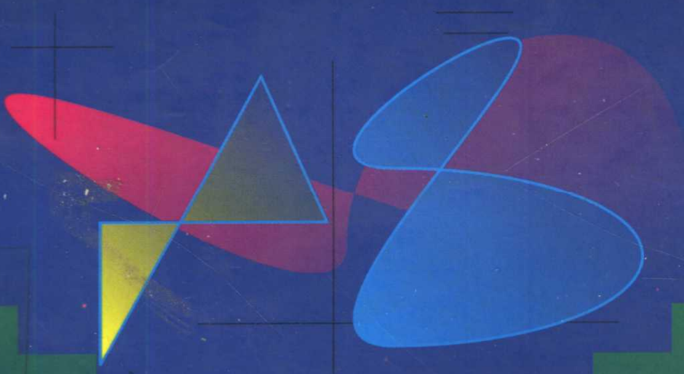
初二

素质培养梯度练习

数学

SHUXUE

主编 孔令颐



北京工业大学出版社

素质培养梯度练习

数　　学

（初二）

主编　孔令颐

北京工业大学出版社

内 容 简 介

本书以国家教委全日制中学各科教学大纲和人民教育出版社“六三”制中学课本为依据，采取基本上与教材内容同步的方法，由从教多年的名校名师按章编写，每章分为知识要点与能力要求、典型例题解析、能力训练练习、自测题四部分，内容包括因式分解、分式、数的开方、二次根式、三角形、四边形、相似形．书中精选精编了大量名校名师反复使用多年且证明行之有效的训练题和自测题，既体现了所应掌握的知识的基点、要点，又突出了重点和难点，先易后难，循序渐进，体现了一定的知识梯度．

本书既可用于会考复习，又可用于各类升学考试的能力训练，也能满足兴趣更加广泛的同学使用．

素质培养梯度练习

数学（初二）

主编　孔令颐

北京工业大学出版社出版发行

各地新华书店经销

1997年8月第1版　1997年8月第1次印刷

787mm×1092mm　32开本　8.875印张　195千字

印数：1～15000册

LSBN 7-5639-0615-0/G・342

定价 9.00元

前　言

怎样将基础教育阶段的素质培养与应试能力训练融为一体，以便在提高学生素质、巩固所学知识的前提下，优化学生的智能结构，增强学生的应试能力，这是当前教育界、学生和家长普遍关心的一个热点问题．为了在这方面作一尝试并力争有所突破，我们组织北京市部分名校名师编写了这套《素质培养梯度练习》丛书．本丛书共包括九年义务教育三年制初中《语文》《数学》《英语》，每个年级各1册，《物理》初二、初三各1册，《化学》初三1册，总计12册．今后，随着高中教材的更新，还将陆续出版高中各年级的相应用书．本书主要有以下几个特点．

1．本书为《素质培养梯度练习》丛书数学（初二）分册，是以国家教委九年义务教育全日制中学现行课本为依据，结合我国目前基础教育的实际情况，采用基本上与教材内容同步，并广泛应用一些优秀教学指导学的理论精编而成的。依照学科特点，本书按章编写，每章分为“知识要点与能力要求”、“典型例题分析”和“能力训练练习”、“自测题”四部分，书中附有练习题参考答案，有些题还给出提示或解题指导．通过以上四部分的有机结合，使素质培养与能力训练融为一体．

2．本书融汇了多位知名教师从教多年的教学经验和教育成果，在“知识要点和能力要求”中，不但集中了知识精髓和知识网络，而且明确地提出了对素质培养和能力训练的

要求．书中绝大部分练习选自一些名校曾多次使用过的优良题型，具有较高的可信性、典型性和适用性．其中，一小部分习题作为“典型例题”，详细剖析以作示范，旨在启发学生的解题思路，而绝大部分习题作为训练练习题安排在有关的“能力训练练习”中．在“参考答案”中除给出答案外，对重点题、难点题还附有“提示”、“解法”，或多种解法的对比．本书的大量优秀练习反映了名校名师精选精编的水平，对于学习者掌握知识的基点、要点、重点和难点很有帮助．

