运筹学
方法与模型

傅家良 主编

复旦大学出版社
www.fudanpress.com.cn

运筹学

方法与模型

傅家良 主编

李 枫 郝 勇 孙 焰 吴 晓 编著

復旦大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

运筹学方法与模型/傅家良主编. —上海:复旦大学出版社,
2006.1
ISBN 7-309-04865-2

Ⅰ. 运… Ⅱ. 傅… Ⅲ. 运筹学 Ⅳ. 022

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 158943 号

运筹学方法与模型
傅家良 主编

出版发行 复旦大学出版社 上海市国权路 579 号 邮编 200433
86-21-65642857(门市零售)
86-21-65118853(团体订购) 86-21-65109143(外埠邮购)
fupnet@fudanpress.com http://www.fudanpress.com

责任编辑 范仁梅
总 编 辑 高若海
出 品 人 贺圣遂

印　　刷 上海肖华印务有限公司
开　　本 787×1092 1/16
印　　张 30.75 插页 1
字　　数 748 千
版　　次 2006 年 1 月第一版第一次印刷
印　　数 1—6 000

书　　号 ISBN 7-309-04865-2/O·353
定　　价 45.00 元

本书告诉你

——建立数学模型是一种“艺术”！

内 容 简 介

本书介绍了运筹学中线性规划、目标规划、整数规划、网络规划、网络计划技术、动态规划、排队论、存储论、博弈论、决策分析和排序问题等分支的基本概念和方法，并把各种运筹学求解方法归纳成接近于程序语言的算法步骤.本书特别重视各个运筹学分支对数学模型的建立，配备了相当数量的应用例题，使读者充分理解建立数学模型是一种艺术.本书力求深入浅出，注重应用.每章结尾都配有一定数量的习题，部分习题还附有答案.

本书可作为大专院校交通运输管理类、经济管理类和理工类其他有关专业的本科生、研究生的教材或教学参考书，也可作为各类专业人员的自学参考书.

前 言

管理是一门科学.运筹学是用定量化的方法,对所研究的各类管理优化问题建立数学模型并进行求解,然后进行定量和定性分析,为决策者作出合理的决策提供科学的依据.

本书对运筹学各个组成分支都尽可能地以各种实际问题为背景,建立起各种类型的数学模型,然后通过对几何特征的分析或运用其他直观的手段,给出求解模型的算法思想,进而导出归纳成接近于程序语言的算法.

运筹学作为一门应用性的学科,在教学中除了让新学者掌握各个组成分支的计算方法之外,更重要的目标是帮助新学者学习和训练建立数学模型的技巧.但这个重要的目标却往往为国内许多《运筹学》的作者所忽视.本书编写了一定数量的富有建模技巧的典型应用实例,以培养读者建立数学模型的能力,并使读者深刻地理解用数学语言描述客观事物是一种“艺术”.

本书从读者认识事物、接受知识的规律出发,尽可能使各章内容深入浅出、重点突出,力求使读者感到运筹学是一门可亲可近而生动的应用性学科.本书对运筹学各个分支的基本概念、基本理论的系统性仍给予足够的重视,但又不偏于数学方法的严谨论证.

我这次非常高兴邀请了4位合作者参加了本书的编写,他们承担的任务具体如下(扉页署名以此先后为序):

第 四 章　目标规划　李枫(同济大学交通运输工程学院)

第 十 章　存储论　郝勇(上海工程技术大学)

第十一章　博弈论　孙焰(同济大学交通运输工程学院)

第十二章　决策分析　吴晓(浙江师范大学交通学院)

其余各章均由本人编写,并对全书进行了统稿和定稿,力求全书的风格统一.

我教授运筹学已经有数十年,这本《运筹学方法与模型》是我多年教学经验的结晶,在写作风格和内容处理上可能和其他《运筹学》著作有所不同.这次蒙复旦大学出版社范仁梅编辑的鼎力相助,使我多年的心愿得以实现.

本书部分章节打上了“*”,教学时可根据具体情况决定取舍.由于各章节配备的应用举例比较多,并且有些例子在建立模型时有一定的难度,要全部讲掉它们在学时上根本就不允许,所以也应该在教学时作一定的取舍.

在此,我向复旦大学统计运筹系魏国华教授、上海工程技术大学管理学院徐克绍教授、上海大学吕立生教授、第二工业大学唐国春教授、同济大学官世燊教授表示衷心的感谢.在我长期的教学工作中,我和他们一起交流心得体会,使我学到了许多宝贵的知识和经验.我更要感谢我以前母校西南交通大学的导师苗邦均教授、侯振挺教授、周贤祥教授对我的关心和指导,他们对教学工作和学生的热爱使我终生难忘.我也要感谢我在教学工作岗位上的老领导季令教授对我的长期关怀、支持和帮助,使我各方面的工作能够顺利地开展.我怀念曾经和我一起编写《实用运筹学》的合作者、复旦大学出版社的周仲良教授,他待人宽厚、工作认真,可惜他英年早逝,令人扼腕叹息.

