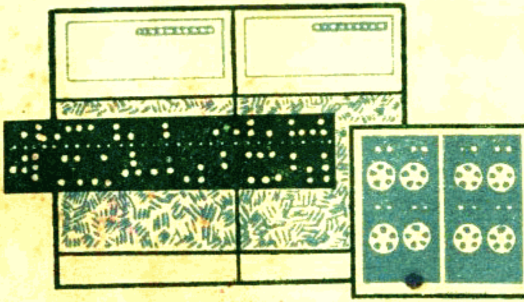
中学复习资料



数学

上册

安徽人民出版社

O12
17

O12
17

地方版交换书

中学复习资料
数学
上册
安徽省教育局教材编审室编
*
安徽人民出版社出版
安徽省新华书店发行 安庆东方红印刷厂印刷
*
开本：787×1092 1/32 印张：8 1/2 字数：200,000
1979年1月第1版 1979年1月第1次印刷
统一书号：K7102·735
定 价：0.50元

说　　明

这本中学数学复习资料，是以省编课本为基础，根据中央教育部制订的《中学数学教学大纲》的精神编写的。大纲中有关传统的中学数学内容，基本上都有，大纲中有关近代、现代的数学基础知识和观点，暂未列入。

这本复习资料，主要供我省高中毕业班复习时选用，也可作为其他年级教学时的参考。

本书付印时，《一九七九年全国高等学校招生考试复习大纲》还没有公布，因此它的精神和要求，难于在本书中完全体现。一九七九届高中毕业班复习时，应当根据高考大纲精神，选用本书内容。例如加△号的章节可以不选。

鉴于教师选题时，手头资料的缺乏，本书各章选入的例、习题分量较多，难易程度悬殊也较大。教师使用本书时，应根据自己班级学生的实际情况，有针对性地选用，不要强求所有学生每题都做，防止负担过重。

由于我们的水平限制，加之时间仓促，本书一定存在不少缺点和错误，恳切希望广大师生批评指正。

安徽省教育局教材编审室

一九七八年九月

目　　录

第一部分　代数

第二部分　平面几何

第三部分　立体几何

第一部分 代 数

第一章 实 数

复习要点

一 实数

1.实数的系统

- 实数
  - 有理数（有限小数或无限循环小数）
    - 整数
      - 正整数
      - 零
      - 负整数
    - 分数
      - 正分数
      - 负分数
  - 无理数（无限不循环小数。）
    - 正无理数
    - 负无理数

2.实数与数轴

规定了方向、原点和长度单位的直线叫做数轴。任何实数都可以用数轴上的一个点来表示；数轴上任何一点都表示一个实数。实数和数轴上的点是一一对应的。

3.实数的绝对值

数轴上原点的两旁与原点距离相等的两个点所表示的两个

数，叫做互为相反数。如$+3.5$是-3.5的相反数；$-\pi$是π的相反数；零的相反数仍是零。

数轴上表示一个数的点，离开原点的距离叫做这个数的绝对值。正数和零的绝对值是它本身，负数的绝对值是它的相反数。实数a的绝对值记作$|a|$。即

$$|a|=\begin{cases}a, & (a\geqslant 0)\\ -a。 & (a<0)\end{cases}$$

4.实数的大小比较

数轴上两个点表示的两个实数，在右边的点表示的实数比左边的点表示的实数大。

（1）正数都大于零和负数，负数都小于零。

（2）两个正数，绝对值大的较大。

（3）两个负数，绝对值大的反而小。如$-\frac{2}{3}<-\frac{1}{6}$。

二　实数的运算

1.加法

（1）法则　同号两数相加，和取相同的符号，并把它们的绝对值相加，异号两数相加，和的符号取绝对值大的加数的符号，和的绝对值等于绝对值大的减去绝对值小的。

（2）运算律　交换律　$a+b=b+a$；

结合律　$(a+b)+c=a+(b+c)$。

2.减法

（1）法则　减去一个数等于加上这个数的相反数。

（2）代数和　由减法法则，减法可归结为加法，所以任何一个加减法的混合算式，都可以写成正负数相加的形式，叫做代数和。

在一个代数和中，只有一种加法运算，为了书写简便，加

号可省略不写。例如

$$(+20)-2.5-\left(-3\frac{1}{4}\right)-7=(+20)+(-2.5)+\left(3\frac{1}{4}\right)$$