3．“能力训练练习”中的题目是按梯度由易到难安排的，一般是先易后难，循序渐进．为了适应不同能力读者的需要，书中的训练练习题分为不同梯度并作了标示．第一梯度（不打＊号）为必会题、基本题；第二梯度（打＊号）为重点题难点题．这样，本书既可用于会考复习，又可用于各类升学考试的能力训练，还可满足兴趣更加广泛的同学使用．

本分册由孔令颐主编，由曹林杰、蒋哲敏、华桦等参加编写。

本丛书组编委员会

1997年3月

目　　录

第一部分　代　　数

第二部分 几　　何

第一部分

代　数

第一章　因式分解

【知识要点和能力要求】

一、知识要点

1. 因式分解——把一个多项式化为几个整式的积的形式，叫做把这个多项式因式分解，也叫做把这个多项式分解因式．

2. 提公因式法——如果多项式的各项有公因式，可以把这个公因式提到括号外面，将多项式写成因式乘积的形式，这种分解因式的方法叫做提公因式法．

3. 运用公式法——把乘法公式反过来，对某些多项式进行因式分解的方法叫做运用公式法．

（1）平方差公式：$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$．

（2）完全平方公式：$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$，

$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2.$$

（3）立方和公式：$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$，

立方差公式：$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

4. 分组分解法——利用分组来分解因式的方法叫做分组分解法．

5. 十字相乘法——借助画十字交叉线分解系数，从而把二次三项式分解因式的方法叫做十字相乘法．

$$a_1a_2x^2 + (a_1c_2 + a_2c_1)x + c_1c_2 = (a_1x + c_1)(a_2x + c_2).$$

特例：二次项系数是1.

$$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b).$$

6. 多项式因式分解的一般步骤：

（1）如果多项式的各项有公因式，那么先提公因式；

（2）如果各项没有公因式，那么可以尝试运用公式来分解；

（3）如果用上述方法不能分解，那么可以尝试用分组或其他方法（例如十字相乘法）来分解；

（4）分解因式，必须进行到每一个多项式因式都不能再分解为止.

二、能力要求

1. 了解因式分解的意义及其与整式乘法的区别和联系，了解因式分解的一般步骤.

2. 掌握以下四种分解因式的基本方法，会用这些方法进行因式分解：

（1）提公因式法（字母的指数是数字）；

（2）运用公式法（直接用公式不超过两次）；

（3）分组分解法（分组后能直接提取公因式或运用公式的多项式，无需拆项或添项）；

（4）十字相乘法（二次项系数与常数项的积为绝对值不大于60的整系数二次三项式）.

【典型例题解析】

【例1】 什么是因式分解？因式分解时要注意什么？

答：把一个多项式化为几个整式的积的形式，叫做把这

个多项式因式分解，也叫做把这个多项式分解因式．

因式分解要注意以下几点：

（1）因式分解的结果只能是几个整式的积；

（2）因式分解与乘法的运算过程相反，即可以用乘法来检验因式分解是否正确，看乘出的结果是否等于原式；

（3）分解因式必须进行到每一个因式都不能再分解为止．

【例 2】 改错并写出错误原因：

（1）$x^2y(x+y)-5xy(x+y)=x(x+y)(xy-5y)$；

（2）$2x^3+4x^2+6x+2=2(x^3+2x^2+3x)$；

（3）$-ax^2+bx-cx=x(-ax+b-c)$；

（4）$x(x-y)-y(y-x)=(x-y)^2$.

