普通高中课程标准实验教科书

数学

基础训练

（人教A版 选修4-4）

山东省教学研究室 编

SHUXUE
JICHU XUNLIAN

山东教育出版社

普通高中课程标准实验教科书

（人教A版）

数学基础训练

（选修4－4）

山东省教学研究室　编

山 东 教 育 出 版 社

普通高中课程标准实验教科书

（人教 A 版）

数 学 基 础 训 练

（选修 4—4）

山东省教学研究室　编

出版者：山东教育出版社

（济南市纬一路 321 号　**邮编**：250001）

电　话：(0531)82092663　**传真**：(0531)82092661

网　址：http://www.sjs.com.cn

发行者：山东省新华书店

印　刷：荣成市印刷厂有限公司

版　次：2006 年 2 月第 1 版第 1 次印刷

规　格：787mm×1092mm　16 开本

印　张：4.75 印张

字　数：101 千字

书　号：ISBN 7—5328—5311—X

定　价：4.30 元

出版说明

根据教育部"为了丰富学生的课外活动，拓宽知识视野、开发智力、提高学生的思想道德素质和指导学生掌握正确的学习方法，社会有关单位和各界人士、各级教育部门、出版单位应积极编写和出版健康有益的课外读物"的精神，山东省教学研究室、山东教育出版社结合我省2004年全面进入普通高中新课程改革的实际需要，组织一批教育理念先进、教学经验丰富的骨干教师和教研人员编写了供广大师生使用的普通高中课程标准各科基础训练。

这套基础训练是依据教育部2003年颁布的《普通高中新课程方案(实验)》和普通高中各科课程标准以及不同版本的实验教科书编写的，旨在引导同学们对学科基本内容、知识体系进行归纳、梳理、巩固、提高，并进行探究性、创新性的自主学习，从而达到提高同学们的科学精神和学科素养，为同学们的终身发展奠定基础的目的。在编写过程中，充分体现了课程改革的理念，遵循教育和学习的规律，与高中教学同步；注重科学性、创新性、实用性的统一，正确处理获取知识和培养能力的关系，在学科知识得以巩固的前提下，加大能力培养的力度，兼顾学科知识的综合和跨学科综合能力的培养；同时，注意为同学们的继续学习和终身发展奠定坚实的基础。

《普通高中课程标准实验教科书(人教A版)数学基础训练》(选修4—4)可配合人教A版《普通高中课程标准实验教科书数学(选修4—4)》使用。本册由房增军、亓胜、周传荣、李强、张新元、孙召勇、吕峰、赵维浩编写，韩际清统稿。

目 录

第一讲 坐标系

我思故我在.

——笛卡儿

在几何里,没有专为国王铺设的大道.

—— 欧几里得

1.1 平面直角坐标系

学习目标

1. 回顾和总结建立适当的平面直角坐标系解决实际问题的过程.
2. 掌握平面直角坐标系中坐标伸缩变换的定义.
3. 在同一平面直角坐标系中,能够利用定义熟练进行曲线方程的坐标伸缩变换.

基础训练

1.1.1 平面直角坐标系

1. 选择题

(1) 在$\triangle ABC$中,底边BC长为8,顶点A到B、C两点距离之和为10,则顶点A的轨迹为(　　).

(A) 直线　　(B) 圆　　(C) 椭圆　　(D) 双曲线

(2) 已知平面内有一固定线段AB,且$|AB|=4$,动点P满足$|PA|-|PB|=3$,O为AB中点,则$|PO|$的最小值为(　　).

(A) 1　　(B) $\frac{3}{2}$　　(C) 2　　(D) 3

(3) 已知平面上两定点A、B且$|AB|=2$,动点P与两定点连线斜率乘积为-1,则动点P的轨迹是(　　).

(A) 直线　　(B) 圆　　(C) 椭圆　　(D) 双曲线

(4) 等腰直角三角形 ABC 中，$\angle C=90°$，P 为 AB 上任一点，则(　　).

(A) $|AP|^2+|BP|^2=2|CP|^2$　　(B) $|AP|^2+|BP|^2<2|CP|^2$

(C) $|AP|+|BP|=2|CP|$　　(D) $|AP|+|BP|>2|CP|$

2. 填空题

(1) 长为 $2a$ 的线段 AB 两个端点 A、B 分别在两条互相垂直的直线上滑动，则 AB 中点的轨迹方程是________.

(2) 已知函数 $f(x)=\sqrt{(x-1)^2+1}+\sqrt{(x+1)^2+1}$，则 $f(x)$的最小值为________.

(3) 已知正三角形 ABC 边长为 a，则平面上一点 P 与三顶点距离的平方和的最小值为________.

