高等学校经济管理学科数学基础课程教材

线性代数

胡显佑　编著

中国商业出版社

高等学校经济管理学科数学基础课程教材

线 性 代 数

胡显佑 编著

中国商业出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/胡显佑编著. —北京:中国商业出版社,2006.4
ISBN 7-5044-5619-5

Ⅰ. 线…　Ⅱ. 胡…　Ⅲ. 线性代数—高等学校—教材　Ⅳ. O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 030018 号

责任编辑:常　勇

中国商业出版社出版发行
(100053　北京广安门内报国寺 1 号)
新华书店总店北京发行所经销
北京柯蓝博泰印务有限公司印制
*
787×960 毫米　16 开　16 印张　300 千字
2006 年 5 月第 1 版　2006 年 5 月第 1 次印刷
定价:20.80 元
* * * *
(如有印装质量问题可更换)

前　言

本教材是根据教育部颁布的财经类专业核心课程《经济数学基础》教学大纲和 2005 年颁布的《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》的内容和要求编写的. 适合各高等院校经济管理类专业的数学基础课《线性代数》的教学使用.

在编写过程中,我们力求教材的内容、体系符合我国高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革的总体目标,体现"厚基础、宽口径、高素质"人才的要求,同时也注意适应高校扩招后目前的教学实际水平,兼顾许多同学报考硕士研究生的要求. 在教材体系、内容和例题的选择等方面吸取了国内外优秀教材的优点,也汇集了自己的教学经验.

本教材具有以下特点:

1. 本教材体例适当,行文严谨,用语准确,解析详细. 在引入概念时,尽可能从实际问题出发,以学生易于接受的方式叙述. 对于教材中某些非重点内容过于繁长的定理证明则予以略去,而增加例子予以说明,突出有关定理、法则的应用. 但是,重要定理的证明均予以保留. 个别较冗长的证明标有" * "号,可根据教学实际情况处理,略去不讲,不会影响教材的系统性. 便于不同要求的院校和专业使用.

2. 教材内容的广度和深度合理. 既考虑到本课程的基本要求,也照顾到将报考硕士研究生的学生的需要. 教材中的重点内容均配置了较多的例题,难度合理. 每章的习题均分为(A),(B)两组. (A)组习题反映了本科《线性代数》教学的基本要求,(B)组习题中的填空题、选择题可用于该章的复习、总结,而其中的解答题可供有志报考研究生的同学练习.

3. 为了使学生了解线性代数在经济管理领域中的应用,教材中介绍了几个重要的经济应用模型. 这些内容均标有" * "号,可供有关专业在教学中选用或供学生阅读.

4. 在同学可理解的范围内介绍了有关数学概念和理论发展的历史,同时介绍了有关数学家的事迹和学术成就,以提高学习兴趣,有助于培养学生树立正确的历史观.

尽管编写过程中,我们力图体现上述特点,但限于水平,书中的错误及不足之处在所难免,敬请读者不吝赐教.

编　者

2006 年 3 月

使用说明

1. 本教材的内容涵盖了经济管理类专业《线性代数》课程教学基本要求的全部内容，涵盖了经济管理类专业硕士研究生入学考试的考试要求. 适合全日制本科有关专业使用.

2. 线性代数课程概念、定理多且抽象，逻辑严密，方法灵活，综合性强. 学生初学似觉容易，然后就会感觉抽象难懂，不易掌握. 建议在每章结束后或在一定教学阶段增设习题课，及时总结有关概念、定理和方法.

3. 本教材所需学时约为 45—57 学时. 学时分配建议如下表：

章	课程内容	教学时数	习题课时数
一	行列式	7	2
二	矩阵	8	2
三	线性方程组	12	4
四	矩阵的特征值和特征向量	10	2
五	二次型	8	2
合　计		45	12

4. 对于某些对数学要求较低的专业，可在教师指导下，略去部分定理的证明和教材第五章(二次型)，相应减少习题课. 本教材也适用于总学时为 36 学时的线性代数课程.

