrt{2}$$

例 3 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}$ $\left(\frac{0}{0}型\right)$.

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\sin x}{x}}=\frac{0}{2}=0$$

例 4 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)$ （无限个无穷小的和）.

解

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(1+n)}{2}}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+n^2}{2n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}+1}{2}=\frac{1}{2}$$

例 5 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{x}$ $\left(\dfrac{0}{0}\text{型}\right)$.

解法一
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+2x}\cdot 2}{1}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{1+2x}=2$$

解法二
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+2x)=\lim_{x\to 0}\ln(1+2x)^{\frac{1}{x}}$$
$$=\ln\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}\cdot 2}=\ln e^{2}=2$$

例 6 求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-1)^{30}\cdot(3x-2)^{20}}{(2x+1)^{50}}$ $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\text{型}\right)$.

解
$$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-1)^{30}\cdot(3x-2)^{20}}{(2x+1)^{50}}=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-1)^{30}\cdot(3x-2)^{20}\cdot\frac{1}{x^{50}}}{(2x+1)^{50}\cdot\frac{1}{x^{50}}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left[(2x-1)\cdot\frac{1}{x}\right]^{30}\cdot\left[(3x-2)\cdot\frac{1}{x}\right]^{20}}{\left[(2x+1)\cdot\frac{1}{x}\right]^{50}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(2-\frac{1}{x}\right)^{30}\cdot\left(3-\frac{2}{x}\right)^{20}}{\left(2+\frac{1}{x}\right)^{50}}=\frac{2^{30}\cdot 3^{20}}{2^{50}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{20}$$

例 7 求$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}$ $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\text{型}\right)$.

解
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+e^{-2x}}{1-e^{-2x}}=1$$

例 8 求$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+4}-\sqrt{x})$ $(\infty-\infty\text{型})$.

解
$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+4}-\sqrt{x})=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x+4}-\sqrt{x})(\sqrt{x+4}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x}}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{\sqrt{\frac{x+4}{x}}+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1}$$
$$=2$$

例 9 求$\lim\limits_{x\to-2}\left(\dfrac{4}{4-x^{2}}-\dfrac{1}{x+2}\right)$ $(\infty-\infty\text{型})$.

解
$$\lim_{x\to-2}\left(\frac{4}{4-x^{2}}-\frac{1}{x+2}\right)=\lim_{x\to-2}\frac{4-(2-x)}{4-x^{2}}=\lim_{x\to-2}\frac{2+x}{4-x^{2}}$$
$$=\lim_{x\to-2}\frac{2+x}{(2-x)(2+x)}=\lim_{x\to-2}\frac{1}{2-x}=\frac{1}{4}$$

例 10 求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{x}$ (1^{∞}型).

解 $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x-2}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x-2}{3}}\right)^{\frac{x-2}{3}\cdot 3+2}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x-2}{3}}\right)^{\frac{x-2}{3}\cdot 3}\cdot\left(1+\frac{1}{\frac{x-2}{3}}\right)^2$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x-2}{3}}\right)^{\frac{x-2}{3}\cdot 3}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x-2}{3}}\right)^2=e^3$$

例 11 求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^x$ (1^∞型).

解法一 $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{x}\right)^{-x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x\cdot(-1)}=e^{-1}$$

解法二 $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{1+x}\right)^x$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-(1+x)}\right)^{-(1+x)\cdot(-1)-1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-(1+x)}\right)^{-(1+x)\cdot(-1)}\cdot\left(1+\frac{1}{-(1+x)}\right)^{-1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-(1+x)}\right)^{-(1+x)\cdot(-1)}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-(1+x)}\right)^{-1}$$

$$=e^{-1}$$

11. 函数连续性的讨论

解题思路 ①因为初等函数在其定义域内是连续的,故关于函数连续性的讨论,主要针对非初等函数而言,如某些分段函数、带绝对值号的函数以及由极限定义的函数等,因此讨论这些函数的连续性实际上就是讨论函数在其分段点处的极限,这可通过讨论在该点的左右连续来完成;②对分段函数式中含待定参数的问题,讨论方法同上;③判断方程在区间内是否有实根,主要利用零点定理来完成;④常利用闭区间上连续函数的性质(如介值定理、零点定理等)证明存在一点满足某抽象函数方程.

例 1 设

$$f(x)=\begin{cases}e^x, & x<0\\ 1, & x=0\\ \dfrac{\sin x}{x}, & x>0\end{cases}$$

求$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$,$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$,并问$f(x)$在$x=0$处是否连续.

解 $$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}e^x=e^0=1,\ \lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}=1$$

又因为$f(0)=1$,所以$f(x)$在$x=0$处连续.

例 2 设

$$f(x)=\begin{cases} e^x, & x<0 \\ a+x, & x\geqslant 0 \end{cases}$$

问 a 为何值时函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续?

