

# 运筹学 方法与模型

傅家良 主编



復旦大學出版社

[www.fudanpress.com.cn](http://www.fudanpress.com.cn)

# 运筹学

## 方法与模型

傅家良 主编

李 枫 郝 勇 孙 焰 吴 晓 编著



復旦大學 出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

运筹学方法与模型/傅家良主编. —上海:复旦大学出版社,  
2006.1

ISBN 7-309-04865-2

I. 运… II. 傅… III. 运筹学 IV. 022

— 中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 158943 号

**运筹学方法与模型**

**傅家良 主编**

---

出版发行 **复旦大学出版社** 上海市国权路 579 号 邮编 200433  
86-21-65642857(门市零售)  
86-21-65118853(团体订购) 86-21-65109143(外埠邮购)  
fupnet@fudanpress.com <http://www.fudanpress.com>

---

**责任编辑** 范仁梅  
**总编辑** 高若海  
**出品人** 贺圣遂

---

**印 刷** 上海肖华印务有限公司  
**开 本** 787 × 1092 1/16  
**印 张** 30.75 插页 1  
**字 数** 748 千  
**版 次** 2006 年 1 月第一版第一次印刷  
**印 数** 1—6 000

---

**书 号** ISBN 7-309-04865-2/O · 353  
**定 价** 45.00 元

---

如有印装质量问题, 请向复旦大学出版社发行部调换。

版权所有 侵权必究

# 本书告诉你

——建立数学模型是一种“艺术”！

## 内 容 简 介

本书介绍了运筹学中线性规划、目标规划、整数规划、网络规划、网络计划技术、动态规划、排队论、存储论、博弈论、决策分析和排序问题等分支的基本概念和方法,并把各种运筹学求解方法归纳成接近于程序语言的算法步骤.本书特别重视各个运筹学分支对数学模型的建立,配备了相当数量的应用例题,使读者充分理解建立数学模型是一种艺术.本书力求深入浅出,注重应用.每章结尾都配有一定数量的习题,部分习题还附有答案.

本书可作为大专院校交通运输管理类、经济管理类和理工类其他有关专业的本科生、研究生的教材或教学参考书,也可作为各类专业人员的自学参考书.

# 前 言

管理是一门科学.运筹学是用定量化的方法,对所研究各类管理优化问题建立数学模型并进行求解,然后进行定量和定性分析,为决策者作出合理的决策提供科学的依据.

本书对运筹学各个组成分支都尽可能地以各种实际问题为背景,建立起各种类型的数学模型,然后通过对几何特征的分析或运用其他直观的手段,给出求解模型的算法思想,进而导出归纳成接近于程序语言的算法.

运筹学作为一门应用性的学科,在教学中除了让新学者掌握各个组成分支的计算方法之外,更重要的目标是帮助新学者学习和训练建立数学模型的技巧.但这个重要的目标却往往为国内许多《运筹学》的作者所忽视.本书编写了一定数量的富有建模技巧的典型应用实例,以培养读者建立数学模型的能力,并使读者深刻地理解用数学语言描述客观事物是一种“艺术”.

本书从读者认识事物、接受知识的规律出发,尽可能使各章内容深入浅出、重点突出,力求使读者感到运筹学是一门可亲可近而生动的应用性学科.本书对运筹学各个分支的基本概念、基本理论的系统性仍给予足够的重视,但又不偏于数学方法的严谨论证.

我这次非常高兴邀请了4位合作者参加了本书的编写,他们承担的任务具体如下(扉页署名以此先后为序):

第四章 目标规划 李枫(同济大学交通运输工程学院)

第十章 存储论 郝勇(上海工程技术大学)

第十一章 博弈论 孙焰(同济大学交通运输工程学院)

第十二章 决策分析 吴晓(浙江师范大学交通学院)

其余各章均由本人编写,并对全书进行了统稿和定稿,力求全书的风格统一.

我教授运筹学已经有数十年,这本《运筹学方法与模型》是我多年教学经验的结晶,在写作风格和内容处理上可能和其他《运筹学》著作有所不同.这次蒙复旦大学出版社范仁梅编辑的鼎力相助,使我多年的心愿得以实现.

