高职考试二轮复习用书

数学点金

（第三次修订）

Gaozhi
Kaoshi
Erlun
Fuxi
Yongshu

活页本

浙江科学技术出版社

前 言

《高职考试二轮复习用书数学点金(第三次修订)》是参照浙江省高等职业技术教育招生数学考试大纲编写的，供各类职业学校高职考试第二轮复习使用.内容包括试卷分析点金、专题知识点金、模拟试卷以及参考答案四部分,知识涵盖面得当,贴近考生实际需求.本书立意明确,特点鲜明,主要体现在以下几个方面：

一、参照考试大纲,在详细分析历年试卷的基础上,对数学第二轮复习的重点、难点和易错点进行重点分析,并配备适量的例题和习题.

二、分析高职考试的命题思路,包括试卷题型编写、题量、难度等,对模拟试卷进行反复推敲、优化设计,具有较强的针对性.

三、探索近几年高职考试的命题轨迹,使考生尽早地熟悉、掌握考试模式和解答方法. 这也是我们编写此书的初衷.

四、由于作者长期从事考前辅导,积累了丰富、宝贵的经验,因此本书的分析点金恰到好处,能使学生得到有益的考前指导.

为了提高本书的点金效果,在使用时宜注意:(一)仔细阅读“试卷分析点金”,从而对高职数学考试模式了然于胸;(二)理解“专题知识点金”的实质,掌握相关的答题思路和技巧;(三)在使用模拟试卷时,必须按照高职考试的要求,在规定的时间内完成;不要背题目答案,而应努力掌握相关知识. 倘若认真对待、精心使用,必能在第二轮的复习起到查漏补缺、深化提高、重点突破、提升能力的功效,真正起到点金的作用.

本书编写过程中疏漏之处在所难免,敬请专家、读者不吝赐教.

编者

2006 年 1 月

目　　录

一、试卷分析点金

(一)2005年浙江省高职考试数学试卷双向细目表

1. 2005年浙江省高职考试数学试卷双向细目表(见表1.1.1)

表1.1.1 双向细目表

题型 内容		选择题	填空题	解答题									总计
题号		1~15	16~21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	30
分值(分)		3×15	5×6	6	8	8	8	8	9	9	9	10	150
代数	一、集合	√											67分
	二、不等式		√	√									
	三、函数	√√√	√		√								
	四、平面向量	√											
	五、数列	√					√						
	六、排列、组合与二项式定理	√	√							√			
三角函数	一、三角函数及其有关概念	√											30分
	二、三角函数式的变换	√	√			√							
	三、三角函数的图像和性质	√											
	四、解三角形							√					
立体几何	一、直线和平面	√									√		15分
	二、多面体和旋转体	√											
解析几何	一、直线	√	√						√				38分
	二、圆锥曲线	√√	√									√	
总分													150分

2. 几点说明

(1)根据《浙江省2005年高等职业技术教育招生考试大纲(数学)》(以下简称考纲)要求,本试卷能较好地以人民教育出版社和高等教育出版社出版的中等职业学校数学教材为本,试题的80%源于教材(在教材中可以找到原型),20%的原创题立足于学生能力

的考核(例如第23、28题)以及应用数学解决实际问题的应用能力(例如第25题).

(2)各种比例关系。

认知层次比例——认识：理解：简单应用：综合应用=3：5：7：5.

难度层次比例——较易：中等难度：较难=2：2：1.

题型比例——单项选择题：填空题：解答题=3：2：5.

(3)试卷整体性强,覆盖面广,题目基本涵盖考纲的范围(详见表1.1.1),强调基础知识和基本技能的考核,不搞难题、偏题和怪题. 试卷不仅具有较好的区分度,而且梯度科学,通过考试可以把考生中优、中、劣的水平显示出来.

(4)从整个试卷看,可以说没有明显的难题(即所谓的把关题). 但是细加分析,不难发现2005年高职考试数学试卷命题者巧妙地将20%难题分散处理, 融入到各个知识点之中. 譬如:第20题(5分)、第28题(9分)和第30题的第2小题(6分). 这样的处理比较适合考生的心理特点,避免了考生轻易放弃所谓把关题的错误做法,也是今年高职考试数学试卷的一大亮点.

(5)通过对2003年、2004年、2005年的高职数学试卷命题走向的解读,可以得出以下三点,即:①基础为主;②注重能力;③略有创新.

(二)2005年浙江省高职考试数学试卷分析

1. 几点看法

(1)试卷注重基础,知识覆盖面广. 试卷注意了考纲所规定的基本内容和高职学习所需的基本知识,教学中许多典型的数学模型作了重点考查,如函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的周期是 $T=\frac{2\pi}{\omega}$,试卷中第6题、第18题都是这方面内容;第7题和第24题涉及 $\sin^2x+\cos^2x=1$ 这一数学模型. 同时,试卷结合了高职学习的需要,如第4题考查的是分段函数,而分段函数是学习高等教学的一个重要基础.