在本书的编写过程中,上海工程技术大学管理学院张伯生教授、徐克绍教授对本书的内容及体系提出了许多宝贵的意见;该校城市轨道交通学院青年教师朱海燕帮助搜集资料供我参考,在此表示深切的感谢.

在成稿工作中,王永秋、朱亚男、傅亚丽给我提供了许多帮助,在此表示衷心感谢.

任何人在他人生的路途上都离不开老师、同事、朋友、领导、亲人的帮助和合作.对那些在我追求知识的道路上曾给我以深切关怀和无私帮助的老师、同事、朋友,我心里面永远保持着对他们的衷心感谢.珍贵的友谊,是人生最美好的回忆.

我希望这本别具风格的《运筹学方法与模型》教材能够得到读者的欢迎,更希望得到运筹学教学工作者的批评指正.

现在我们这些从20世纪70年代末、80年代初就开始从事运筹学教学工作的老教师,都逐渐退出了教学舞台,我们相信未来运筹学的教学工作将更加光辉灿烂.

本书可以作为高等院校交通运输管理类、经济管理类和理工类其他有关专业的本科生、研究生的教材,同时,编者也深盼本书能受到那些孜孜不倦、刻苦追求知识的自学者的欢迎.

由于本人和我的合作者水平有限,本书难免有不当之处,敬请读者批评指正.

傅家良 2005年9月

于同济大学交通运输工程学院

目 录

第一章 线性规划

第二章 线性规划的对偶理论与灵敏度分析

第三章 运输问题

第四章 目标规划

第五章 整 数 规 划

第六章 网 络 规 划

第七章 网络计划技术

第八章 动 态 规 划

第九章 排 队 论

第十章 存 储 论

第十一章 博 弈 论

第十二章 决 策 分 析

*第十三章 排 序 问 题

第一章 线性规划

§1.1 线性规划模型

1.1.1 数学模型

在经济建设、企业管理和生产实践的各项活动中，我们常常面临把有限的资源分配到若干活动上去的分配问题：

(1) 对有限的资金、材料、设备、场地、能源和劳动力等财力、物力和人力，如何以最佳方式作有效的分配，以期望获得最大的效益.

(2) 在既定的任务之下，如何统筹安排，以做到用最少量的财力、物力和人力来完成任务.

这些最优分配问题的数学模型在运筹学中处于中心的地位，而线性规划是解决这一类问题的一个理论和方法都比较成熟的运筹学分支. 下面我们来看两个实例.

例 1-1（生产计划问题） 某工厂生产 $1^{\#}$，$2^{\#}$ 和 $3^{\#}$ 三种产品，每种产品需经过 3 道工序. 每件产品在每道工序中的工时定额、每道工序在每周可利用的有效工时和每件产品的利润由表 1-1 给出. 问每种产品各生产多少，可使这一周内生产的产品所获利润最大？

表 1-1

定额(工时/件)		$j^{\#}$ 产品			每周可利用的有效工时
		$1^{\#}$	$2^{\#}$	$3^{\#}$	
工序	A	1.2	1.0	1.1	5 400
	B	0.7	0.9	0.6	2 800
	C	0.9	0.8	1.0	3 600
利润(元/件)		10	15	12	

解 本问题是要把有限的工时资源合理地分配到 3 种产品的生产活动上去，以期望获得最多的利润.

首先我们引进决策变量：设一周内 $j^{\#}$ 产品的生产件数为 $x_j(j=1, 2, 3)$.

然后，根据每件产品的工时定额以及各工序允许的有效工时列出约束条件：

$1^{\#}$ 产品每生产一件需 A 工序 1.2 工时，现生产 x_1 件，故 $1^{\#}$ 产品耗费 A 工序的工时数为 $1.2x_1$. 类似地，生产 $2^{\#}$ 产品和 $3^{\#}$ 产品耗费 A 工序的工时数分别为 $1.0x_2$ 和 $1.1x_3$，

所以 3 种产品对 A 工序的工时总需求量为

$$1.2x_1 + 1.0x_2 + 1.1x_3,$$

它不应超过 A 工序在一周内所允许的工作时间 5 400 工时. 于是,得工序 A 加工产品的约束条件:

$$1.2x_1 + 1.0x_2 + 1.1x_3 \leqslant 5\,400.$$

类似地,对工序 B 和 C 有以下约束条件:

$$0.7x_1 + 0.9x_2 + 0.6x_3 \leqslant 2\,800,$$
$$0.9x_1 + 0.8x_2 + 1.0x_3 \leqslant 3\,600.$$