目　　录

第一章 行 列 式

行列式的概念来自线性方程组的求解问题，在中学代数中，为求解二元和三元线性方程组，引入了二阶和三阶行列式，本章将建立 n 阶行列式的理论，并讨论 n 阶行列式在求解 n 元线性方程组中的应用，行列式的理论在本书的以后各章中都有重要应用.

§1.1 n 阶行列式

1.1.1 二阶、三阶行列式

考虑含有两个未知量 x_1，x_2 的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

为了求得方程组(1.1)的解，可以利用加减消元法得到

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12} \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21} \end{cases}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，方程组(1.1)有唯一解：

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ x_2 = \dfrac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{cases} \tag{1.2}$$

为了便于记忆上述解的公式(1.2)，引入记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

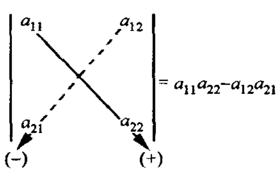

图 1-1

并称等式左边为二阶行列式. 二阶行列式的计算规则可根据图 1-1 来记忆，这称为二阶行列式的**对角线法则**.

利用二阶行列式的概念，(1.2)中的分母、分子可分别记为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

因此,当 $D\neq 0$ 时,方程组(1.1)的解可表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D}\qquad (\text{其中 } D\neq 0)$$

例 1 解二元线性方程组

$$\begin{cases}x_1-2x_2=3\\3x_1-4x_2=-2\end{cases}$$

解 由方程组中未知量的系数所构成的二阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&-2\\3&-4\end{vmatrix}=1\times(-4)-(-2)\times 3=2\neq 0$$

所以方程组有唯一解,又

$$D_1=\begin{vmatrix}3&-2\\-2&-4\end{vmatrix}=-16,\quad D_2=\begin{vmatrix}1&3\\3&-2\end{vmatrix}=-11$$

方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=-8,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=-\frac{11}{2}$$

对于三元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\end{cases}\tag{1.3}$$

可以得到类似的解法.为此,引进记号

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}\tag{1.4}$$

并称它为三阶行列式.行列式中的横排、纵排分别称为它的行和列.数 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$ 称为它的元素.三阶行列式所表示的代数和可以利用图 1-2 来记忆.图中,沿各实线相连的三个数的积取正号;沿各虚线相连的三个数的积取负号.它们的代数和就是(1.4)所表示的三阶行列式.这一计算方法也称为三阶行列式的对角线法则.

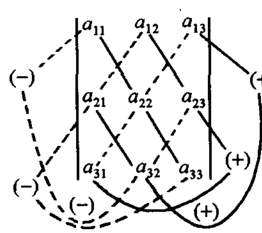

图 1-2

例 2 计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}2&-3&1\\4&1&-2\\5&1&3\end{vmatrix}$$

解 $D=2\times1\times3+(-3)\times(-2)\times5+1\times4\times1-1\times1\times5-2\times(-2)\times1-(-3)\times4\times3=75.$

利用加减消元法,可以得到方程组(1.3)的下述解法:若线性方程组(1.3)的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}\neq0$$

则方程组(1.3)有唯一解.如果记

$$D_1=\begin{vmatrix}b_1&a_{12}&a_{13}\\b_2&a_{22}&a_{23}\\b_3&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix}a_{11}&b_1&a_{13}\\a_{21}&b_2&a_{23}\\a_{31}&b_3&a_{33}\end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&b_1\\a_{21}&a_{22}&b_2\\a_{31}&a_{32}&b_3\end{vmatrix}$$

则方程组(1.3)的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}\tag{1.5}$$

不难看出,(1.5)中各式的分母D就是方程组(1.3)中各未知量的系数按原来顺序排列所构成的三阶行列式.一般称D为方程组(1.3)的系数行列式,而D_1则是把D的第一列换成常数项b_1,b_2,b_3,同时其余各列不变时所构成的三阶行列式.D_2,D_3也有类似的特点.