3. 用坐标法证明：平行四边形四边平方和等于两对角线平方和.

4. 一河流两侧有两个村庄 A、B，两村庄计划在河上共建一水电站供两村使用. 已知 A、B 两村到河边的垂直距离分别为 300 m 和 700 m，且两村相距 500 m. 试问水电站建于何处，送到两村的电线用量最省？

1.1.2 平面直角坐标系中的伸缩变换

1. 选择题

(1) $y=\cos x$ 经过伸缩变换 $\begin{cases}x'=2x,\\ y'=3y\end{cases}$ 后，曲线方程变为(　　).

(A) $y'=3\cos\dfrac{x'}{2}$　　(B) $y'=3\cos 2x'$

(C) $y'=\dfrac{1}{3}\cos\dfrac{x'}{2}$　　(D) $y'=\dfrac{1}{3}\cos 2x'$

(2) 直线 $2x+3y=0$ 经伸缩变换后变为 $x'+y'=0$，则该伸缩变换为(　　).

(A) $\begin{cases}x'=\dfrac{1}{2}x,\\ y'=3y\end{cases}$　　(B) $\begin{cases}x'=2x,\\ y'=3y\end{cases}$　　(C) $\begin{cases}x'=2x,\\ y'=\dfrac{1}{3}y\end{cases}$　　(D) $\begin{cases}x'=\dfrac{1}{2}x,\\ y'=\dfrac{1}{3}y\end{cases}$

(3) 函数 $y=2\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)$，先保持横坐标不变，将纵坐标 y 伸长为原来的 3 倍；再保持纵坐标不变，将横坐标 x 缩为原来的 $\frac{1}{2}$，则其函数为(　　).

(A) $y=\frac{2}{3}\sin\left(6x+\frac{\pi}{6}\right)$　　(B) $y=6\sin\left(6x+\frac{\pi}{6}\right)$

(C) $y=6\sin\left(6x+\frac{\pi}{3}\right)$　　(D) $y=\frac{2}{3}\sin\left(\frac{3}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)$

(4) 椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 经过伸缩变换 $\begin{cases} x'=\frac{x}{5}, \\ y'=\frac{y}{3} \end{cases}$ 后变为(　　).

(A) $\frac{x'^2}{625}+\frac{y'^2}{81}=1$　　(B) $\frac{x'^2}{25}+\frac{y'^2}{9}=1$

(C) $x'^2+y'^2=1$　　(D) $\frac{x'^2}{9}+\frac{y'^2}{25}=1$

2. 填空题

(1) $4x^2-9y^2=1$ 经过伸缩变换 $\begin{cases} x'=2x, \\ y'=3y \end{cases}$ 后变为________.

(2) 曲线 $y^2=x$ 经伸缩变换________后变为 $y'^2=4x'$.

(3) 设平面上一伸缩变换把 $A(1,-1)$ 变换为 $P(2,-3)$，则点 $B(-2,3)$ 在此变换下所对应的点是________.

3. 叙述一下 $y=af(\omega x)(a>0,\omega>0)$ 是由 $y=f(x)$ 如何变换得到的？

4. 在同一平面直角坐标系中，经过伸缩变换 $\begin{cases} x=2x', \\ y=4y' \end{cases}$ 后，曲线 C 变为 $4x'^2-16y'^2-4x'=0$，求曲线 C 方程并画图象.

探索与思考

如图 1.1-1,某粮食储备库占地呈圆域形状,它的斜对面有一条公路.从储备库中心 A 向正东方向走 1 km 是储备库边界上的点 B,接着向正东方向再走 2 km,到达公路上点 C;从 A 向正北方向走 2.8 km 到达公路上另一点 D.现准备在储备库的边界上选一点 E,修建一条由 E 通往公路 CD 的专用(线)路 EF,要求造价最低.问点 E 应选在何处?

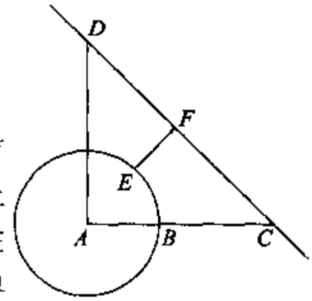

图 1.1-1

1.2 极坐标系

学习目标

1. 理解极坐标的有关概念,会建立极坐标系,会根据要求写出点的极坐标.
2. 理解极坐标与有序实数对之间的对应关系.
3. 能够熟练进行点的极坐标与直角坐标的互化.

基础训练

1.2.1 极坐标系的概念

1. 选择题

(1) 在极坐标系中,点(ρ,θ)与$(-\rho,\pi-\theta)$的位置关系是(　　).