(2)试题具有较好的通变性. 试卷中有相当数量的试题直接取自于课本,或由历年高职考试数学试卷上的题目经过改编而成的,如平时有关均值定理的练习题往往是求最值,而试卷中第20题则要求填写均值定理的条件, 又如第21题与2004年高职考试数学试卷第21题形式一样. 这种设计对培养学生的辩证思维能力是有好处的.

(3)注重学生对数学概念的理解. 概念教学是数学教学的重点和难点,试卷中第14题、第28题、第29题对学生理解数学概念提出了要求,有不少学生做错的原因就是因为概念不清.

(4)设置合理的梯度,激发不同层次学生的兴趣. 一般地说解答题具有较强的综合性,知识跨度较大,计算较复杂,不少学生望而生畏,没有耐心做下去. 2005年高职考试数学试卷中,对这样的试题各设置了两个小题,如第25题、第30题中第(1)题比较容易,一般学生都能解答,而且第(1)题的结果对解决第(2)题是有帮助的. 这样设计对考生的应试心理和解题信心都有积极的引导作用.

(5)注重数学思想方法的考查. 能否辩证的运用数学思想方法、数学思维方式有效地解决数学问题,反映了考生数学思维素质的高低. 如:第 21 题、第 30 题考查数形结合的思想,第 15、27 题考查配方的方法.

(6)试卷整体难度比 2004 年略有下降. 2005 年高职考试数学试卷中没有开放题,实际应用的问题也没有,但仍有少量试题有一定的综合性,如第 25 题把数列和算术平均值有机的联系起来,使考生的思维活跃起来,跨越了不同的章节;又如第 16 题是通过单调性把求 k 值和求顶点两个问题结合起来,有一定难度,但这样的试题较少,使得学习水平高的考生很难显现出来.

2. 试卷的结构与分值

试卷的结构与分值见表 1.2.1. 表 1.2.1 和表 1.2.2 中以人民教育出版社出版的教材为例.

表 1.2.1 试卷的结构与分值

内容	代数	三角	立体几何	解析几何
试题分值	67 分	30 分	15 分	38 分
试题占分比值	44.7%	20%	10%	25.3%
考试大纲要求	45%	20%	10%	25%

注:向量归入代数.

从表 1.2.1 中可以看出, 试卷中四块内容占分值比例与考纲要求完全一致. 教材中各章节知识的试题分值与比例见表 1.2.2.

表 1.2.2 教材中各章节知识的试题分值与比例

章节	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一
分值	3	11	20	11	22	11	不考	38	15	19	不考
比例	2%	7.3%	13.3%	7.3%	14.7%	7.3%		25.3%	10%	12.7%	

注:表中第 23 题中 6 分归入第三章函数,2 分归入第十章.

从表 1.2.2 中可以看出,第八章解析几何试题占分值最高,其次是第五章三角函数,再次是函数,最少是第一章. 从整体结构上看与 2004 年的情况基本相同.

二、专题知识点金

(一)集合与数理逻辑用语知识点金

【知识要点】

集合与数理逻辑是高中数学的基础知识，贯穿于初等数学的始终. 集合的知识是一种严谨的数学语言，逻辑性强，在复习时要注重对概念的理解以及知识的转化和运用. 要掌握集合中元素的性质，弄清元素与集合、集合与集合的关系，能熟练进行集合的交、并、补等基本运算. 在运算时要重视数轴和图像的作用，通过数形结合直观地解决实际问题. 空集 $\varnothing$ 是一个特殊的集合，它是任何集合的子集，在解题时要注意对空集的讨论. 对于含有参数的集合问题应对所得结果进行检验.

要理解命题的概念以及逻辑联结词"且"、"或"、"非"的含义，要会判断一个复合命题的构成形式和它的真假，对条件的充分性和必要性要善于判断.

【解题指津】

例 1　已知 $A=\{a,a+d,a+2d\}$，$B=\{a,aq,aq^2\}$，若 $A=B$，求 q 的值.

解　根据集合元素的无序性，可得 $\begin{cases}a+d=aq,\\a+2d=aq^2,\end{cases}$ ① 或 $\begin{cases}a+d=aq^2,\\a+2d=aq.\end{cases}$ ②

由①可解得 $q=1$，但此时违背了集合 B 中元素的互异性，故舍去；由②可解得 $q_1=1$（舍去），$q_2=-\dfrac{1}{2}$. 检验得 $q=-\dfrac{1}{2}$.

点评　此题涉及集合中元素的惟一性、无序性、互异性，因而对于求集合中参数值的问题，必须进行检验.

例 2　若集合 $A=\{x\mid x^2+ax+4=0\}$，$B=\{1,4\}$，且 $A\subseteq B$，求实数 a.

解　因 $A\subseteq B=\{1,4\}$，而集合 B 共有 4 个子集，即 $\varnothing$，$\{1\}$，$\{4\}$，$\{1,4\}$，所以集合 $A=\{x\mid x^2+ax+4=0\}$ 只可能是其中之一.