例3 解三元线性方程组

$$\begin{cases}x_1+3x_2+2x_3=17\\2x_1-4x_2-x_3=9\\3x_1-2x_2\qquad=25\end{cases}$$

解 方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&3&2\\2&-4&-1\\3&-2&0\end{vmatrix}=5\neq0$$

所以方程组有唯一解.由行列式

$$D_1=\begin{vmatrix}17&3&2\\9&-4&-1\\25&-2&0\end{vmatrix}=55,\quad D_2=\begin{vmatrix}1&17&2\\2&9&-1\\3&25&0\end{vmatrix}=20$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1&3&17\\2&-4&9\\3&-2&25\end{vmatrix}=-15$$

得方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=11,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=4,\quad x_3=\frac{D_3}{D}=-3$$

在实际问题中，遇到的线性方程组往往含有更多的未知量，在理论研究中需要讨论含有 n 个未知量的线性方程组的求解问题，我们希望可以得到二元和三元线性方程组的类似的求解方法. 因此，需引入 n 阶行列式的概念.

1.1.2 排列及其逆序数

n 阶行列式的概念，需要讨论排列的一些基本性质.

定义 1.1 由正整数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 称为一个 n **级排列**.

例如，3124 是一个四级排列；35124 是一个 5 级排列.

例 4 由正整数 1,2,3 可组成的三级排列共有 $3!=6$ 个. 它们是

$$123;\ 132;\ 213;\ 231;\ 312;\ 321$$

一般地，n 级排列的总数为 $n!$ 个.

定义 1.2 在一个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中，如果较大的数 i_s 排在较小的数 i_t 的前面，即 $i_s>i_t(t>s)$ 时，称这一对数 i_s、i_t 构成一个**逆序**. 一个排列中逆序的总数，称为它的**逆序数**，记为 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$. 如果排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数为偶数，则称它为**偶排列**. 如果该排列的逆序数为奇数，则称它为**奇排列**.

例 5 在四级排列 3241 中，构成逆序的数对有 32,31,21,41. 因此 $\tau(3241)=4$，即 3241 是偶排列.

在五级排列 45213 中，构成逆序的数对有 42,41,43,52,51,53,21. 因此 $\tau(45213)=7$，即 45213 是奇排列.

例 6 在 n 级排列 $12\cdots n$ 中，各个数是按照由小到大的自然顺序排列的，这一排列称为 n 元自然序排列. 由于其中任何一个数对都不构成逆序. 因此

$$\tau(1\ 2\cdots n)=0$$

逆序数为零的排列，我们规定它是偶排列.

例 7 n 级排列 $n(n-1)\cdots 2\ 1$ 的逆序数

$$\begin{aligned}\tau(n(n-1)\cdots 2\ 1)&=(n-1)+(n-2)+\cdots+1\\&=\frac{1}{2}n(n-1)\end{aligned}$$

所以，当 $n=4k$ 或 $4k+1$ 时，$n(n-1)\cdots 2\ 1$ 是偶排列；当 $n=4k+2$ 或 $4k+3$ 时，$n(n-1)\cdots 2\ 1$ 是奇排列.

在一个排列中，如果交换其中某两个数的位置，而其余各数位置不变，就得到另一个排列. 这样的变换称为一个**对换**.

例 8 在例 5 的五级排列 45213 中，经过 2,4 对换得到一个新的五级排列

25413. 容易计算 $\tau(25413)=6$，所以 25413 是一个偶排列.

由此看出，经过一次对换，排列改变了奇偶性. 一般，我们有下述结论：

定理 1.1　任意一个排列经过一次对换后，改变其奇偶性(证明略).

定理 1.2　在全部 n 级排列中($n\geqslant 2$)，奇偶排列各占一半(证明略).

例如，在例 4 中，123，231，312 是偶排列；132，213，321 是奇排列.