本书部分章节打上了“\*”,教学时可根据具体情况决定取舍.由于各章节配备的应用举例比较多,并且有些例子在建立模型时有一定的难度,要全部讲掉它们在学时上根本就不允许,所以也应该在教学时作一定的取舍.

在此,我向复旦大学统计运筹系魏国华教授、上海工程技术大学管理学院徐克绍教授、上海大学吕立生教授、第二工业大学唐国春教授、同济大学官世燊教授表示衷心的感谢。在我长期的教学工作中,我和他们一起交流心得体会,使我学到了许多宝贵的知识和经验。我更要感谢我以前母校西南交通大学的导师苗邦均教授、侯振挺教授、周贤祥教授对我的关心和指导,他们对教学工作和学生的热爱使我终生难忘。我也要感谢我在教学工作岗位上的老领导季令教授对我的长期关怀、支持和帮助,使我各方面的工作能够顺利地展开。我怀念曾经和我一起编写《实用运筹学》的合作者、复旦大学出版社的周仲良教授,他待人宽厚、工作认真,可惜他英年早逝,令人扼腕叹息。

在本书的编写过程中,上海工程技术大学管理学院张伯生教授、徐克绍教授对本书的内容及体系提出了许多宝贵的意见;该校城市轨道交通学院青年教师朱海燕帮助搜集资料供我参考,在此表示深切的感谢。

在成稿工作中,王永秋、朱亚男、傅亚丽给我提供了许多帮助,在此表示衷心感谢。

任何人在他人生的路途上都离不开老师、同事、朋友、领导、亲人的帮助和合作。对那些在我追求知识的道路上曾给我以深切关怀和无私帮助的老师、同事、朋友,我心里面永远保持着对他们的衷心感谢。珍贵的友谊,是人生最美好的回忆。

我希望这本别具风格的《运筹学方法与模型》教材能够得到读者的欢迎,更希望得到运筹学教学工作者的批评指正。

现在我们这些从20世纪70年代末、80年代初就开始从事运筹学教学工作的老教师,都逐渐退出了教学舞台,我们相信未来运筹学的教学工作将更加光辉灿烂。

本书可以作为高等院校交通运输管理类、经济管理类和理工类其他有关专业的本科生、研究生的教材,同时,编者也深盼本书能受到那些孜孜不倦、刻苦追求知识的自学者的欢迎。

由于本人和我的合作者水平有限,本书难免有不当之处,敬请读者批评指正。

傅家良 2005年9月

于同济大学交通运输工程学院

# 目 录

## 第一章 线性规划

§ 1.1 线性规划模型 .....	( 1 )
1.1.1 数学模型 .....	( 1 )
1.1.2 标准型线性规划 .....	( 4 )
§ 1.2 线性规划的几何特征 .....	( 6 )
1.2.1 两个变量的线性规划的图解法 .....	( 6 )
1.2.2 标准型线性规划的几何特征 .....	( 9 )
§ 1.3 基本可行解 .....	( 11 )
§ 1.4 单纯形法 .....	( 14 )
1.4.1 单纯形表和最优化条件 .....	( 15 )
1.4.2 转轴 .....	( 17 )
1.4.3 单纯形法 .....	( 20 )
1.4.4 关于最优解唯一性的讨论 .....	( 23 )
§ 1.5 单纯形表的矩阵描述 .....	( 25 )
§ 1.6 改进单纯形法 .....	( 28 )
§ 1.7 大 $M$ 法和两阶段法 .....	( 32 )
1.7.1 大 $M$ 法 .....	( 32 )
1.7.2 两阶段法 .....	( 37 )
* 1.7.3 退化情况与勃兰德法则 .....	( 44 )
§ 1.8 线性规划应用举例 .....	( 45 )
习题一 .....	( 51 )

## 第二章 线性规划的对偶理论与灵敏度分析

§ 2.1 对偶问题 .....	( 57 )
------------------	--------



§ 2.2	对偶理论 .....	( 62 )
§ 2.3	对偶单纯形法 .....	( 66 )
§ 2.4	对偶问题的最优解 .....	( 70 )
§ 2.5	灵敏度分析 .....	( 75 )
2.5.1	参数 $c_i$ 的灵敏度分析 .....	( 76 )
2.5.2	参数 $b_i$ 的灵敏度分析 .....	( 79 )
2.5.3	变量 $x_i$ 的系数列向量 $A_i$ 的变化 .....	( 82 )
2.5.4	增加新的约束条件 .....	( 85 )
2.5.5	增加新的变量 .....	( 88 )
§ 2.6	影子价格 .....	( 89 )
习题二	.....	( 92 )