①当 $A=\varnothing$，即方程 $x^2+ax+4=0$ 的判别式 $\Delta=a^2-4^2<0$，得 $|a|<4$.

②当 $A=\{1\}$，即方程 $x^2+ax+4=0$ 仅有一解 $x=1$，不可能.

③当 $A=\{4\}$，即方程 $x^2+ax+4=0$ 仅有一解 $x=4$，不可能.

④当 $A=\{1,4\}$，即方程 $x^2+ax+4=0$ 有两根 $x_1=1$，$x_2=4$，得 $a=-5$.

综上所述即得 $a=-5$ 或 $-4<a<4$.

例 3 设集合 $P=\{x\mid x^2-4x-5<0\}$，$Q=\{x\mid x-a\leqslant 0\}$.

(1)若 $P\cap Q=\varnothing$，求实数 a 的取值范围.

(2)若 $P\subsetneqq Q$，求实数 a 的取值范围.

解 $\because$ $P=\{x\mid -1<x<5\}$，$Q=\{x\mid x\leqslant a\}$.

$\therefore$ (1)如图 2.1.1 所示，$P\cap Q=\varnothing$ 成立，因此，当 $a\leqslant -1$ 时，$P\cap Q=\varnothing$.

图 2.1.1

(2)如图 2.1.2 所示，$P\subsetneqq Q$ 成立. 因此，当 $a\geqslant 5$ 时，$P\subsetneqq Q$.

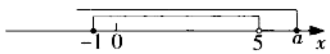

图 2.1.2

点评 用图示的方法(图像法)将关系 $P\cap Q=\varnothing$ 和 $P\subsetneqq Q$ 表示出来，特别要注意“交点”处能否取等号.

例 4 已知 $M=\{(x,y)\mid y^2=2x\}$，$N=\{(x,y)\mid (x-a)^2+y^2=9\}$，求 $M\cap N\neq\varnothing$ 的充要条件.

解 因为 $M\cap N\neq\varnothing$ 的充要条件是方程组 $\begin{cases}y^2=2x,\\(x-a)^2+y^2=9\end{cases}$ 至少有一组实数解. 即方程 $(x-a)^2+2x-9=0$ 至少有一个非负根. 由 $\Delta\geqslant 0$ 得 $a\leqslant 5$；又因为上述方程有两个负根的充要条件是 $x_1+x_2<0$ 且 $x_1\cdot x_2>0$，即 $-2(1-a)<0$ 且 $a^2-9>0$，解得 $a<-3$，也就是说 $a\geqslant -3$ 是上述方程没有两个负根的充要条件.

综上所述，即得 $M\cap N\neq\varnothing$ 的充要条件是 $-3\leqslant a\leqslant 5$.

点评 本题从正面求 $M\cap N\neq\varnothing$ 的充要条件的难度较大，可转化为方程的等价命题，并采用补集的思想加以解决.

例 5 判断下列命题的真假，对其中的真命题分别用充分条件、必要条件的语言来叙述.

(1)如果 $x=3$，那么 $|x|=3$；

(2)如果 $a=0$，那么 $ab=0$；

(3)如果两条直线平行，那么内错角相等；

(4)如果 $x<-2$，那么 $x>5$.

解 (1)因为当“$x=3$”为真时，“$|x|=3$”也为真，故复合命题为真. 因此，“$x=3$”是“$|x|=3$”的充分条件，“$|x|=3$”是“$x=3$”的必要条件.

(2)因为当“$a=0$”为真时，“$ab=0$”也为真，故复合命题为真，因此，“$a=0$”是“$ab=0$”的充分条件，“$ab=0$”是“$a=0$”的必要条件.

(3)因为当“两条直线平行”为真时，“内错角相等”也为真，故复合命题为真，因此“两条直线平行”是“内错角相等”的充分条件，“内错角相等”是“两条直线平行”的必要条件.

(4)由于当“$x=-3$”时,命题“$x<-2$”为真,但“$x>5$”为假,故复合命题为假命题.

【练习点金】

1. 已知集合 $S=\{x\mid x\leqslant 2\sqrt{5}\}$,又$a=3\sqrt{2}$,则(　　)

A. $\{a\}\in S$　　B. $a\notin S$　　C. $a\subsetneqq S$　　D. $\{a\}\subsetneqq S$

2. 同时满足$\{1\}\subsetneqq A\subseteq\{1,2,3,4,5\}$,且 A 中所有元素之和为奇数的集合 A 的个数是(　　)

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8

3. 若集合 $M=\{(x,y)\mid x+y=2\}$,$N=\{(x,y)\mid x-y=4\}$,那么集合$M\cap N$ 为(　　)

A. $x=3,y=-1$　　B.$(3,-1)$　　C. $\{3,-1\}$　　D. $\{(3,-1)\}$

4. 由实数 $x,-x,|x|,\sqrt{|x|^2},(\sqrt{x^2})^2,-\sqrt[3]{x^3}$ 所组成的集合,最多含有(　　)

A. 2 个元素　　B. 3 个元素　　C. 4 个元素　　D. 5 个元素

5. 设 I 为全集,集合 P、Q 满足条件 $P\subsetneqq Q$,则下面结论错误的是(　　)

A. $P\cup Q=Q$　　B. $\complement_I P\cup Q=I$　　C. $P\cap\complement_I Q=\varnothing$　　D. $\complement_I P\cap\complement_I Q=\complement_I P$

6. 集合 A 中有 m 个元素,若在 A 中增加一个元素,则它的子集个数将增加________个.