1.1.3　n 阶行列式

为了引入 n 阶行列式的概念，我们首先考察三阶行列式的定义. 三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

可以看出，三阶行列式是所有位于不同行、不同列的三个元素乘积的代数和，其中每一项都可以写成下述形式：

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3} \tag{1.6}$$

当这一项的行标成自然序排列时，其列标就构成三级排列($j_1j_2j_3$). 当($j_1j_2j_3$)为偶排列时，项(1.6)取正号；当($j_1j_2j_3$)为奇排列时，项(1.6)就取负号. 因此，项(1.6)前的符号是

$$(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}$$

这样的项的个数，恰好是所有三级排列的个数 $3!=6$ 个. 所以三阶行列式也可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\sum_{(j_1j_2j_3)}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

其中“$\sum\limits_{(j_1j_2j_3)}$”表示($j_1j_2j_3$)取遍所有的三级排列时，对形如 $(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 的项求和.

对于二阶行列式可以进行类似的分析，并且可以发现同样的规律. 因此，我们很自然地把二阶、三阶行列式的概念推广到 n 阶行列式.

定义 1.3　n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

是所有取自不同行、不同列的 n 个数乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.7}$$

的代数和，其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 构成一个 n 级排列. 当 $j_1j_2\cdots j_n$ 为偶排列时，项(1.7)取正号，当 $j_1j_2\cdots j_n$ 为奇排列时，项(1.7)取负号. 即 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1j_2\cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.8}$$

其中"$\sum\limits_{(j_1j_2\cdots j_n)}$"表示对所有的 n 级排列求和.

由于 n 级排列共有 $n!$ 个，所以(1.8)所表示的和共有 $n!$ 项. 特别是 $n=2$ 时，就得到二阶行列式；$n=3$ 时，就得到三阶行列式. 而一阶行列式就是 $|a_{11}|=a_{11}$.

为了方便起见，n 阶行列式中位于第 i 行、第 j 列的数 $a_{ij}(i,j=1,2\cdots,n)$称为 n 阶行列式的元素. 有时 n 阶行列式(1.8)就简记为 $|a_{ij}|$.

例 8　四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

所表示的代数和共有 $4!=24$ 项.

乘积 $a_{12}a_{24}a_{32}a_{41}$不是 D 中的一项，因为其中有两个元素 a_{12},a_{32}均取自第 2 列.

$a_{11}a_{24}a_{32}a_{43}$是 D 中取自不同行、不同列的四个元素的乘积，所以它是 D 的一项. 由于该项中各元素的行标已按自然序排列，该项的符号应由列标所构成排列的逆序数决定. 因为 $\tau(1423)=2$，这一项应取正号.

$a_{31}a_{24}a_{42}a_{13}$是 D 中取自不同行、不同列的四个元素的乘积，所以它是 D 的一项. 为决定这一项的符号，可将该项改写为 $a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}$，这时列标所构成排列的逆序数 $\tau(3412)=4$. 所以这一项应取正号.

例 9　试用行列式定义计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}$$

展开式中 x^4与 x^3 项的系数.

解　由于行列式 D 的展开式中的一般项为

$$(-1)^{\tau(j_1j_2j_3j_4)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$$

要出现 x^4 的项，则 a_{ij_i}均需取到含 x 的元素. 因此含 x^4 的项为

$$(-1)^{\tau(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}=10x^4$$

该项的系数为 10.

类似的分析可知，含 x^3 的项为

$$(-1)^{\tau(2134)}a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}=-2x^3$$

和

$$(-1)^{\tau(4231)}a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}=-3x^3$$

于是 D 中含 x^3 的系数为$(-2)+(-3)=-5$.

例 10 计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (a_{ii}\neq 0, i=1,2,\cdots,n) \tag{1.9}$$

解 根据行列式的定义

$$D=\sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

上面的和数中，只有当 $j_n=n, j_{n-1}=n-1,\cdots, j_2=2, j_1=1$ 时，乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 才不等于零. 因此

$$\begin{aligned} D&=(-1)^{\tau(1\,2\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \\ &=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \end{aligned}$$

在 n 阶行列式中，从左上角到右下角的对角线称为**主对角线**，主对角线上的各元素 $a_{11}, a_{22},\cdots, a_{nn}$称为**主对角元素**.