### 第三章 运输问题

§ 3.1	运输问题的数学模型 .....	( 96 )
§ 3.2	表上作业法 .....	( 99 )
3.2.1	初始基本可行解的寻求 .....	( 99 )
3.2.2	位势法 .....	( 104 )
§ 3.3	应用举例 .....	( 109 )
习题三	.....	( 116 )

### 第四章 目标规划

§ 4.1	目标规划原理、概念与数学模型 .....	( 118 )
4.1.1	目标规划原理与概念 .....	( 118 )
4.1.2	目标规划数学模型 .....	( 121 )
§ 4.2	目标规划的图解法 .....	( 124 )
§ 4.3	目标规划的单纯形法 .....	( 126 )
§ 4.4	目标规划的灵敏度分析 .....	( 129 )
习题四	.....	( 131 )

## 第五章 整数规划

§ 5.1 整数规划模型 .....	(134)
§ 5.2 纯整数规划的割平面法 .....	(148)
5.2.1 割平面法的几何特征 .....	(148)
5.2.2 柯莫利割 .....	(149)
5.2.3 柯莫利割平面法 .....	(153)
* § 5.3 混合整数规划的割平面法 .....	(155)
§ 5.4 分支定界法 .....	(159)
5.4.1 0-1 背包问题 .....	(160)
5.4.2 分支定界法 .....	(165)
* § 5.5 0-1 规划的分支定界法 .....	(173)
5.5.1 划分和定界 .....	(173)
5.5.2 分支定界算法 .....	(179)
* § 5.6 有界技术在(AIP)分支定界法中的应用 .....	(183)
5.6.1 增广单纯形表 .....	(183)
5.6.2 有界变量的对偶单纯形法 .....	(188)
5.6.3 有界技术在(AIP)分支定界法中的应用 .....	(190)
§ 5.7 最优分配问题 .....	(193)
5.7.1 匈牙利方法 .....	(193)
5.7.2 应用举例 .....	(199)
习题五 .....	(202)

3

## 第六章 网络规划

§ 6.1 图的基本概念 .....	(209)
6.1.1 无向图 .....	(210)
6.1.2 有向图 .....	(212)
6.1.3 图的矩阵表示 .....	(214)
6.1.4 树 .....	(216)
§ 6.2 最短路径问题 .....	(216)
6.2.1 狄克斯特拉算法 .....	(217)
* 6.2.2 弗劳德算法 .....	(221)

6.2.3 应用举例 .....	(225)
<b>§ 6.3 最长路径问题 .....</b>	<b>(229)</b>
6.3.1 最长路径算法 .....	(230)
6.3.2 应用举例 .....	(234)
<b>* § 6.4 第 <math>k</math> 短路径问题 .....</b>	<b>(238)</b>
<b>§ 6.5 最小生成树 .....</b>	<b>(241)</b>
6.5.1 破回路法 .....	(242)
6.5.2 克鲁斯卡算法 .....	(242)
<b>* § 6.6 中国邮路问题 .....</b>	<b>(245)</b>
6.6.1 欧拉环游问题 .....	(245)
6.6.2 中国邮路问题 .....	(248)
<b>§ 6.7 运输网络 .....</b>	<b>(251)</b>
6.7.1 运输网络与流 .....	(251)
6.7.2 割、最小割和最大流 .....	(254)
<b>§ 6.8 最大流 .....</b>	<b>(256)</b>
6.8.1 增流链 .....	(256)
6.8.2 最大流算法 .....	(257)
* 6.8.3 最大流算法在最优分配问题中的应用 .....	(262)
6.8.4 应用举例 .....	(264)
<b>* § 6.9 有界容量运输网络及最大流 .....</b>	<b>(269)</b>
<b>§ 6.10 最小代价流问题 .....</b>	<b>(272)</b>
6.10.1 伴随 $f$ 的增流网络 .....	(273)
6.10.2 最小代价流算法 .....	(276)
6.10.3 应用举例 .....	(278)
<b>习题六 .....</b>	<b>(285)</b>

