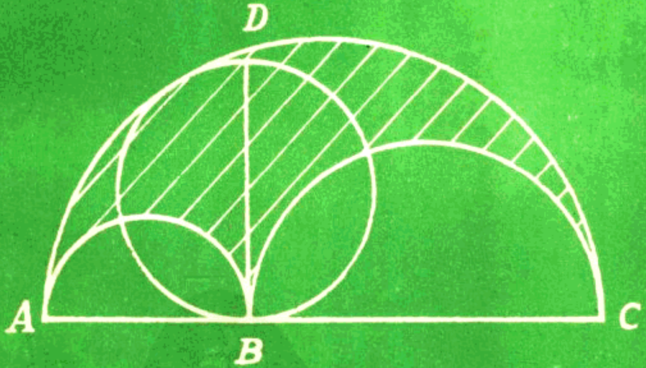
传授知识 · 指点方法 · 开拓思路 · 提高能力

三年级升级准备

初中数学



CHUZHONGSHUXUE

新蕾出版社

初中数学
三年级升级准备

蔡上鹤 主 编

明知白 王建民
史树德 尹 甫 编著

新蕾出版社

〔津〕新登字(90)004号

责任编辑：胡晓光

升级准备丛书
初中数学
三年级升级准备
蔡上鹤　主编
*
新蕾出版社出版
天津新华印刷一厂印刷
新华书店天津发行所发行
开本787×1092毫米　1/32　印张10　字数210,000
1992年8月第1版　1992年8月第1次印刷
印数：1－22,700
ISBN 7-5307-1056-7/G·547(儿)
定　价：3.80元

说　　明

数学教学工作，可以理解为一项系统工程，它必须通过师生们的长期合作才能完成。近年来，随着教育改革的不断深入，人们越来越认识到教育必须以提高全民族素质为出发点。为此，在日常的教学工作中，必须着重注意培养和提高学生的能力，开发学生的智力。有鉴于上述宗旨，我们受新蕾出版社的委托，把多年来从事数学教学工作的经验，启发诱导学生的方法，培养训练学生的措施等，进行归纳总结和加工整理，写成了这套《升级准备丛书》，供广大师生阅读参考。

编写这套书的指导思想是：拓宽知识，传授方法，培养能力，开发智力。

在编写过程中，我们遵照《全日制中学数学教学大纲》初中部分的要求，以现在通用的初级中学数学课本为依据，参照课本的系统和结构，使这套书既能供广大师生在教学中使用，又能供复习和总复习使用。书中的词语、符号，都和通用的数学课本中的一致。

为了既提高学生能力，又不增加学生负担，本书的主要内容都是通过对各种类型的例题的讲解逐渐展开的。这些例题层次不同，阶梯细密，读者可以根据自己的实际情况选择其中的一部分或全部阅读和运用。这些例题大多数是我们教

学工作中的“传统保留节目”，是我们教学经验的结晶，它们渗透了我们的教学思想和方法，为我们历年来在教学中多次使用，并取得了一定的效果。

本丛书由蔡上鹤主编，明知白、王建民、周沛耕、郑学遐、史树德、尹甫、贺鹏志等老师编写。对于新蕾出版社的信任和在编写方面的指导，我们表示衷心的感谢！

本书仓促写成，难免出现错误，诚恳欢迎广大读者提出宝贵意见。

愿本书能成为我们献给读者的一份菲薄的礼物。

作　者

1991年10月

目　　录

代 数 部 分

几 何 部 分

代 数 部 分

第一章　函数及其图象

"函数及其图象"这一章在初中代数中占有重要的地位，内容十分丰富，对进一步学习高中数学也十分有用。

"函数及其图象"这一章共分六节（直角坐标系、函数、正比例函数与反比例函数、一次函数的图象和性质、二次函数的图象和性质、一元一次不等式组和一元二次不等式），这六节可以归纳成四大部分：