$$+(-7)=20-2.5+3\frac{1}{4}-7。$$

化成省略加号的代数和时，要注意符号法则：

$$+(\pm a)=\pm a, \qquad -(\pm a)=\mp a。$$

例如

$$(-3)-(-6)+(+2)-(+13)=-3+6+2-13。$$

3.乘法

(1) 法则　同号两数相乘，积取正号，并把绝对值相乘；异号两数相乘，积取负号，并把绝对值相乘。零乘以任何数，积仍为零。

(2) 运算律　交换律　$ab=ba$；

结合律　$(ab)c=a(bc)$；

分配律　$a(b+c)=ab+ac$。

4.除法

法则　同号两数相除，商取正号，并把绝对值相除。异号两数相除，商取负号，并把绝对值相除。

零除以一个不为零的数，商为零。零不能做除数。

5.乘方　求相同因数的积的运算叫做乘方，乘方的结果叫做幂，相同因数的个数叫做指数，相同的因数叫做底数。

法则　正数的任何次幂都是正数；负数的偶次幂是一个正数，奇次幂是一个负数。

零的任何次幂都是零。

6.开方　实数 a 开 n 次方，就是求一个数 x 使它的 n 次幂等于 a。x 叫做 a 的 n 次方根。a 叫做被开方数，n 叫做根指数。开方与乘方互为逆运算。

求一个数的平方根的运算叫做开平方，

求一个数的立方根的运算叫做开立方。

（1） 方根的性质

在实数范围内，正数的奇次方根是一个正数，负数的奇次方根是一个负数。正数的偶次方根是互为相反数的两个数。因为任何实数的偶次方都不可能是负数，所以在实数范围内负数不能开偶次方。

（2） 算术根　正数的正的方根叫做算术根。零的算术根是零，因此，在 $a\geqslant0$ 时，符号 $\sqrt[n]{a}$ 表示算术根。当n是偶数时，

$$\sqrt[n]{a^n}=|a|=\begin{cases}a & (a\geqslant0),\\ -a & (a<0)。\end{cases}$$

7.实数的运算顺序

在加、减、乘、除、乘方、开方六种运算中，加减是第一级运算，乘除是第二级运算，乘方和开方是第三级运算。在运算时，要注意：

（1） 一个算式里如果有括号，先算括号里面；

（2） 一个算式里如果同时有三级运算，就先算第三级，再算第二级，最后算第一级；

（3） 一个算式里只有同级运算，就依次计算；

（4） 为了简化运算，可以根据运算律改变上面的运算顺序。改变顺序可能涉及添括号、去括号。添、去括号的法则是：

添上或去掉前面带“+”号的括号时，括号里各项的符号不变；添上或去掉前面带“-”号的括号时，括号里的各项都要改变符号。

例　题

例1　计算　$\sqrt{(m-n)^2}$

解这类问题要正确理解算术根的概念，因为题中没有说明 m 与 n 哪一个大，解题时必须分 $m>n$、$m=n$ 和 $m<n$ 三种情况。

解 $\sqrt{(m-n)^2}=m-n$，（当$m>n$时）

$\sqrt{(m-n)^2}=m-n=0$，（当$m=n$时）

$\sqrt{(m-n)^2}=-(m-n)=n-m$。（当$m<n$时）

例2 解方程 $|x-4|+|x+1|=5$。（x 是实数）

分析 解带有绝对值的方程，在于能正确地去掉绝对值符号，化为不带绝对值的方程。但在去掉绝对值符号时，要注意限制条件。为了避免解题过程中产生错误，可把实数集合按题中的各个绝对值号内式子的根，由小到大的顺序进行分段，然后逐段讨论。就本题来说，可分为如下三种情况：