分析 运用提公因式法要注意：①公因式要提尽；②不要漏掉“1”；③首项要取正号；④公因式是多项式时，要注意符号问题．

解 （1）公因式有 xy 和 $(x+y)$．

$$x^2y(x+y)-5xy(x+y)=xy(x+y)(x-5).$$

（2）漏掉“1”．

$$2x^3+4x^2+6x+2=2(x^3+2x^2+3x+1).$$

（3）首项的“－”号要提出，括号内多项式的首项应为“＋”．

$$-ax^2+bx-cx=-x(ax-b+c).$$

（4）符号错误．

$$\begin{aligned}x(x-y)-y(y-x)&=x(x-y)+y(x-y)\\&=(x-y)(x+y).\end{aligned}$$

【例 3】 填空：

(1) $4(x-y)^2-(\underline{\qquad})^2=(x-3y)(3x-y)$；

(2) $\frac{1}{3}x^4-\underline{\qquad}=\frac{1}{3}x^2(x+1)(x-1)$；

(3) $x^2+\underline{\qquad}+4y^2=(x-2y)^2$；

(4) $x^{n+2}+\underline{\qquad}+x^n=x^n(x+1)^2$；

(5) $\underline{\qquad}-8a=a(a-2)(a^2+2a+4)$；

(6) $x^{(\ )}-1=(x+1)(x-1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$.

分析 运用公式法分解因式，多项式有三种基本形式：①可化为 $(\quad)^2-(\quad)^2$，运用平方差公式；②可化为 $(\quad)^2\pm2(\quad)(\quad)+(\quad)^2$，运用完全平方公式；③可化为 $(\quad)^3\pm(\quad)^3$，运用立方和或立方差公式．本题运用整式乘法（乘法公式）求解，这也是验证因式分解是否正确的方法，特别要注意次数、系数和符号．

解 (1) $4(x-y)^2-\underline{(x+y)^2}=(x-3y)(3x-y)$；

(2) $\frac{1}{3}x^4-\underline{\frac{1}{3}x^2}=\frac{1}{3}x^2(x+1)(x-1)$；

(3) $x^2+\underline{(-4xy)}+4y^2=(x-2y)^2$；

(4) $x^{n+2}+\underline{2x}^{n+1}+x^n=x^n(x+1)^2$；

(5) $\underline{a}^4-8a=a(a-2)(a^2+2a+4)$；

(6) $x^{(6)}-1=(x+1)(x-1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$.

【例 4】 利用公式分解因式：

(1) $16x^4-72x^2+81$；

(2) $(a^2+4b^2)^2-16a^2b^2$；

(3) $2m^2n^2-\frac{1}{3}(m^4+4m^2n^2+n^4)$；

(4) $x^{6n+1}-2x^{3n+1}+x$.

分析 多项式的次数为 4 次或 4 次以上时，可能需要多

次使用公式，应分析多项式的特点，灵活运用公式，注意结果不能再分解．

解 (1)

$$
\begin{aligned}
&16x^4-72x^2+81\\
=&(4x^2-9)^2\\
=&(2x+3)^2(2x-3)^2;
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
&(a^2+4b^2)^2-16a^2b^2\\
=&(a^2+4b^2)^2-(4ab)^2\\
=&(a^2-4ab+4b^2)(a^2+4ab+4b^2)\\
=&(a-2b)^2(a+2b)^2;
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
&2m^2n^2-\frac{1}{3}(m^4+4m^2n^2+n^4)\\
=&-\frac{1}{3}(-6m^2n^2+m^4+4m^2n^2+n^4)\\
=&-\frac{1}{3}(m^4-2m^2n^2+n^4)\\
=&-\frac{1}{3}(m^2-n^2)^2\\
=&-\frac{1}{3}[(m+n)(m-n)]^2\\
=&-\frac{1}{3}(m+n)^2(m-n)^2;
\end{aligned}
$$

(4)

$$
\begin{aligned}
&x^{6n+1}-2x^{3n+1}+x\\
=&x(x^{6n}-2x^{3n}+1)\\
=&x(x^{3n}-1)^2\\
=&x[(x^n-1)(x^{2n}+x^n+1)]^2\\
=&x(x^n-1)^2(x^{2n}+x^n+1)^2.
\end{aligned}
$$

【例 5】 证明：

(1) $(x^2-y^2)^2-2(x^2+y^2)(x+y)^2=-(x+y)^4$；

(2) $x^6-\frac{1}{64}$

$$=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)\left(x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right).$$