(A) 关于极轴所在直线对称　　(B) 关于过极点且垂直于极轴的直线对称

(C) 重合　　(D) 关于极点对称

(2) 在极坐标系中,有序数对(ρ,θ)的集合 A 与平面上点的集合 B 的对应关系,是从 A

到 B 的(　　).

(A) 映射　(B) 一一映射　(C) 函数　(D) 一般的对应

(3) 以 $A\left(5,\frac{\pi}{2}\right)$, $B\left(8,\frac{5}{6}\pi\right)$, $C\left(-3,\frac{\pi}{6}\right)$为顶点的三角形是(　　).

(A) 直角三角形　(B) 等腰三角形　(C) 等边三角形　(D) 等腰直角三角形

(4) 设 $M(\rho_1,\theta_1)$, $N(\rho_2,\theta_2)$满足 $\rho_1+\rho_2=0$, $\theta_1+\theta_2=\pi$，那么 M、N 的关系是(　　).

(A) 重合

(B) 关于极点对称

(C) 关于过极点且垂直于极轴的直线对称

(D) 关于极轴对称

2. 填空题

(1) 已知 A、B 两点的极坐标为 $A\left(4,\frac{\pi}{3}\right)$, $B\left(6,-\frac{2}{3}\pi\right)$，则线段 AB 中点的极坐标是______.

(2) 点 $A\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$, $B\left(2,\frac{\pi}{4}\right)$, $C\left(-\sqrt{2},\frac{4}{3}\pi\right)$, $D\left(2,-\frac{\pi}{4}\right)$中在曲线 $\rho=2\sqrt{2}\cos\theta$ 上的点有______个.

(3) 设 A、B 两点的极坐标分别是 $A\left(-3,\frac{4}{3}\pi\right)$, $B\left(5,-\frac{5}{3}\pi\right)$，则 $|AB|=$______.

3. 在极坐标系中，如果等边三角形的两个顶点是 $A\left(2,\frac{\pi}{4}\right)$, $B\left(2,\frac{5}{4}\pi\right)$，则求第三个顶点 C 的坐标.

4. 已知点 A 的一个极坐标是$\left(5,\frac{\pi}{6}\right)$，试分别写出下列各点的极坐标：

(1) 点 A 关于极轴所在直线的对称点；

(2) 点 A 关于极点的对称点；

(3) 点 A 关于过极点且垂直于极轴的直线的对称点.

1.2.2 极坐标和直角坐标的互化

I

1. 选择题

(1) 原点与极点重合，x 轴正半轴与极轴重合，则把点 P 的直角坐标$(-3,4)$化为极坐标是(　　).

(A) $\left(-5,\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\right)$　　(B) $\left(-5,-\arccos\frac{3}{5}\right)$

(C) $\left(5,\arctan\frac{4}{3}\right)$　　(D) $\left(5,\arcsin\frac{4}{5}\right)$

(2) 原点与极点重合，x 轴正半轴与极轴重合，则点$(-6,-8)$的极坐标是(　　).

(A) $\left(10,\pi+\arctan\left(-\frac{4}{3}\right)\right)$　　(B) $\left(-10,\pi+\arctan\left(-\frac{4}{3}\right)\right)$

(C) $\left(-10,\pi+\arctan\frac{4}{3}\right)$　　(D) $\left(10,\pi+\arctan\frac{4}{3}\right)$

(3) 点 P 的直角坐标为$(1,-\sqrt{3})$，则点 P 的极坐标为(　　).

(A) $\left(2,\frac{\pi}{3}\right)$　　(B) $\left(2,\frac{4}{3}\pi\right)$　　(C) $\left(2,-\frac{\pi}{3}\right)$　　(D) $\left(-2,-\frac{4}{3}\pi\right)$

(4) 把极坐标方程 $\rho=2\sin\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)$化为直角坐标方程为(　　).

(A) $\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=1$　　(B) $y^2=2\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(C) $\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)=0$　　(D) $\frac{x^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=1$

2. 填空题

(1) 点 $A\left(-5,\frac{3}{4}\pi\right)$的直角坐标为________.

(2) 极坐标方程 $\rho=\cos\theta$ 的直角坐标方程是________________.

(3) 极坐标方程 $\rho\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=1$ 的直角坐标方程是________.

3. 化曲线 E 的极坐标方程：$k\rho\cos^2\theta+3\rho\sin^2\theta-6\cos\theta=0$ 为直角坐标方程，并说明曲线的形状.