$x\geqslant4$，$-1<x<4$，$x\leqslant-1$。

解 当 $x\geqslant4$ 时，

原方程为 $x-4+x+1=5$，

即 $2x=8$，

∴ $x=4$，

当 $-1<x<4$ 时，

原方程为 $-(x-4)+x+1=5$，

即 $5=5$。

对方程来说，有无穷多个解，即x为一切实数，但在条件 $-1<x<4$ 的限制下，方程的解 x 应是限制它的条件本身，即 $-1<x<4$。

当 $x\leqslant-1$时，

原方程为 $-(x-4)-(x+1)=5$，

即 $-2x=2$，

∴ $x=-1$。

总结以上三种情况，可知原方程的解为 $-1\leqslant x\leqslant4$。

习　题

1.计算：

(1) $-1\frac{2}{7}\times\frac{5}{7}\div\left(-\frac{3}{4}\right)\times(-2.5)\div0.25\times\frac{2}{5}\times2\frac{1}{3}$

$\div\left(-\frac{6}{7}\right)$；

(2) $[0-(-5)^3]\times(-2)$

$-5000\div\left[\left(-2\frac{1}{4}\right)\div\left(-7.75\right)\right]^2$；

(3) $\left\{2\frac{3}{16}-\left[4-\left(2\frac{1}{7}-1\frac{1}{5}\right)\times3.5\right]\div0.16\right\}$

$\times\left(2\frac{28}{84}-1\frac{49}{60}\right)$；

(4) $-3^2\times(1.2)^2\div(-0.3)^3$

$+\left(-\frac{1}{3}\right)^3\times(-3)^3\div(-1)^{25}$；

(5) $|3-5|-|(-3)-(-5)|+|(-243)+(-357)|$；

(6) $(-3)^2-\left(-1\frac{1}{2}\right)^3\times\frac{2}{9}-6\div\left|-\frac{2}{3}\right|$。

2. x为何值时，$\frac{|x|}{x}$的值是1？是-1？不存在？

3.回答下列问题：

(1) $-a$一定是负数吗？

(2) $2a$与$3a$哪个大？

(3) 在什么条件下，$\frac{b}{a}$是正数？负数？零？

4.回答下列问题：

(1) 如果$|m|=|n|$，能断定$m=n$吗？

(2) 如果$|m|>|n|$，能断定$m>n$吗？

(3) 如果$|m|<|n|$，能断定$m<n$吗？

5.不用绝对值的符号写出式子$|x-2|$来。

6.计算： (1)$\sqrt{(-3)^2}$， (2)$\sqrt{(3-x)^2}$。

7.在实数集合里解方程$|x-2|+|x+1|=5$。

8.当$1<a<2$时，计算$\sqrt{(a-2)^2}+\sqrt{(1-a)^2}$。

9.计算：$\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{(x+3)^2}+\sqrt{(x-5)^2}$。

第二章 代数式

复 习 要 点

一 一般概念

1.代数式 用代数运算符号(加、减、乘、除、乘方、开方)把数字或字母表示的数连接起来的式子叫做代数式。

2.代数式的分类

$$\text{代数式}\begin{cases}\text{有理式}\begin{cases}\text{整式}\begin{cases}\text{单项式}\\\text{多项式}\end{cases}\\\text{分式}\end{cases}\\\text{根式(无理式)}\end{cases}$$

有理式 只含加、减、乘(包括乘方)、除四种运算的代数式叫做有理式。除式中不含字母的有理式叫做整式(单项式、

多项式*)，除式中含有字母的有理式叫做分式(分母不能为零)。不含加减运算的整式叫单项式，一个单项式里，数字因数叫做字母因数的系数；一个单项式里所有字母的指数和叫做这个单项式的次数。几个单项式的代数和叫做多项式。其中每一个单项式叫做这个多项式的项。次数最高项的次数叫做这个多项式的次数。

根式(无理式)**当$\sqrt[n]{a}$有意义时，式子$\sqrt[n]{a}$叫做根式。当n是奇数时，a可以是任何实数；当n为偶数时，a可以是任何正实数或零。也就是说，根式里含有变数字母的代数式(必须有意义)叫做根式。不能再化简的根式叫做最简根式。

二 整式运算

1.整式的加减法

同类项 所含字母相同，并且相同字母的指数也分别相同的单项式，叫做同类项。

合并同类项 把同类项的系数相加，所得的和作为字母因数的系数，而字母因数和字母的指数不变，叫做合并同类项。

整式的加减法则 把各整式用加、减号连接起来，去括号后合并同类项。

2.整式的乘法

同底数幂的运算法则

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$；(m、n都是正整数)