第一部分是直角坐标系，包含直角坐标系的基本知识与两点间的距离公式；

第二部分是函数的基础知识，包含常量与变量、函数概念、函数的表示法、函数的图象等知识；

第三部分是四类基本的函数，即正比例函数、反比例函数、一次函数和二次函数，包含这四类函数的定义、图象和性质，以及它们的简单应用；

第四部分是一元一次不等式组和一元二次不等式，包含一元一次不等式组及其解法，绝对值不等式$|x|<a$与$|x|>a$（$a>0$）的解法，一元二次不等式及其解法。

以上四部分中，第一部分是预备知识，第二与第三两部分是本章的主要内容，它包含着本章的许多重点内容与难

点，第四部分是三类不等式（组）的解法，其中一元二次不等式的图象解法是二次函数图象的应用。

要学好这一章，需要弄清以下十个问题。

一、怎样认识直角坐标系

关于直角坐标系，应该掌握以下几个要点。

1.坐标平面内的点与有序实数对是一一对应的

我们知道，在数轴上，每一个点的位置都能用一个实数来表示，这个实数叫做这个点在数轴上的坐标。而在平面内，当建立直角坐标系之后，平面内的每一个点P，都可以用一对有序实数（x，y）来表示，其中x，y分别是P点的横、纵坐标；反过来，对于任意一对有序实数（m，n），在坐标平面内都有唯一的一个点Q和它对应，点Q的横、纵坐标分别是m、n。上面两方面的认识就是“一一对应”的含义。

2.四个象限内的点的坐标

我们知道，x轴和y轴把坐标平面分成四个象限（注意，两条坐标轴上的点不属于任何象限），在四个象限内的点，它们的坐标的符号如图1-1所示。

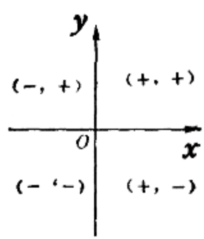


图1-1

图中所示的点的坐标符号表示两方面的意义，一方面，四个象限内点的坐标，其正负号如图所示，例如，第四象限

内的点，横坐标为正，纵坐标为负；另一方面，例如，一个点的横坐标为正，纵坐标为负，即如果有（+，－），那么这个点一定在第四象限。

上面两方面的认识，正是“坐标平面内的点与有序实数对是一一对应的”这一规律的体现。

3.某些特殊点的坐标的特征

（1）x轴上的点，纵坐标为0，可以表示为$(a,0)$；y轴上的点，横坐标为0，可以表示为$(0,b)$，反之，坐标为$(a,0)$的点一定在x轴上，坐标为$(0,b)$的点一定在y轴上。

（2）在第一（或三）象限内两条坐标轴夹角平分线上的点，它们的横坐标与纵坐标相等，即$y=x$；在第二（或四）象限内两条坐标轴夹角平分线上的点，它们的横坐标与纵坐标互为相反数，即$y=-x$（或$x=-y$）。反之，横、纵坐标相等（或相反）的点必在第一、三（或二、四）象限的角平分线上。

例1 设$A(m,-n)$，指出在下列条件下m和n的取值范围。

（1）A在第二象限；

（2）A在x轴的负半轴上。

解：（1）A在第二象限，应有$m<0$，$-n>0$，即$m<0$且$n<0$。

（2）A在x轴的负半轴上，应有$m<0$，$-n=0$，即$m<0$且$n=0$。

例2 设$B(a,b)$，指出在下列条件下B点的位置。

（1）$ab>0$；　　　　（2）$ab=0$；

（3） $a+b=0$；　　　　（4） $|a|=|b|$.

解：（1） $ab>0$ 包含两种情况：$a>0$，$b>0$；或者 $a<0$，$b<0$．第一种情况下，B点在第一象限；第二种情况下，B点在第三象限．

（2） $ab=0$包含两种情况：$a=0$（b可以取任意值）；或者$b=0$（a可以取任意值）．第一种情况下，B点在y轴上；第二种情况下，B点在x轴上．

（3） 由$a+b=0$可得$a=-b$，即B点的横纵坐标互为相反数，因此B点在第二、四象限的角平分线上．

（4） 由$|a|=|b|$得$a=\pm b$，即$a=b$或$a=-b$，因此B点或者在第一、三象限的角平分线上（$a=b$），或者在第二、四象限的角平分线上（$a=-b$）．