7. 设集合 $A=\{1,3,x\}$,$B=\{x^2,1\}$,且 $A\cup B=\{1,3,x\}$,则实数 x 的集合是___.

8. 已知函数$f(x)=x^2+ax+b$,$A=\{x\mid f(x)=2x\}=\{2\}$. 试求 a,b 的值.

9. 设 $S=\{x\mid x^2+(p+2)x+1=0,x\in\mathbf{R}\}$,若 $S\cap\mathbf{R}^+=\varnothing$,求实数 p 的取值范围.

10. 若 $a,b\in\mathbf{R}$,命题 $p:a-b=0$,$q:a^3-b^3=0$,则命题 p 是 q 的________条件,若命题 $m:a-b=0$,$n:a^2-b^2=0$,则命题 m 是 n 的________条件.

(二)不等式知识点金

【知识要点】

不等式的性质和两个重要不等式(即:①对 $\forall\ a,b\in\mathbf{R}$,有 $a^2+b^2\geqslant 2ab$;②对 $\forall\ a,b\in\mathbf{R}^+$,有 $\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$,当且仅当 $a=b$ 时,取"=")是不等式的讨论以及解不等式的基础. 要特别注意不等式与等式的区别. 利用重要不等式②(即均值定理),可以求两个正数和(或积)的最小(最大值):若两正数的积是定值,则当这两个正数相等时它们的和有最小值(若两正数的和是定值,则当这两个正数相等时它们的积有最大值).

作差比较法是比较两数(或式)大小最有效的方法. 对于一些常见的不等式(或不等式组)要求熟练掌握其解法(包括一元一次不等式,一元二次不等式(组),分式不等式,绝对值不等式,简单的指数、对数及三角不等式). 要注意函数的单调性和函数的定义域,以及不等式在实际问题中的应用,对含有参数的不等式要求能正确地进行分类讨论(既不重复又不遗漏).

【解题指津】

例 1 若 $x<y<0$,试比较 $(x^2+y^2)(x-y)$ 与 $(x^2-y^2)(x+y)$ 的大小.

解 用作差比较法 $(x^2+y^2)(x-y)-(x^2-y^2)(x+y)$

$$=(x-y)[(x^2+y^2)-(x+y)^2]$$

$$=(x-y)(-2xy).$$

$\because$ $x<y<0$, 则 $x-y<0$, $-2xy<0$,

$\therefore$ $(x^2+y^2)(x-y)-(x^2-y^2)(x+y)>0$,

故 $(x^2+y^2)(x-y)>(x^2-y^2)(x+y)$.

例 2 已知 $f(x)=ax^2-c$ 满足 $-4\leqslant f(1)\leqslant -1$, $-1\leqslant f(2)\leqslant 5$,求 $f(3)$ 的取值范围.

解 $\because$ $f(1)=a-c$, $f(2)=4a-c$, $f(3)=9a-c$,

令 $f(3)=mf(1)+nf(2)$, 即 $9a-c=m(a-c)+n(4a-c)$,

得 $\begin{cases}9=m+4n,\\-1=-m-n,\end{cases}$ 解方程组得 $\begin{cases}m=-\dfrac{5}{3},\\n=\dfrac{8}{3},\end{cases}$

$\therefore$ $f(3)=-\dfrac{5}{3}f(1)+\dfrac{8}{3}f(2)$, 根据条件 $-4\leqslant f(1)\leqslant -1$, $-1\leqslant f(2)\leqslant 5$, 可得 $(-4)\times\left(-\dfrac{5}{3}\right)+5\times\dfrac{8}{3}\geqslant -\dfrac{5}{3}f(1)+\dfrac{8}{3}f(2)\geqslant(-1)\times\left(-\dfrac{5}{3}\right)+(-1)\times\dfrac{8}{3}$,

故 $-1\leqslant f(3)\leqslant 20$.

点评 用待定系数法将 $f(3)$ 化为 $f(1)$ 与 $f(2)$ 的代数和的形式,再利用不等式的性质及已知条件.

例 3　若不等式$\dfrac{x^2-8x+20}{mx^2+2(m+1)x+9m+4}<0$ 的解集为 $\mathbf{R}$,试讨论实数 m 的取值范围.