## 第七章 网络计划技术

<b>§ 7.1 工程网络图 .....</b>	<b>(289)</b>
7.1.1 PERT 网络 .....	(289)
7.1.2 网络图的时间参数和关键路径 .....	(292)
<b>* § 7.2 网络计划的优化问题 .....</b>	<b>(295)</b>
7.2.1 总工期—成本优化问题 .....	(296)

7.2.2 总工期—资源的优化问题 ..... (307)

§ 7.3 非肯定型 PERT 网络 ..... (312)

习题七 ..... (315)

## 第八章 动态规划

§ 8.1 引例 ..... (318)

§ 8.2 动态规划模型和求解方法 ..... (321)

§ 8.3 动态规划应用举例 ..... (326)

习题八 ..... (349)

## 第九章 排队论

§ 9.1 泊松过程、生灭过程和负指数分布 ..... (353)

    9.1.1 泊松过程 ..... (353)

    9.1.2 生灭过程 ..... (358)

    9.1.3 负指数分布 ..... (359)

    9.1.4 爱尔朗分布 ..... (361)

§ 9.2 一般排队系统结构 ..... (362)

    9.2.1 输入过程 ..... (362)

    9.2.2 服务机构 ..... (363)

    9.2.3 排队规则 ..... (364)

    9.2.4 排队模型的符号表示 ..... (365)

    9.2.5 排队模型的数量指标和基本公式 ..... (365)

§ 9.3 泊松输入、负指数分布服务的排队模型 ..... (367)

    9.3.1  $M/M/S$  排队模型 ..... (367)

    9.3.2  $M/M/1$  排队模型 ..... (373)

    9.3.3  $M/M/\infty$  排队模型 ..... (379)

    9.3.4  $M/M/S/k$  排队模型 ..... (380)

    9.3.5  $M/M/S/m/m$  排队模型 ..... (385)

§ 9.4 一般服务分布  $M/G/1$  排队模型 ..... (388)

    9.4.1  $M/G/1$  排队模型 ..... (388)

    9.4.2  $M/D/1$  排队模型 ..... (389)

    9.4.3  $M/E_k/1$  排队模型 ..... (390)

习题九 ..... (391)

## 第十章 存 储 论

§ 10.1 存储模型的结构及基本概念 ..... (393)

    10.1.1 费用构成 ..... (393)

    10.1.2 存储控制的数量指标和参数符号 ..... (394)

    10.1.3 存储控制策略 ..... (395)

§ 10.2 确定型存储模型 ..... (395)

    10.2.1 不许缺货的经济订货批量模型 ..... (395)

    10.2.2 允许缺货的经济订货批量模型 ..... (397)

    10.2.3 不许缺货的生产批量模型 ..... (398)

    10.2.4 有数量折扣的经济订货批量模型 ..... (400)

§ 10.3 随机型存储模型 ..... (401)

    10.3.1  $(s, S)$ 策略存储模型 ..... (401)

    10.3.2  $(q, Q)$ 策略存储模型 ..... (404)

习题十 ..... (407)

6

## 第十一章 博 弈 论

§ 11.1 概述 ..... (409)

§ 11.2 矩阵博弈 ..... (410)

    11.2.1 矩阵博弈数学模型 ..... (410)

    11.2.2 最优纯策略 ..... (412)

§ 11.3 矩阵博弈基本定理 ..... (415)

    11.3.1 混合策略和混合扩充 ..... (415)

    11.3.2 矩阵博弈基本定理 ..... (416)

§ 11.4 矩阵博弈的求解 ..... (418)

    11.4.1 线性方程组法 ..... (418)

    11.4.2 线性规划法 ..... (422)

习题十一 ..... (423)

## 第十二章 决 策 分 析

§ 12.1 随机型决策方法 ..... (427)