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$；(m、n都是正整数)

$(ab)^n = a^n b^n$。(n是正整数)

---

*多项式的意义，有的书上和整式一样，不加区分，把单项式看作是多项式的特殊情形。

**无理式的意义，有的书上和根式一样，不加区分。也有把无理式专指最简根式的。

单项式乘以单项式　把它们的系数的积作为积的系数，把相同字母的指数和作为积里这个字母的指数，单独的字母连同它的指数写到积里。

单项式乘以多项式　把单项式同多项式的每一项相乘，再把所得的积相加。

多项式乘以多项式　把一个多项式的各项和另一个多项式的各项相乘，再把所得的积相加。

乘法公式

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2;$$

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2;$$

$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3;$$

$$(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3。$$

3.整式的除法

同底数幂相除 $a^m\div a^n=a^{m-n}$（m、n都是正整数，$m>n$，$a\neq 0$）。

$$a^m\div a^m=1。$$

单项式除以单项式　系数相除，同底数幂相减。

多项式除以单项式　用单项式(除式)分别除多项式(被除式)各项。

多项式除以多项式

(1) 设 $A(x)$是被除式，$B(x)$是除式，$Q(x)$是商式，$R(x)$是余式。则

$$A(x)=B(x)\cdot Q(x)+R(x)。$$

当 $R(x)=0$ 时，$A(x)$能被 $B(x)$整除，商为$Q(x)$。

(2) 多项式除以多项式(被除式和除式含有同一字母 x 的情形)

把被除式和除式都依x的降幂排列(把含有字母 x 的多项式的各项，按照x的次数从高到低排列)，除式写在被除式右边，

用一稍长竖线隔开，在除式下面划一横线，把商写在横线下面。计算时，用除式的最高次项除被除式的最高次项，将所得结果写在横线下面，得商式的第一项，用商式的第一项乘除式，把结果写在被除式下面，各同类项对齐，相减得第一余式；再用除式的最高次项除第一余式的最高次项，得商的第二项，用这项乘除式各项，将结果写在第一余式下面，同类项对齐，相减得第二余式；依此类推，直到余式的次数低于除式为止。

例　题

例1　计算$(x+y+a-b)(x-y+a+b)$。

解　$(x+y+a-b)(x-y+a+b)$

$=[(x+a)+(y-b)][(x+a)-(y-b)]$

$=(x+a)^2-(y-b)^2=x^2+2ax+a^2-y^2+2by-b^2$。

例2　计算$(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$

解一　$(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$

$=(x^2-y^2)[(x^2+y^2)^2-(xy)^2]$

$=(x^2-y^2)(x^4+x^2y^2+y^4)=x^6-y^6$。

解二　$(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$

$=[(x+y)(x^2-xy+y^2)][(x-y)(x^2+xy+y^2)]$

$=(x^3+y^3)(x^3-y^3)=x^6-y^6$。

例3　计算$(x^3-x^2+x-6)\div(x+2)$

解

$$
\begin{array}{l|l}
\text{被除式}\cdots\cdots x^3-x^2+x-6 & x+2\cdots\cdots\cdots\cdots\text{除式} \\
\cline{2-2}
 & x^2-3x+7\ \cdots\cdots\text{商} \\
\quad x^3+2x^2 & \\
\hline
\quad -3x^2+x\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{第一余式} & \\
\quad -3x^2-6x & \\
\cline{1-1}
\qquad 7x-6\cdots\cdots\cdots\cdots\text{第二余式} & \\
\qquad 7x+14 & \\
\cline{1-1}
\qquad\ -20\cdots\cdots\cdots\text{余式} &
\end{array}
$$