4. 把直角坐标系的原点作为极点，x 轴的正半轴作为极轴，并且在两种坐标系中取相同的长度单位，若曲线的极坐标方程是 $\rho^2=\frac{1}{4\cos^2\theta-1}$，求它的直角坐标方程.

Ⅱ

1. 选择题

(1) 极坐标方程 $\rho=2\sin\theta+\cos\theta$ 所表示的曲线是(　　).

(A) 直线　(B) 圆　(C) 双曲线　(D) 抛物线

(2) 极坐标方程 $\rho=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$ 所表示的曲线是(　　).

(A) 双曲线　(B) 椭圆　(C) 抛物线　(D) 圆

(3) 极坐标方程 $\rho=\frac{4}{3-2\cos\theta}$ 所表示的曲线是(　　).

(A) 圆　(B) 双曲线右支　(C) 抛物线　(D) 椭圆

(4) 极坐标方程 $\rho\sin^2\frac{\theta}{2}=5$ 表示的曲线是(　　).

(A) 圆　(B) 椭圆　(C) 双曲线的一支　(D) 抛物线

2. 填空题

(1) 点 A 的直角坐标为 $(0,-2)$，则它的极坐标为________；点 B 的极坐标为 $\left(-2,-\frac{\pi}{3}\right)$，则它的直角坐标为________.

(2) $\rho=-4\cos\theta+\sin\theta$ 的直角坐标方程为________.

(3) 已知点 $P(-3,\sqrt{3})$，若极点 O' 的直角坐标为 $(-3+\sqrt{3},2\sqrt{3})$，极轴方向与 x 轴相同，两个坐标系的长度单位相同．则点 P 的极坐标为________.

3. 求过点 $A(a,0)$ 且倾角为 α 的直线的极坐标方程.

4. 写出 $x^2+y^2-\sqrt{x^2+y^2}-y=0$ 的极坐标方程.

探索与思考

直线 $y=-\sqrt{3}x(x\leqslant 0)$ 上有一定点 A，过 A 引直线交 x 轴于 B，并与直线 $y=\sqrt{3}x(x\geqslant 0)$ 交于点 C，当 B 点在 x 轴的负半轴时，求证：$\frac{1}{|OA|}=\frac{1}{|OB|}+\frac{1}{|OC|}$.

1.3 简单曲线的极坐标方程

学习目标

1. 熟练掌握直线和圆的极坐标方程的求法，并能够进行极坐标方程与直角坐标方程的互化.

2. 通过比较，体会极坐标在解决个别问题中的优越性，提高分析问题、解决问题的灵活性.

基础训练

1.3.1 圆的极坐标方程

I

1. 选择题

(1) 极坐标系中，以点 $\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$ 为中心，且过极点的圆的极坐标方程是(　　).

(A) $\rho=\sin\theta$　　(B) $\rho=\cos\theta$　　(C) $\rho=2\sin\theta$　　(D) $\rho=2\cos\theta$

(2) 在极坐标系中，方程 $\rho=6\cos\theta$ 表示的曲线是(　　).

(A) 以点 $(-3,0)$ 为圆心，3 为半径的圆

(B) 以点$(3,\pi)$为圆心，3 为半径的圆

(C) 以点$(3,0)$为圆心，3 为半径的圆

(D) 以点$\left(3,\frac{\pi}{2}\right)$为圆心，3 为半径的圆

(3) 极坐标方程$\rho=\sin\theta+2\cos\theta$所表示的曲线是(　　).

(A) 圆　　(B) 椭圆　　(C) 双曲线　　(D) 抛物线

(4) 已知两圆的极坐标方程分别是$\rho=2\cos\theta$和$\rho^2-2\sqrt{3}\rho\sin\theta+2=0$，则两圆的位置关系是(　　).

(A) 相离　　(B) 外切　　(C) 内切　　(D) 相交

2. 填空题

(1) 已知$f(\rho,\theta)=0$是曲线C的极坐标方程，那么点$P(\rho,\theta)$的坐标适合方程$f(\rho,\theta)=0$是点P在曲线C上的____________条件.

(2) 在极坐标系中，以$\left(\frac{a}{2},\frac{\pi}{2}\right)$为圆心，$\frac{a}{2}$为半径的圆的方程是________.

(3) 已知$A(1,0)$，$B(1,\pi)$，$|MA|\cdot|MB|=1$，则动点M的轨迹方程是________.

3. 从极点O引定圆$\rho=2\cos\theta$的弦OP，延长OP到Q，使$\frac{OP}{PQ}=\frac{2}{3}$，求点$Q$的轨迹方程，并说明所求轨迹是什么图形.