解　可以从不等式有实数解入手进行讨论，$\because$ $x^2-8x+20=(x-4)^2+4>0$ 恒成立，

$\therefore$ 原不等式等价于 $mx^2+2(m+1)x+9m+4<0$ 恒成立,只需$\begin{cases}m<0,\\ \Delta<0,\end{cases}$

即$\begin{cases}m<0,\\ \Delta=4(m+1)^2-4m(9m+4)<0,\end{cases}$ 解此不等式组可得 $m\in\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)$.

例 4　已知关于 x 的不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为$\{x\mid\alpha<x<\beta\}$，其中$0<\alpha<\beta$,求 $cx^2+bx+a>0$ 的解集.

解　$\because$ α、β 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根,且 $a<0$,

$\therefore$ $cx^2+bx+a>0$ 同解变形为$\dfrac{c}{a}x^2+\dfrac{b}{a}x+1<0$.

由韦达定理有 $\alpha\beta x^2+(-\alpha-\beta)x+1<0$,

即 $\alpha\beta\left(x-\dfrac{1}{\alpha}\right)\left(x-\dfrac{1}{\beta}\right)<0$,

$\therefore$ 不等式 $cx^2+bx+a>0$ 的解集为$\left\{x\,\middle|\,\dfrac{1}{\beta}<x<\dfrac{1}{\alpha}\right\}$.

例 5　解绝对值不等式$|x^2-4|\leqslant x+2$.

解　原不等式可化为等价不等式$-(x+2)\leqslant x^2-4\leqslant x+2$,

可得等价不等式组$\begin{cases}x^2-4\leqslant x+2,\\ x^2-4\geqslant -x-2.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x\leqslant -2 \text{ 或 } x\geqslant 1,\\ -2\leqslant x\leqslant 3.\end{cases}$

如图 2.2.1 所示：

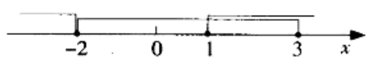

图 2.2.1

故原不等式的解集为$\{x\mid x=-2 \text{ 或 } 1\leqslant x\leqslant 3\}$.

【练习点金】

1. 已知 $a>b>c$，且 $a+b+c=0$，下列不等式中，恒成立的是(　　)

A. $a^2>b^2>c^2$　　B. $a|b|>c|b|$　　C. $ac>bc$　　D. $ab>ac$

2. 设命题甲：x 和 y 满足$\begin{cases}2<x+y<4,\\ 0<xy<3.\end{cases}$，命题乙：$x$ 和 y 满足$\begin{cases}0<x<1,\\ 2<y<3.\end{cases}$,那么甲是乙的(　　)

A. 充分且必要条件　　B. 必要且不充分条件

C. 充分且必要条件　　D. 既不充分又不必要条件

3. 设 $a,b,c,d,m,n\in\mathbf{R}^+$，且 $P=\sqrt{ab}+\sqrt{cd}$，$Q=\sqrt{ma+nc}\cdot\sqrt{\dfrac{b}{m}+\dfrac{d}{n}}$，则有(　　)

A. $P \geqslant Q$ B. $P \leqslant Q$ C. $P > Q$ D. $P < Q$

4. 下列不等式中与$\frac{x-4}{3-x} \geqslant 0$同解的是(   )

A. $(x-4)(3-x) \geqslant 0$

B. $\frac{3-x}{x-4} \geqslant 0$

C. $\lg(x-3) \leqslant 0$

D. $(x-4)(3-x) > 0$

5. 若 $M=\{x \mid |1-x|<2\}$, $N=\left\{x \mid \frac{x-2}{x}>0\right\}$,则$M \cap N=$(   )

A. $\{x \mid -1<x<3\}$

B. $\{x \mid x<0$ 或 $x>2\}$

C. $\{x \mid -1<x<0\}$

D. $\{x \mid -1<x<0$ 或 $1<x<3\}$

6. 若不等式 $x^2+px+q<0$ 的解集是$\{x \mid 1<x<2\}$,则不等式$\frac{x^2+px+q}{x^2-5x-6}>0$ 的解集是________.

7. 若$0<a<1$, $0<b<1$ 且 $a \neq b$, 则 $a+b$, $2\sqrt{ab}$, a^2+b^2, $2ab$ 四个数中最大的是________.

8. 不等式$\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-8}>3^{-2x}$的解集是________.

9. 建造一个容积为 $8m^3$，深为 2m 的长方体无盖水池，如果池底和池壁的造价分别为 120 元/m^2,80 元/m^2,那么水池的最低总造价为________.

10. 若 $\log_m 2<\log_n 2<0$,则数实m 、n 的取值范围及大小关系是________.

11. 解对数不等式$\lg(x^2+2x+2)<1$.

12. 若正数 a,b 满足条件$ab=a+b+3$,求 ab 的取值范围.

13. 设二次函数$f(x)=(a^2+4a-5)x^2-4(a-1)x+3$ 的图像在 x 轴的上方,求实数 a 的取值范围.

14. 实数 m 在什么范围时,方程 $x^2+(m-3)x+m=0$ 的两根满足:

(1)都是正数;

(2)都在$(0,2)$内.