再者,变量 x_1, x_2 和 x_3 只能取非负值,故有下列非负约束条件:

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_3 \geqslant 0.$$

最后,我们来确定产品生产的效益. 若用 f 表示工厂一周内生产 3 种产品所能获得的利润,则有

$$f = 10x_1 + 15x_2 + 12x_3,$$

现在工厂的目标是希望获得最大利润,我们写成:

$$\max f = 10x_1 + 15x_2 + 12x_3.$$

综上所述,我们得本问题的数学模型:

$$\begin{aligned} & \max f = 10x_1 + 15x_2 + 12x_3; \\ \text{s.t.}\quad & 1.2x_1 + 1.0x_2 + 1.1x_3 \leqslant 5\,400, \\ & 0.7x_1 + 0.9x_2 + 0.6x_3 \leqslant 2\,800, \\ & 0.9x_1 + 0.8x_2 + 1.0x_3 \leqslant 3\,600, \\ & x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

其中,s. t. 为英文“subject to”(受约束于)的缩写.

例 1-2 (运输问题) 两个发点 A_1 和 A_2 有物资必须运往 3 个收点 B_1, B_2 和 B_3. 发点 A_i 对物资的供应量 a_i、收点 B_j 对物资的需求情况和发点 A_i 至收点 B_j 每输送一吨物资所需的运输费用 c_{ij} 见表 1-2. 为完成发点 A_1 和 A_2 对物资的运输任务,问运输方案应如何确定,而使总运费最少?

表 1-2

运价 c_{ij}(元/吨)		收点 B_j			供应量 a_i(吨)
		B_1	B_2	B_3	
发点 A_i	A_1	20	10	30	60
	A_2	15	20	18	40
需求量 b_j(吨)		恰为 20	至多 30	至少 40	

解 本问题是在完成既定运输任务的条件下而希求花费最少的财力.

设 x_{ij} 为从发点 A_i 运送到收点 B_j 的物资数量.

由于发点 A_i 的 a_i 吨物资必须运走，因此，a_i 等于发点 A_i 运往各收点 B_j 的运量 x_{ij} 之和. 由此得约束条件：

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}=60,$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}=40.$$

注意到各收点 B_j 对物资的需求情况，我们有下列约束条件：

$$x_{11}+x_{21}=20,$$
$$x_{12}+x_{22}\leqslant 30,$$
$$x_{13}+x_{23}\geqslant 40.$$

自然，运量 x_{ij} 都应为非负变量：

$$x_{ij}\geqslant 0,\quad i=1,2;\quad j=1,2,3.$$

总运费为

$$f=20x_{11}+10x_{12}+30x_{13}+15x_{21}+20x_{22}+18x_{23},$$

我们对 f 求最小值. 故本问题归结为如下数学模型：

$$\begin{aligned} & \min f=20x_{11}+10x_{12}+30x_{13}+15x_{21}+20x_{22}+18x_{23}; \\ \text{s.t.}\quad & x_{11}+x_{12}+x_{13}=60, \\ & x_{21}+x_{22}+x_{23}=40, \\ & x_{11}+x_{21}=20, \\ & x_{12}+x_{22}\leqslant 30, \\ & x_{13}+x_{23}\geqslant 40, \\ & x_{ij}\geqslant 0,\quad i=1,2;\quad j=1,2,3. \end{aligned}$$

上述建立的两个数学模型，我们称之为**线性规划**. 可见，线性规划模型具有下列 3 个要素：

(1) **决策变量**. 这些决策变量的一组定值代表所给问题的一个具体方案. 一般来说，这些决策变量都是非负变量. 如果在模型中变量 x_j 的符号不受限制，即变量 x_j 取正值，取负值或取零都可以，我们把它写成条件 $x_j \gtrless 0$，并称 x_j 为**自由变量**.

(2) **约束条件**. 这些约束条件都为线性等式或线性不等式，它们反映了所给问题对资源的客观限制及对所要完成的任务的各类要求. 同时，对决策变量的符号要求也属于约束条件.

(3) **目标函数**. 它为决策变量的线性函数. 按所给问题的不同，可要求目标函数 f 实现最大值或最小值.

为此，线性规划模型的一般形式为

$$\begin{aligned} & \min f=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j \quad \left(\text{或} \max f=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j\right); \\ \text{s.t.}\quad & \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j \gtrless b_i,\quad i=1,\cdots,m, \\ & x_j\gtrless 0,\quad j=1,\cdots,n. \end{aligned} \tag{1-1}$$