12.1.1	期望值准则与报童问题 .....	(428)
12.1.2	决策树 .....	(431)
12.1.3	灵敏度分析 .....	(433)
12.1.4	贝叶斯决策 .....	(435)
§ 12.2	非确定型决策方法 .....	(438)
§ 12.3	效用函数方法 .....	(441)
12.3.1	效用值决策准则 .....	(441)
12.3.2	效用函数曲线 .....	(442)
习题十二	.....	(444)

### \* 第十三章 排序问题

§ 13.1	车间生产计划排序问题 .....	(447)
13.1.1	一台机器和 $n$ 个工件的排序问题 .....	(447)
13.1.2	两台机器和 $n$ 个工件的排序问题 .....	(450)
13.1.3	3 台机器和 $n$ 个工件的排序问题 .....	(453)
§ 13.2	旅行售货员问题 .....	(460)
13.2.1	旅行售货员问题 .....	(460)
13.2.2	分支定界法 .....	(463)
习题十三	.....	(468)
附录	部分习题答案或提示 .....	(471)
参考书目	.....	(476)

# 第一章 线性规划

## § 1.1 线性规划模型

### 1.1.1 数学模型

在经济建设、企业管理和生产实践的各项活动中,我们常常面临把有限的资源分配到若干活动上去的分配问题:

(1) 对有限的资金、材料、设备、场地、能源和劳动力等财力、物力和人力,如何以最佳方式作有效的分配,以期望获得最大的效益.

(2) 在既定的任务之下,如何统筹安排,以做到用最少量的财力、物力和人力来完成任务.

这些最优分配问题的数学模型在运筹学中处于中心的地位,而线性规划是解决这一类问题的一个理论和方法都比较成熟的运筹学分支.下面我们来看两个实例.

**例 1-1** (生产计划问题) 某工厂生产 1<sup>#</sup>, 2<sup>#</sup> 和 3<sup>#</sup> 三种产品,每种产品需经过 3 道工序.每件产品在每道工序中的工时定额、每道工序在每周可利用的有效工时和每件产品的利润由表 1-1 给出.问每种产品各生产多少,可使这一周内生产的产品所获利润最大?

表 1-1

定额(工时/件)		$j^{\#}$ 产 品			每周可利用的有效工时
		1 <sup>#</sup>	2 <sup>#</sup>	3 <sup>#</sup>	
工 序	A	1.2	1.0	1.1	5 400
	B	0.7	0.9	0.6	2 800
	C	0.9	0.8	1.0	3 600
利润(元/件)		10	15	12	

**解** 本问题是要把有限的工时资源合理地分配到 3 种产品的生产活动上去,以期获得最多的利润.

首先我们引进决策变量:设一周内  $j^{\#}$  产品的生产件数为  $x_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ).

然后,根据每件产品的工时定额以及各工序允许的有效工时列出约束条件:

1<sup>#</sup> 产品每生产一件需 A 工序 1.2 工时,现生产  $x_1$  件,故 1<sup>#</sup> 产品耗费 A 工序的工时数为  $1.2x_1$ . 类似地,生产 2<sup>#</sup> 产品和 3<sup>#</sup> 产品耗费 A 工序的工时数分别为  $1.0x_2$  和  $1.1x_3$ ,

所以 3 种产品对 A 工序的工时总需求量为

$$1.2x_1 + 1.0x_2 + 1.1x_3,$$

它不应超过 A 工序在一周内所允许的工作时间 5 400 工时. 于是, 得工序 A 加工产品的约束条件:

$$1.2x_1 + 1.0x_2 + 1.1x_3 \leq 5400.$$

类似地, 对工序 B 和 C 有以下约束条件:

$$0.7x_1 + 0.9x_2 + 0.6x_3 \leq 2800,$$

$$0.9x_1 + 0.8x_2 + 1.0x_3 \leq 3600.$$

再者, 变量  $x_1$ ,  $x_2$  和  $x_3$  只能取非负值, 故有下列非负约束条件:

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0.$$

最后, 我们来确定产品生产的效益. 若用  $f$  表示工厂一周内生产 3 种产品所能获得的利润, 则有

$$f = 10x_1 + 15x_2 + 12x_3,$$

现在工厂的目标是希望获得最大利润, 我们写成:

$$\max f = 10x_1 + 15x_2 + 12x_3.$$

综上所述, 我们得本问题的数学模型:

$$\max f = 10x_1 + 15x_2 + 12x_3;$$

$$\text{s. t. } 1.2x_1 + 1.0x_2 + 1.1x_3 \leq 5400,$$

$$0.7x_1 + 0.9x_2 + 0.6x_3 \leq 2800,$$

$$0.9x_1 + 0.8x_2 + 1.0x_3 \leq 3600,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

其中, s. t. 为英文“subject to”(受约束于)的缩写.