15. 如图 2.2.2 所示，直线 l 过点 $M(2,1)$，且分别交 x,y 轴的正半轴于点A、B；点 O 为坐标原点，试求 ΔABO 面积最小时直线l 的方程.

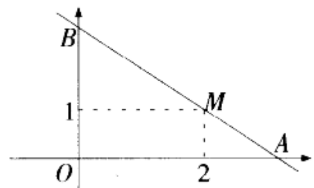

图 2.2.2

(三)函数知识点金

【知识要点】

函数是高中最重要、最基础的内容. 函数的定义域、值域和函数的对应法则是构成一个函数的三个要素. 两个函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 当且仅当它们的定义域和对应法则都相等时，才被认为是相同的函数，要求掌握求常见函数的定义域和简单函数的值域的基本方法.

要求理解函数单调性的概念，了解增函数、减函数的图像特征. 对于一次函数、二次函数以及简单的分式函数、根式函数、分段函数能利用数形结合的思维方式解决问题，充分地利用函数图像，讨论其特征. 尤其对一元二次函数要求能联系实际问题建立函数模型，根据函数特点会求经济类函数的最大、最小值问题.

指数函数与对数函数作为指数运算与对数运算的推广现已成为高中研究的重点函数之一，其定义域、值域、单调性等性质要结合函数的图像予以深刻理解，有效地掌握. 能利用指数函数与对数函数的性质，进行大小比较，并解决其简单复合函数的定义域、值域与单调性等综合问题. 要充分注意底数的范围变化对函数性质的影响，以免造成混淆，对于含有字母参数的问题，要会进行分类讨论.

函数知识的应用，体现在对函数、方程与不等式三者的综合讨论，解决一些向量、数列、三角函数、解析几何等问题，也体现在解决一类有实际背景和实际意义的应用题. 所以说，利用对函数的讨论以解决实际应用问题的数学应用能力的培养将越来越被重视，需要认真研究.

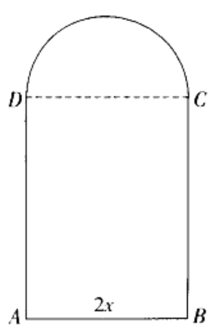

图 2.3.1

【解题指津】

例 1　如图 2.3.1 所示，用长为 l 的铁丝弯成下部为矩形，上部为半圆形的框架. 若矩形底边长为 $2x$，求此框架围成的面积 y 与 x 的函数解析式，并求出此函数的定义域.

解　$\because\ y=S_{\square ABCD}+\frac{1}{2}S_{圆}=2x\left(\frac{l-2x-x\pi}{2}\right)+\frac{1}{2}\pi x^2$

$$=-\left(2+\frac{\pi}{2}\right)x^2+lx,$$

即所求函数解析式为 $y=-\left(2+\frac{\pi}{2}\right)x^2+lx$.

根据条件$\begin{cases}2x>0,\\ \dfrac{l-2x-x\pi}{2}>0,\end{cases}$ 解得 $x\quad\left(0,\dfrac{l}{\pi+2}\right)$,

故所求解析式及定义域为 $y=-\left(2+\frac{\pi}{2}\right)x^2+lx$, $x\quad\left(0,\dfrac{l}{\pi+2}\right)$.

例 2 已知函数$f(x)=\lg[(a^2-1)x^2+(a+1)x+1]$的定义域为$\mathbf{R}$,求实数 a 的取值范围.

解 由对数函数的定义及题设条件,须$(a^2-1)x^2+(a+1)x+1>0$ ①对任意 x 恒成立. ∵ 当 $a^2-1\neq0$ 时, 应有$\begin{cases}a^2-1>0\\ \Delta=(a+1)^2-4(a^2-1)<0\end{cases}$ 解得 $a<-1$ 或 $a>\dfrac{5}{3}$. 当 $a^2-1=0$ 时,若 $a=1$,则不等式① 为 $2x+1>0$,并非对任意 x 恒成立,与题设矛盾;若 $a=-1$,则不等式①为 $1>0$,对任意 x 恒成立.

综上所述,符合题意的 a 的集合为$(-\infty,-1]\cup\left(\dfrac{5}{3},+\infty\right)$.

点评 对于不等式①左边,首先易想到利用二次函数的图像,即抛物线开口向上,与 x 轴无交点,但应该注意 x^2 的系数含有参数,需对 $a^2-1=0$ 的情况予以讨论.

例 3 求下列各函数的最值:

(1)$y=4-\sqrt{3+2x-x^2}$;

(2)$y=2x+\sqrt{1-2x}$;

(3)$y=\dfrac{3x}{x^2+4}$.

解 (1)配方法. 由 $3+2x-x^2\geqslant0$ 得 $-1\leqslant x\leqslant3$.

∵ $y=4-\sqrt{3+2x-x^2}=4-\sqrt{-(x-1)^2+4}$,

∴ 当 $x=1$ 时,$y_{\min}=2$;当 $x=-1$ 或 3 时 $y_{\max}=4$.