解 因为

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} e^x=e^0, \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(a+x)=a=f(0)$$

又因为如果 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续则必有

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$$

所以当 $a=1$ 时,函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续

例 3 证明方程 $x^5-3x=1$ 至少有一个根介于 1 和 2 之间.

证明 因为 $f(x)=x^5-3x-1\in C[1,2]$,又因为 $f(1)=-3$, $f(2)=25$,所以由零点定理(根的存在定理),至少存在一个 $\xi\in(1,2)$ 使得 $f(\xi)=0$ 成立,即方程 $x^5-3x=1$ 至少有一个根介于 1 和 2 之间成立.

例 4 利用零点定理证明方程 $x^3-3x^2-x+3=0$ 在区间 $(-2,0)$, $(0,2)$, $(2,4)$ 内各有一个实根.

证明 设 $f(x)=x^3-3x^2-x+3$,则 $f(-2)<0$, $f(0)>0$, $f(2)<0$, $f(4)>0$. 由零点定理知,存在 $\xi_1\in(-2,0)$, $\xi_2\in(0,2)$, $\xi_3\in(2,4)$,使 $f(\xi_1)=0$, $f(\xi_2)=0$, $f(\xi_3)=0$. 所以 ξ_1, ξ_2, ξ_3 是方程 $x^3-3x^2-x+3=0$ 的实根.

12. 函数的间断点及其类型的判断

解题思路 确定函数间断点及其类型的步骤:

(1) 确定函数 $f(x)$ 的定义域,如果在 $x=x_0$ 函数无定义,则 $x=x_0$ 为函数的一个间断点;如果在 $x=x_0$ 函数有定义,再按下一步进行检验.

(2) 如果 $x=x_0$ 是初等函数定义区间内的点,则 x_0 为 $f(x)$ 的连续点;否则检查极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 是否存在,如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在,则 x_0 为 $f(x)$ 的间断点,如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在,再按下一步进行检验.

(3) 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$,则 x_0 为 $f(x)$ 的连续点,否则为间断点. 最后,根据函数间断点分类定义,判断其类型.

例 1 指出下列函数的间断点的类型:

$$(1)\ f(x)=\frac{x^2-1}{x^2-3x+2};\ (2)\ f(x)=\frac{\tan 2x}{x};\ (3)\ f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, & x<0, \\ 1, & x=0, \\ x, & x>0. \end{cases}$$

解 (1) 因为

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x-2}=-2$$

令 $f(1)=-2$,则 $f(x)$ 就在 $x=1$ 处连续了. $x=1$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点,并且为可去间断点. 又因为

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+1}{x-2}=\infty$$

所以 $x=2$ 为 $f(x)$ 的第二类间断点，并且为无穷间断点.

（2）因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\ \frac{\tan 2x}{2x}=\frac{1}{2}$$

令 $f(0)=\frac{1}{2}$，则 $f(x)$ 就在 $x=0$ 处连续了，所以 $x=0$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点，并且为可去间断点.

又因为 $\lim\limits_{x\to\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}}\frac{\tan 2x}{x}=\infty$，所以 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$ 为 $f(x)$ 的第二类间断点，并且为无穷间断点.

（3）因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=0$，$\lim\limits_{x\to 0^+}x=0$，令 $f(0)=0$，则 $f(x)$ 就在 $x=0$ 处连续了，所以 $x=0$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点，并且为可去间断点.

例2 设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos x}{x+2}, & x\geqslant 0\\ \dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{a-x}}{x}, & x<0(a>0)\end{cases}$$

问当 a 为何值时，$x=0$ 是 $f(x)$ 的间断点？是什么类型的间断点？

解

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a-x}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{a-x})(\sqrt{a}+\sqrt{a-x})}{x(\sqrt{a}+\sqrt{a-x})}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{x(\sqrt{a}+\sqrt{a-x})}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a-x}}=\frac{1}{2\sqrt{a}}$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x}{x+2}=\frac{1}{2}$$

并且 $f(0)=\frac{1}{2}$

当 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$，即 $\frac{1}{2}\neq\frac{1}{2\sqrt{a}}$，亦即 $a\neq 1$ 时，$x=0$ 是 $f(x)$ 的间断点，由于 a 为大于0的实数，故 $f(0^-)$ 与 $f(0^+)$ 均存在，只是 $f(0^-)\neq f(0^+)$，故 $x=0$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点，并且为跳跃间断点.

1.3 解题常见错误剖析

例1 若 $f(x)=\frac{1}{x}$，求 $f[f(x)]$.

常见错误 $f[f(x)]=\dfrac{1}{\frac{1}{x}}=x$.

错误分析 因为 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的定义域为 $x\neq 0$，所以 $f[f(x)]=\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{\frac{1}{x}}=x$ 中必须是自