4.某些对称点的坐标

设A_1的坐标为（a，b），为了说明问题，我们把A_1定在第一象限，然后作出A_1关于y轴的对称点A_2，关于x轴的对称点A_4，关于原点的对称点A_3（图1-2）．显然，四边形$A_1A_2A_3A_4$是矩形．

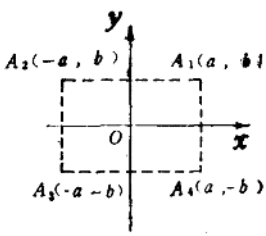


图1-2

由图可以得到：

（1） 点A_1（a，b）关于x轴的对称点是A_4（a，$-b$）；

（2） 点A_1（a，b）关于y轴的对称点是A_2（$-a$，b）；

（3） 点A_1（a，b）关于原点的对称点是A_3（$-a$，$-b$）．

上述知识十分有用，应该记住并能正确运用．

例3　已知A（$2m$，-3），B（5，$1-n$），根据下列

条件求出m和n的值.

（1）A和B都在坐标轴上；

（2）A和B关于x轴对称；

（3）A和B关于y轴对称；

（4）A和B关于原点对称.

解：（1）A和B都在坐标轴上，只能是A点在y轴上（$2m=0$），B点在x轴上（$1-n=0$），所以有$m=0, n=1$.

（2）因为A和B关于x轴对称，所以它们的横坐标相同，纵坐标互为相反数.因此

$$\begin{cases} 2m=5, \\ 1-n=-(-3). \end{cases}$$

$$\therefore \quad m=\frac{5}{2},\ n=-2.$$

（3）因为A和B关于y轴对称，所以

$$\begin{cases} 2m=-5 \\ 1-n=-3. \end{cases}$$

解得 $$m=-\frac{5}{2},\ n=4.$$

（3）因为A和B关于原点对称，所以

$$\begin{cases} 2m=-5, \\ 1-n=-(-3). \end{cases}$$

解得 $$m=-\frac{5}{2},\ n=-2.$$

二、两点间的距离公式及其应用

1. 同一数轴上两点间的距离

设同一数轴上的两点A，B的坐标为x_A，x_B，那么A，B两点间的距离公式为

$$AB=|x_B-x_A|.$$

由于$|x_B-x_A|=|x_A-x_B|$，所以

$$AB=|x_B-x_A|=|x_A-x_B|.$$

这就是说，在知道了A，B两点的坐标以后，取差时，可以是x_B-x_A，也可以是x_A-x_B，只要取它们的绝对值就行了。为了确保两数的差是正值，可以用大数减小数，即选择较大的数为被减数。例如，若A，B，C的坐标分别是1，－2，4，则

$$AB=x_A-x_B=1-(-2)=3,$$

$$BC=x_C-x_B=4-(-2)=6.$$

2. 平面内任意两点间的距离

设$P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$是坐标平面内的任意两点，那么P_1，P_2两点间的距离公式为

$$P_1P_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1^2)}. \qquad ①$$

关于距离公式，要弄清以下几点。

（1）关于公式的证明。

将①式两边平方，可得

$$\begin{aligned}P_1P_2^2&=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2\\&=|x_2-x_1|^2+|y_2-y_1|^2. \qquad ②\end{aligned}$$

从形式上看，②式具有勾股定理的特征，因此在推证公

式时，就是构造出以P_1P_2为斜边，以平行于两坐标轴的线段（其长度分别是$|x_2-x_1|$与$|y_2-y_1|$）为直角边的直角三角形，然后用勾股定理得出公式②，再得出公式①。由于直角边平行于坐标轴，就把平面内两点间的距离转化为同一数轴上两点间的距离了。

（2）关于公式的使用。

第一，要计算平面内两点间的距离，就需要知道两点的坐标，为此应该建立直角坐标系，然后计算出两点的坐标；

第二，由于加法交换律与$(a-b)^2=(b-a)^2$，所以①式也可以写成

$$
\begin{aligned}
P_1P_2 &= \sqrt{(y_2-y_1)^2+(x_2-x_1)^2} \\
&= \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} \\
&= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_1-y_2)^2}
\end{aligned}
$$