(2)换元法. 令 $t=\sqrt{1-2x}$ $(t\geqslant0)$,则 $x=\dfrac{1-t^2}{2}$,

∴ $y=2x+\sqrt{1-2x}=1-t^2+t=-\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{5}{4}$,

∴ 当 $t=\dfrac{1}{2}$ 时,即 $x=\dfrac{3}{8}$ 时,$y_{\max}=\dfrac{5}{4}$,无最小值.

(3)方法一:判别式法. 由 $y=\dfrac{3x}{x^2+4}$ 得 $yx^2-3x+4y=0$,是 x 的二次方程,y 是系数,对此方程讨论之:

当 $y=0$ 时,$x=0$;

当 $y\neq 0$ 时，方程要有解，须 $\Delta\geqslant 0$，即 $9-4\cdot y\cdot 4y\geqslant 0$，解得 $-\frac{3}{4}\leqslant y\leqslant\frac{3}{4}$，

故 $y_{min}=-\frac{3}{4}$，$y_{max}=\frac{3}{4}$.

方法二：不等式法. 当 $x=0$ 时 $y=0$.

当 $x\neq 0$ 时，$|y|=\frac{3}{\left|x+\frac{4}{x}\right|}=\frac{3}{|x|+\frac{4}{|x|}}\leqslant\frac{3}{2\sqrt{|x|\cdot\frac{4}{|x|}}}=\frac{3}{4}$，

故 $y_{min}=-\frac{3}{4}$，$y_{max}=\frac{3}{4}$.

点评　本题分别采用了配方法、换元法、判别式法、均值不等式法求最值，其多种技巧体现了灵活性，但方法的选取需根据函数解析式而定.

例 4　试求下列函数的值域：

(1) $y=4x^2+2x+\frac{18}{2x^2+x+1}$；

(2) $y=\frac{2x^2+4x-7}{x^2+2x+3}$；

(3) $y=\frac{\sin x}{2-\cos x}$.

解　(1) 观察即知 $4x^2+2x=2(2x^2+x+1)-2$，则利用换元法.

令 $2x^2+x+1=t$，配方得 $t=2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{8}\geqslant\frac{7}{8}>0$，

$\therefore\ y=2t-2+\frac{18}{t}=\left(2t+\frac{18}{t}\right)-2\geqslant 2\sqrt{2t\cdot\frac{18}{t}}-2=10$

当且仅当 $2t=\frac{18}{t}$，即 $t=3$ 时取"="，此时 $x=-\frac{1}{4}\pm\frac{\sqrt{17}}{4}$，对应的 $y_{max}=10$，

故原函数的值域为 $[10,+\infty)$.

(2) 观察函数式，可用判别式方法来解. 将原函数变形为：

$yx^2+2yx+3y=2x^2+4x-7$，即 $(y-2)x^2+2(y-2)x+(3y+7)=0$，

$\because\ y=\frac{2x^2+4x-7}{x^2+2x+3}=\frac{2(x^2+2x+3)-13}{x^2+2x+3}=2-\frac{13}{x^2+2x+3}$，

$\therefore\ y\neq 2$，故可将上面的方程视作关于 x 的二次方程.

又 $\because\ x\in\mathbf{R}$，即上述关于 x 的一元二次方程有实根，

$\therefore\ \Delta=[2(y-2)]^2-4\times(y-2)\times(3y+7)\geqslant 0$，

解此不等式得 $-\frac{9}{2}\leqslant y\leqslant 2$.

又 $\because\ y\neq 2$，$\therefore$ 函数的值域为 $\left[-\frac{9}{2},2\right)$.

(3) 方法一. 代数式变形为 $y(2-\cos x)=\sin x$，

即 $\sin x+y\cos x=2y$，$\sqrt{1+y^2}\sin(x+\varphi)=2y$，$\sin(x+\varphi)=\frac{2y}{\sqrt{1+y^2}}$.

$\because\ |\sin(x+\varphi)|\leqslant 1$， $\therefore\ \left|\dfrac{2y}{\sqrt{1+y^2}}\right|\leqslant 1$.

解此绝对值不等式，得 $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\leqslant y\leqslant\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

故函数的值域为 $\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$.

方法二. 原函数化为 $y=\dfrac{0-(-\sin x)}{2-\cos x}$，用解析几何知识知右边为点(2,0)与点($\cos x$，$-\sin x$)连线的斜率.