$\therefore\quad x^3-x^2+x-6=(x+2)(x^2-3x+7)-20$。

习　　题

1. 下列各式是不是代数式，如果是，加以分类：

$3x$， 0， $\dfrac{3a-4b}{\sqrt{2}}$， $\dfrac{2y}{\sqrt{x}}$， $\sin x$， $\lg x$，

$\dfrac{5x-y}{a-b}$， ax^2+bx+c。

2. 下列计算是否有错，如果有错，指出错误原因。

(1) $2x+2y=4xy$； (2) $3a^2-a^2=3$；

(3) $-a^2-a^2=2a^2$； (4) $7x^2y-5xy^2=2x^2y$；

(5) $a^3+a^3=a^6$； (6) $(a-b)^2=a^2-b^2$。

3. 把下列各式分别按 x 的降幂排列，并求当 $x=\sqrt{2}$ 时的值。

(1) $-7+x^5-3x^2+4x-5x^3+6x^4$；

(2) $-6x+\sqrt{2}x^3-4x^2-1$。

4. 计算：

(1) $a(a+b)(a-b)-b(a+b)^2$；

(2) $3(x+5)(x+3)-5(x-2)(x-3)+2(x+1)(x-2)$；

(3) $(\sqrt{2}a^2-3b^2)-[-(a^2-2ab+b^2)+(\sqrt{2}a^2-2ab-3b^2)]$；

(4) $(x+3y)^2(x-3y)^2-(2x+y)^2(2x-y)^2$；

(5) $(a^2+2a+4)(a^2-2a+4)(a-2)(a+2)$；

(6) $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\left(x^2+\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}\right)$；

(7) $(x+y+z)(x+y-z)[(x+y)^2+z^2]$；

(8) $(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$；

(9) $(3a-2b)(9a^2+6ab+4b^2)$

$-(3a+2b)(9a^2-6ab+4b^2)$。

5.计算：

(1) $3x^2y^4z\div 6x^2yz$；

(2) $(-ab^4c^2)\div\left(-\frac{5}{6}abc^2\right)$；

(3) $(24x^2y^2-12x^4y^2+8x^2y^2)\div(-6x^2y)$；

(4) $(9x^4-3x^3+7x^2-3x-2)\div(3x+1)$。

三　多项式的因式分解

1.多项式的因式分解　把一个多项式化成几个整式的乘积叫做多项式的因式分解。

多项式的因式分解与数的范围有密切关系。一个多项式能不能分解因式，要根据在什么样的数的范围内进行因式分解来决定。例如，把 x^4-4 因式分解，如果要求在有理数范围内进行，那么

$$x^4-4=(x^2-2)(x^2+2)；$$

如果要求在实数范围内进行，那么

$$x^4-4=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2+2)；$$

如果要求在复数范围内进行，那么

$$x^4-4=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}i)(x+\sqrt{2}i)。$$

如果题目没有指明在什么样的数的范围分解时，都是要求在实数范围内分解。

注　因式分解所得各因式都必须是整式，因此，象

$$a-b=(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$$

这一类等式，作为应用公式计算是可以的，但不能认为是因式分解。

2.因式分解的一般方法

因式分解的方法一般有：提取公因式法，公式法，分组分解法。

(1) 提取公因式法　如果一个多项式的各项有公因式，就把这个公因式提到括号外面。多项式各项的公因式，通常取各项系数的最大公约数和各项的各相同字母的最低次幂的积。

(2) 公式法

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b);$$

$$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2;$$

$$a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3=(a\pm b)^3;$$

$$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)。$$

(3) 分组分解法　分组的目的在于能提取公因式或用公式。把一个多项式进行分组时，有时可用析项或添减项的方法。即把某一项析成几项或添减相同的项。

(4) 二次三项式的因式分解

对于二次三项式，还可用下面方法进行分解。

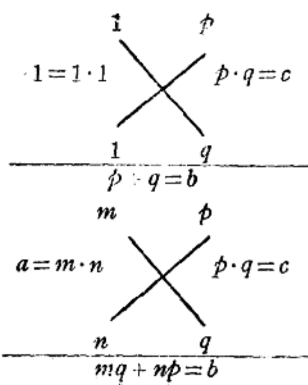
(Ⅰ) 配方法

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)。$$

(Ⅱ) 十字相乘法

$$x^2+bx+c$$
$$=x^2+(p+q)x+pq$$
$$=(x+p)(x+q)$$

$$ax^2+bx+c$$
$$=mnx^2+(mq+np)x+pq$$
$$=(mx+p)(nx+q)$$



因式分解的一般步骤：

(1) 先看这个多项式的各项有没有公因式，如果有，就