等等，总之，P_1P_2等于$(x_2-x_1)^2$与$(y_2-y_1)^2$的和的算术平方根，这就是公式①的本质。

第三，公式①和②是等价的，有时①的右边较为复杂，可先用②计算$P_1P_2^2$，再得P_1P_2。

（3）公式的特殊情况。

当$P_1P_2 /\!/ x$轴时，由于$y_1=y_2$，所以$P_1P_2=|x_2-x_1|$；

当$P_1P_2 /\!/ y$轴时，由于$x_1=x_2$，所以$P_1P_2=|y_2-y_1|$；

当P_1（或P_2）是坐标原点时，由于$x_1=y_1=0$，所以$P_1P_2=\sqrt{x_2{}^2+y_2{}^2}$，即任意一点$P(x, y)$到原点$O$的距离是

$$OP=\sqrt{x^2+y^2}.$$

下面举例说明公式的应用。

例1 已知$A\left(2\sqrt{3},\ -\sqrt{2}\right)$，$B\left(\sqrt{3},\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$，求$A$，$B$两点间的距离.

解：$\because$ $AB^2=\left(2\sqrt{3}-\sqrt{3}\right)^2+\left(-\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$

$$=\left(\sqrt{3}\right)^2+\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{15}{2},$$

$\therefore$ $AB=\sqrt{\frac{15}{2}}=\frac{\sqrt{30}}{2}$.

例2 在x轴上求一点，使它与点$(2,\ -3)$的距离为$3\sqrt{2}$.

解：设所求点为$(a,\ 0)$，则

$$\sqrt{(a-2)^2+(0+3)^2}=3\sqrt{2}.$$

$\therefore$ $(a-2)^2+9=18$,

$(a-2)^2=9$,

$a-2=\pm3$.

$\therefore$ $a=5$ 或$a=-1$，

所求的点是$(5,\ 0)$与$(-1,\ 0)$.

例3 已知$A(3,\ 4)$，$B(5,\ -10)$，$C(6,\ -2)$，$D(4,12)$，求证四边形$ABCD$是平行四边形，但不是菱形与矩形.

分析：分别计算四边AB，BC，CD，DA的长度与对角线AC与BD的长度.

证明：由两点间的距离公式，得

$$AB=\sqrt{(3-5)^2+(4+10)^2}=10\sqrt{2},$$

$$BC=\sqrt{(6-5)^2+(-2+10)^2}=\sqrt{65},$$

$$CD = \sqrt{(6-4)^2+(12+2)^2} = 10\sqrt{2},$$

$$AD = \sqrt{(4-3)^2+(12-4)^2} = \sqrt{65}.$$

因为$AB=CD$，$BC=AD$，$AB\neq BC$，所以四边形$ABCD$是平行四边形，但不是菱形。

$\because$ $AC = \sqrt{(6-3)^2+(4+2)^2} = \sqrt{45}$,

$BD = \sqrt{(5-4)^2+(12+10)^2} = \sqrt{485}$,

$\therefore$ $AC\neq BD$.

从而▱$ABCD$不是矩形。

三、要正确理解函数概念

1.理解"函数"概念，要抓住两个要素

"函数"是中学数学中一个极其重要的概念，我们一定要很好地理解它。

什么是"函数"？课本指出："设在某变化过程中有两个变量x，y，如果对于x在某一范围内的每一个确定的值，y都有唯一确定的值和它对应，那么就说y是x的函数，x叫做自变量。"怎样理解这一段话呢？

第一，"函数"概念涉及两个变量x和y，讲的是它们之间的某种关系；

第二，变量x是在某一范围内取值，这个变量叫做自变量，x的取值范围叫做函数的**定义域**；

第三，变量x和y要有确定的对应关系，即对于x的"每一个确定的值，y都有唯一确定的值和它对应"，这个对应关系是函数概念的本质特征。