主对角线以下的元素全为 0 的行列式称为**上三角形行列式**. 由例 10 可知：上三角形行列式等于主对角线上元素的积.

主对角线以外的元素均为零的行列式，称为**对角形行列式**. 根据例 10，对角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

即对角形行列式等于主对角线上元素的积.

由于数的乘法满足交换律，所以行列式各项中 n 个元素的顺序也可以任意交换. 一般，我们可以证明

定理 1.3 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$的项可以写成

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n} \tag{1.10}$$

其中 $i_1i_2\cdots i_n$ 和 $j_1j_2\cdots j_n$ 都是 n 级排列(证明略).

例如，在例 8 中，四阶行列式的项 $a_{31}a_{24}a_{42}a_{13}$的符号为

$$(-1)^{\tau(3241)+\tau(1423)}=(-1)^{4+2}=1$$

特别是，当项(1.10)的列标按自然序排列时，这一项就是

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(1\,2\cdots n)}a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n}$$

由此立刻得到

推论　对于 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$，有

$$D=\sum_{(i_1i_2\cdots i_n)}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n}$$

§1.2　行列式的性质

当行列式的阶数较高时，利用定义计算行列式的计算量相当大，为了简化行列式的计算，需要研究行列式的性质，这些性质对行列式理论研究有重要意义，在数学的各分支中也有重要的应用.

1.2.1　行列式的性质

性质 1　将行列式的行、列互换，行列式的值不变(证明略). 即设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则 $D=D^{\mathrm{T}}$. 行列式 D^{T} 称为行列式 D 的**转置行列式**.

例如，在§1.1 的例 2 中，有

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}=75,\quad 则\ D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}=75$$

性质 1 说明行列式的行和列的地位是相同的. 也就是说，对于“行”成立的性质，对于“列”一定成立.

性质 2　互换行列式的两行(列)，行列式反号(证明略). 即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ (第\ i\ 行) \\ \\ (第\ s\ 行) \\ \\ \\ \end{array}$$

例如，在§1的例2中，有

$$D=\begin{vmatrix}2 & -3 & 1\\4 & 1 & -2\\5 & 1 & 3\end{vmatrix}=75,\quad 则\begin{vmatrix}4 & 1 & -2\\2 & -3 & 1\\5 & 1 & 3\end{vmatrix}=-D=-75$$

推论 如果行列式有两行(列)完全相同，则此行列式等于零.

证 交换此行列式 D 的这两行，有 $D=-D$. 于是 $D=0$.

性质 3 行列式某一行(列)的所有元素都乘以数 k，等于数 k 乘此行列式. 即

$$D_1=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=kD$$

或者说，行列式的某一行(列)的公因子可以提出到行列式外面.

证 根据行列式的定义，有

$$\begin{aligned}D_1&=\sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots(ka_{ij_i})\cdots a_{nj_n}\\&=k\sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}\\&=kD\end{aligned}$$

推论 1 如果行列式中有一行(列)的元素全为零，则此行列式的值为零.

推论 2 如果行列式有两行(列)的对应元素成比例，则此行列式的值等于零.

性质 4 如果行列式中某一行(列)的所有元素都是两个数的和，则此行列式等于两个行列式的和. 这两个行列式的这一行(列)的元素分别为对应的两个加数之一，其余各行(列)的元素与原行列式相同. 即如果

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则 $D=D_1+D_2$.

证 根据行列式的定义

$$\begin{aligned} D &= \sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots(b_{ij_i}+c_{ij_i})\cdots a_{nj_n} \\ &= \sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots b_{ij_i}\cdots a_{nj_n} \\ &\quad + \sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots c_{ij_i}\cdots a_{nj_n} \\ &= D_1+D_2 \end{aligned}$$

性质 5 把行列式的某一行(列)的所有元素乘以数 k 加到另一行(列)的相应元素上,行列式的值不变.即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ i\text{ 行}\times k \\ \\ s\text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1}+k\,a_{i1} & a_{s2}+k\,a_{i2} & \cdots & a_{sn}+k\,a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证 利用性质 4 和性质 3.