4. 已知半径为R的定圆O'外有一定点O，$|OO'|=a(a>R)$，P为定圆O'上的动点，以OP为边作正三角形OPQ，求Q点的轨迹的极坐标方程.

II

1. 选择题

(1) 两圆$\rho=2\cos\theta$和$\rho=2\sin\theta$的圆心距为(　　).

(A) 2　　(B) $\sqrt{2}$　　(C) 1　　(D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(2) $\odot A$：$\rho=8\sin\theta$，点M在圆上，且极角为$\frac{\pi}{3}$，则$\triangle OAM$的面积等于(　　).

(A) 4　　(B) $2\sqrt{3}$　　(C) $\sqrt{3}$　　(D) $4\sqrt{3}$

(3) 以极坐标系中的点(1,1)为圆心,1为半径的圆的方程是(　　).

(A) $\rho=2\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$　　(B) $\rho=2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$

(C) $\rho=2\cos(\theta-1)$　　(D) $\rho=2\sin(\theta-1)$

(4) 在极坐标系中,曲线 $\rho=4\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$关于(　　).

(A) 直线 $\theta=\frac{\pi}{3}$成轴对称　　(B) 直线 $\theta=\frac{5}{6}\pi$ 成轴对称

(C) 点$\left(2,\frac{\pi}{3}\right)$成中心对称　　(D) 极点成中心对称

2. 填空题

(1) 极坐标方程 $\theta=\frac{\pi}{3}$, $\theta=\frac{2}{3}\pi(\rho\geqslant 0)$ 和 $\rho=4$ 所表示的曲线围成的图形面积是________.

(2) 过定圆 $\rho=a\cos\theta(a>0)$上点(0,0)作圆的任意弦 OM,求得弦的中点 P 的轨迹方程是 $\rho=4\cos\theta$,则 $a=$________________.

(3) 直线 $\rho\sin\theta=4$ 与 $\rho=4\sin\theta$ 相切,则切点到点(1,0)的距离是________________.

3. 从极点 O 作圆 $C:\rho=8\cos\theta$ 的弦 ON,求 ON 中点 M 的轨迹方程.

4. 在极坐标系中,已知圆 C 的圆心为$\left(3,\frac{\pi}{3}\right)$,半径为3,$Q$点在圆周上运动.

(1) 求圆 C 的极坐标方程;

(2) 若 P 是 OQ 中点,求 P 的轨迹.

1.3.2 直线的极坐标方程

1. 选择题

(1) 极坐标系中,过点$\left(-2,\frac{\pi}{3}\right)$且与极轴垂直的直线方程是(　　).

(A) $\rho=-4\cos\theta$　　(B) $\rho\cos\theta+1=0$　　(C) $\rho\sin\theta=-\sqrt{3}$　　(D) $\rho=-\sqrt{3}\sin\theta$

(2) 极坐标方程 $\cos\theta=\frac{1}{2}(0\leqslant\theta<\pi,\rho>0)$ 表示的图形是(　　).

(A) 一条直线　　(B) 一条射线　　(C) 两条直线　　(D) 两条射线

(3) 极坐标方程 $4\sin^2\theta=3$ 表示的曲线是(　　).

(A) 两条射线　　(B) 两条相交直线

(C) 圆　　(D) 抛物线

(4) 极点到直线 $\rho=\frac{\sqrt{3}}{\sin\theta+\cos\theta}$ 的距离是(　　).

(A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　(B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　(C) $\frac{\sqrt{6}}{2}$　　(D) 1

2. 填空题

(1) 直线 $\rho\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=3$ 与 $\rho\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=3$ 的位置关系是________.

(2) 经过 $A\left(3,\frac{\pi}{3}\right)$,$B\left(3,\frac{\pi}{6}\right)$ 的直线与极轴的角为________

(3) 曲线 $\rho\sin\theta=2$ 和 $\rho=4\sin\theta(\rho>0,0\leqslant\theta<2\pi)$ 的交点坐标是________.

3. 求曲线 $\rho\cos\theta+1=0$ 关于直线 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 对称的曲线方程.

4. 求证:经过点 $A(\rho_1,\theta_1)$ 且与极轴成 α 角的直线方程是 $\rho\sin(\theta-\alpha)=\rho_1\sin(\theta_1-\alpha)$.

探索与思考

已知椭圆 $\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{16}=1$,直线 $l:\frac{x}{12}+\frac{y}{8}=1$,$P$ 是 l 上的点,射线 OP 交椭圆于 R,又点 Q 在 OP 上,且满足 $|OQ|\cdot|OP|=|OR|^2$,当点 P 在 l 上移动时,求点 Q 的轨迹方程,并说明轨迹是什么曲线?