又 $\because$ 点($\cos x$，$-\sin x$)是圆 $x^2+y^2=1$ 上的动点. 如图 2.3.2 所示，设切线方程为 $y=kx+b$，

$\because$ 点(2,0)在切线上，可得 $b=-2k$，即切线方程为 $y=kx-2k$，

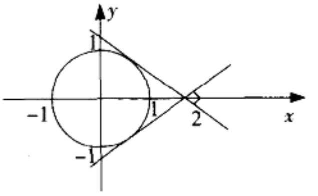

图 2.3.2

又 $\because$ 原点(0,0)到切线距离为 1，即 $1=\dfrac{|k\cdot 0-0-2k|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}$，

解方程 $\sqrt{k^2+1}=|2k|$，得 $k=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

由图 2.3.2 可知，无论点($\cos x$，$-\sin x$)如何变动，点(2,0)与点($\cos x$，$-\sin x$)连线斜率 $y\in\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$，

故函数的值域为 $\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$.

例 5 设 $a>0$ 且 $a\neq 1$，试求函数 $f(x)=\log_a(4+3x-x^2)$ 的单调区间.

解 易知函数 $f(x)=\log_a(4+3x-x^2)$ 的定义域为不等式 $4+3x-x^2>0$ 的解集，即 $-1<x<4$.

令 $M=4+3x-x^2=-\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{25}{4}$，则得 M 在 $\left(-1,\dfrac{3}{2}\right]$ 上单调递增，在 $\left[\dfrac{3}{2},4\right)$ 上单调递减.

根据对数函数特征有：

当 $0<a<1$ 时，函数 $f(x)=\log_a M$ 在 $\left(-1,\dfrac{3}{2}\right]$ 上单调递减，在 $\left[\dfrac{3}{2},4\right)$ 上单调递增.

当 $a>1$ 时，函数 $f(x)=\log_a M$ 在 $\left(-1,\dfrac{3}{2}\right]$ 上单调递增，在 $\left[\dfrac{3}{2},4\right)$ 上单调递减.

例 6 已知 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，且在其上为增函数，满足条件 $f(xy)=f(x)+f(y)$，$f(2)=1$，试解不等式 $f(x)+f(x-2)<3$.

解 此题的关键是求函数值 3 所对应的自变量值，即求等式 $f(a)=3$ 中 a 的值.

$\because\ f(4)=f(2\times 2)=f(2)+f(2)=2f(2)=2$，

又 $\because\ 3=2+1=f(4)+f(2)=f(4\times 2)=f(8)$，

即 $f(8)=3$，

$\therefore$ 不等式$f(x)+f(x-2)<3$可化为$f(x^2-2x)<f(8)$.

根据函数的定义域和单调性，有 $\begin{cases} x>0, \\ x-2>0, \\ x^2-2x>0, \\ x^2-2x<8, \end{cases}$ 解得 $2<x<4$，

故原不等式解集为$\{x\,|\,2<x<4\}$.

例 7 若二次函数$f(x)$同时满足条件：

(1)$f(0)=f(2)$；

(2)$f(x)$的最大值为 15；

(3)方程 $f(x)=0$的两根立方和等于 17，

求$f(x)$的解析式.

解 由条件$f(0)=f(2)$及二次函数抛物线的对称性知，$f(x)$的图像关于直线 $x=\dfrac{0+2}{2}=1$ 对称.

又 $\because$ $f(x)$的最大值为 15，则可设 $f(x)=a(x-1)^2+15$，其中 $a<0$，由条件(3)知方程 $f(x)=0$ 的两根 x_1、x_2. 有 $x_1^3+x_2^3=17$，

即根据韦达定理知方程 $ax^2-2ax+a+15=0$ 中有 $\begin{cases} x_1+x_2=2, \\ x_1\cdot x_2=1+\dfrac{15}{a}, \end{cases}$

故有 $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)=2-\dfrac{90}{a}=17$，

解得 $a=-6$，所以$f(x)=-6x^2+12x+9$.

例 8 已知：$\log_2 3=a$，$\log_3 7=b$，求$\log_{3\sqrt{7}}2\sqrt{21}$.

解 $\because$ $\log_{3\sqrt{7}}2\sqrt{21}=\dfrac{\lg 2\sqrt{21}}{\lg 3\sqrt{7}}=\dfrac{\lg 2+\dfrac{1}{2}(\lg 3+\lg 7)}{\lg 3+\dfrac{1}{2}\lg 7}$，

又 $\because$ $\left.\begin{array}{l} \log_2 3=a，即\ \lg 3=a\lg 2 \\ \log_3 7=b，即\ \lg 7=b\lg 3 \end{array}\right\}\Rightarrow \lg 7=ab\lg 2$，

$\therefore$ $\log_{3\sqrt{7}}2\sqrt{21}=\dfrac{\lg 2+\dfrac{1}{2}(a\lg 2+ab\lg 2)}{a\lg 2+\dfrac{1}{2}ab\lg 2}=\dfrac{1+\dfrac{1}{2}(a+ab)}{a+\dfrac{1}{2}ab}=\dfrac{ab+a+2}{ab+2a}$.

例 9 比较 $a=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$ 和 $b=\left(-\dfrac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$ 的大小.

解 $b=\left(-\dfrac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}}=\left(\dfrac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$. 注意到 a, b 均为指数$\dfrac{2}{3}$的幂. 考察幂指数 $y=x^{\frac{2}{3}}$.