**例 1-2** (运输问题) 两个发点  $A_1$  和  $A_2$  有物资必须运往 3 个收点  $B_1$ ,  $B_2$  和  $B_3$ . 发点  $A_i$  对物资的供应量  $a_i$ 、收点  $B_j$  对物资的需求情况和发点  $A_i$  至收点  $B_j$  每输送一吨物资所需的运输费用  $c_{ij}$  见表 1-2. 为完成发点  $A_1$  和  $A_2$  对物资的运输任务, 问运输方案应如何确定, 而使总运费最少?

表 1-2

运价 $c_{ij}$ (元/吨)		收点 $B_j$			供应量 $a_i$ (吨)
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	
发点 $A_i$	$A_1$	20	10	30	60
	$A_2$	15	20	18	40
需求量 $b_j$ (吨)		恰为 20	至多 30	至少 40	

**解** 本问题是在完成既定运输任务的条件下而希求花费最少的财力.

设  $x_{ij}$  为从发点  $A_i$  运送到收点  $B_j$  的物资数量.



由于发点  $A_i$  的  $a_i$  吨物资必须运走, 因此,  $a_i$  等于发点  $A_i$  运往各收点  $B_j$  的运量  $x_{ij}$  之和. 由此得约束条件:

$$\begin{aligned}x_{11} + x_{12} + x_{13} &= 60, \\x_{21} + x_{22} + x_{23} &= 40.\end{aligned}$$

注意到各收点  $B_j$  对物资的需求情况, 我们有下列约束条件:

$$\begin{aligned}x_{11} + x_{21} &= 20, \\x_{12} + x_{22} &\leq 30, \\x_{13} + x_{23} &\geq 40.\end{aligned}$$

自然, 运量  $x_{ij}$  都应为非负变量:

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2; \quad j = 1, 2, 3.$$

总运费为

$$f = 20x_{11} + 10x_{12} + 30x_{13} + 15x_{21} + 20x_{22} + 18x_{23},$$

我们对  $f$  求最小值. 故本问题归结为如下数学模型:

$$\begin{aligned}\min f &= 20x_{11} + 10x_{12} + 30x_{13} + 15x_{21} + 20x_{22} + 18x_{23}; \\ \text{s. t.} \quad x_{11} + x_{12} + x_{13} &= 60, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} &= 40, \\ x_{11} + x_{21} &= 20, \\ x_{12} + x_{22} &\leq 30, \\ x_{13} + x_{23} &\geq 40, \\ x_{ij} &\geq 0, \quad i = 1, 2; \quad j = 1, 2, 3.\end{aligned}$$

上述建立的两个数学模型, 我们称之为**线性规划**. 可见, 线性规划模型具有下列 3 个要素:

(1) **决策变量**. 这些决策变量的一组定值代表所给问题的一个具体方案. 一般来说, 这些决策变量都是非负变量. 如果在模型中变量  $x_j$  的符号不受限制, 即变量  $x_j$  取正值, 取负值或取零都可以, 我们把它写成条件  $x_j \geq 0$ , 并称  $x_j$  为**自由变量**.

(2) **约束条件**. 这些约束条件都为线性等式或线性不等式, 它们反映了所给问题对资源的客观限制及对所要完成的任务各类要求. 同时, 对决策变量的符号要求也属于约束条件.

(3) **目标函数**. 它为决策变量的线性函数. 按所给问题的不同, 可要求目标函数  $f$  实现最大值或最小值.

为此, 线性规划模型的一般形式为

$$\begin{aligned}\min f &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (\text{或 } \max f = \sum_{j=1}^n c_j x_j); \\ \text{s. t.} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\geq b_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, n.\end{aligned} \tag{1-1}$$