分析 因式分解可用来做证明题，证明的过程就是因式分解的过程．

证明(1)
$$\begin{aligned}&(x^2-y^2)^2-2(x^2+y^2)(x+y)^2\\
=&(x+y)^2(x-y)^2-2(x^2+y^2)(x+y)^2\\
=&(x+y)^2[(x-y)^2-2(x^2+y^2)]\\
=&(x+y)^2(x^2-2xy+y^2-2x^2-2y^2)\\
=&-(x+y)^2(x^2+2xy+y^2)\\
=&-(x+y)^2(x+y)^2\\
=&-(x+y)^4.\end{aligned}$$

(2) **法一** 先用平方差公式：

$$x^6-\frac{1}{64}$$

$$=(x^3)^2-\left(\frac{1}{8}\right)^2$$

$$=\left(x^3+\frac{1}{8}\right)\left(x^3-\frac{1}{8}\right)$$

$$=\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)\left(x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right).$$

法二 先用立方差公式：

$$x^6-\frac{1}{64}$$

$$=(x^2)^3-\left(\frac{1}{4}\right)^3$$

$$=\left(x^2-\frac{1}{4}\right)\left(x^4+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{16}\right)$$

$$=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left[\left(x^2+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{x^2}{4}\right]$$

$$=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)\left(x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right).$$

√**【例 6】** 用分组分解法分解因式：

(1) $ax+by+ay+bx$；

(2) $3ax+5ay-3bx-5by$；

(3) $x^2+2xy+y^2-a^2+2ab-b^2$；

(4) $x^2+y^2-2xy+2x-2y+1$.

分析 分组分解法是提公因式法和运用公式法的综合运用，由于多项式的形式各异，分组的方法也有差异，因此，要具体问题具体分析，尽量做到有目的的分组，也就是说要有“预见性”．为此，除了理解掌握概念和方法，还应多做练习，总结经验，找出规律．一般来说，分组分解法的原则是：分组后能提公因式或运用公式，组间能继续提公因式或运用公式．

解 (1) **法一** 按字母 x、y 分组．

$$\begin{aligned}&ax+by+ay+bx\\=&(ax+bx)+(ay+by)\\=&x(a+b)+y(a+b)\\=&(x+y)(a+b).\end{aligned}$$

法二 按字母 a、b 分组．

$$\begin{aligned}&ax+by+ay+bx\\=&(ax+ay)+(bx+by)\\=&a(x+y)+b(x+y)\\=&(a+b)(x+y).\end{aligned}$$

（2）按系数相同的项分组．

$$
\begin{aligned}
&3ax+5ay-3bx-5by\\
=&(3ax-3bx)+(5ay-5by)\\
=&3x(a-b)+5y(a-b)\\
=&(a-b)(3x+5y).
\end{aligned}
$$

（3）分组后先用完全平方公式，组间再用平方差公式．

$$
\begin{aligned}
&x^2+2xy+y^2-a^2+2ab-b^2\\
=&(x^2+2xy+y^2)-(a^2-2ab+b^2)\\
=&(x+y)^2-(a-b)^2\\
=&(x+y-a+b)(x+y+a-b).
\end{aligned}
$$

（4）分组成完全平方公式的三项，其中第一项也运用完全平方公式，第二项提公因式．

$$
\begin{aligned}
&x^2+y^2-2xy+2x-2y+1\\
=&(x^2-2xy+y^2)+2(x-y)+1\\
=&(x-y)^2+2(x-y)+1\\
=&(x-y+1)^2.
\end{aligned}
$$

【例 7】 用十字相乘法分解因式：

（1）$x^2-7x+12$；　　（2）$x^2+4x-12$；

（3）$6x^2-x-12$；　　（4）$24x^2-19x-35$.

分析 十字相乘法适用于某些二次三项式，其要领是“首尾分解，交叉相乘，求和凑中，观察试验”．应用时要注意以下几点：①如果常数项 q 是正数，则把它分解为两个同号因数，它们的符号与一次项系数 p 的符号相同；如果常数项 q 是负数，则把它分解成两个异号因数，其中绝对值较大的因数与一次项系数 p 的符号相同；②对于分解的两个因数，还要看它们的和是不是等于一次项的系数 p；③分解因数和十字相乘都有多种可能，往往需多次尝试．