

S 中考攻略密技 go

$$\pi \times 15^2 \times \frac{144}{360} = 90\pi (\text{cm}^2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty}$$

B

40°

T



中考数学

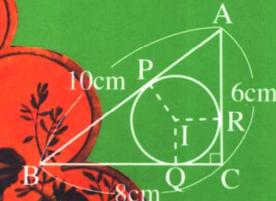
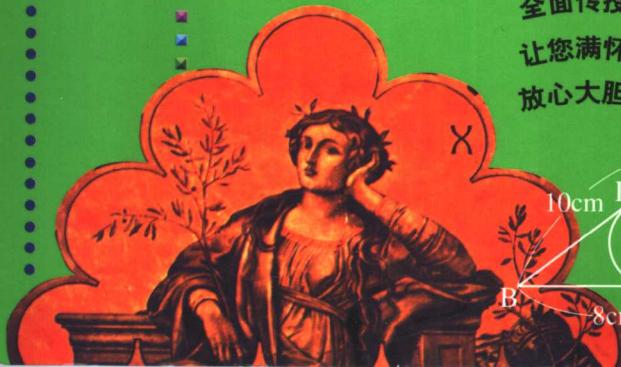
SUPER

决胜版

本书每章均配备实力测验 便于自主学习 随时检测

拖页集合全书所有知识点 总结精华 强化记忆

名校名师精心撰写，
直接命中数学要害，
深深积淀字字珠玑，
全面传授毫无保留。
让您满怀信心拿高分，
放心大胆创佳绩！



S



中考数学

U
P
E
R

决胜版

S



图书在版编目(CIP)数据

无敌中考数学·决胜版/金宝铮等著. -北京: 外文出版社, 2006
(无敌系列丛书)

ISBN 7-119-04390-0

I. 尤... II. 金... III. 数学课—初中—升学参考资料 IV. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 021918 号



无敌数学系列

无敌中考数学 决胜版

2006 年 4 月第 1 版

2006 年 4 月第 1 版第 1 次印刷

• 出版: 外文出版社·北京市西城区百万庄大街 24 号·邮编 100037 • 经销: 新华书店/外文书店

• 印刷: 北京市京津彩印有限公司 • 印次: 2006 年 4 月第 1 版第 1 次印刷

• 开本: 1/32, 889×1194mm, 8.75 印张 • 书号: ISBN 7-119-04390-0 • 定价: 28.00 元

总监制·王华荣

创意制作·无敌编辑工作室

总审订·金宝铮 书 蘭

撰稿·王 爽 书 蘭 崔佳佳 李 燕

曾研华 王张平 冯志华

总编辑·吴楷霖

编政管理·陈郁希

责任编辑·齐海文

文字编辑·王冬军(组长) 安丽雯

王延兰 张亚娟

平面制作·郑智军

插图绘制·finger 工作室

封面设计·周尚文

行销企划·北京光海文化用品有限公司

北京市海淀区车公庄西路乙19号北塔六层

邮编: 100044

集团电话·(010)88018838(总机)

发行部·(010)88018956(专线)

订购传真·(010)88018952

汇款地址·北京市海淀区车公庄西路乙19号北塔六层

邮编: 100044

收款人: 光海公司

读者服务·(010)88018838 转 53, 54(分机)

选题征集·(010)88018958(专线)

E-mail·service@super-wudi.com

网址·http://www.super-wudi.com

■ 2006 年 4 月外文社第 1 版 ■ 2006 年 4 月第 1 次印刷

"无敌"商标专用权经国家工商行政管理局核准,由北京光海文化用品有限公司享有

本书图文与版型设计非经书面授权不得使用;版权所有,侵权必究

法律顾问: 中伦文德律师事务所 沈恒德律师、符霜叶律师



提升能力总结方法

获取信心与成绩

虽然同学们历经过无数次考试,但是参加具有选拔功能的考试,中考应该是首次。家长充满了无限的期待,老师倾注了全部的心血,同学们也是跃跃欲试。然而美好的愿望和对未来的憧憬,需要通过脚踏实地的努力来实现。

中考数学复习是对初中数学知识的总结与回顾,更重要的是能力与方法的提升。本书将初中数学的内容,依据知识与能力分成九个模块,在每个模块中,均详尽叙述考试要求,解析考试重点,总结解题方法,指导考试要领,从而达到全面提高能力、提高学习成绩的双重目的。

优质教育资源共享是诸多考生与家长梦寐以求的愿望,我们特别邀请北京师大二附中的老师为

本书撰稿,将他们多年指导学生中考成功的教学经验融于此书,使得更多的学生与家长梦想成真。

尽管目前各地使用的数学教材有所不同,但是这些教材的编写都是依据教育部颁布的课程标准编写而成,我们这本中考数学复习指导书同样依据课程标准编写,适用于各地学生参加中考复习使用。

我们真诚期望能为参加中考的学生指点迷津,并祝愿我们的读者升入理想的学校。

最后谨向本书的作者:王爽、崔佳佳、李燕、曾研华、王张平、冯志华的辛勤工作,致以最高的敬意

总审订:金宝铮 韦蔷

2006年3月于北京

本书使用说明

全书结构

各章的构成

中考生必备·最重点

基础牢固

战力养成

权威总结·知识点分析

解析考点·得分关键

考试陷阱·全面防范

重点突击·最新题型

实力测验·解答

● 中考生必备·最重点

每章开始前的知识要点文字归纳，提纲挈领，总括本章。

中考必备·最重点

● 重点复习数与式的相关知识
数与式作为初中数学的基础知识，有许多的概念、性质与运算等内容。
初中“数”的教学包括两部分内

上述特点，不要把数与式割裂。如：对于分数的性质与分式的性质，努力去把握其相同点与不同点。
● 数与式的学习方法

● 基础牢固

该章节所有知识要点、公式定理的提炼，是重中之重，必须牢牢掌握。

超重！！！

1 基础牢固

考基重点！

I 方程的有关概念

● 战力养成

以例题形式讲解定义、公式、性质……帮助加深概念的理解，数学战斗力逐步培养。

题型大观！！

2 战力养成

精心点拨！

① 权威总结·知识点分析

如右图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $AB=4$ ， $AC=3$ 。
求 $\angle A$ 的四个三角函数值。



解：

在 $\triangle ABC$ 中，

$\angle C=90^\circ$ ， $AB=4$ ， $AC=3$ ，

$BC=\sqrt{AB^2-AC^2}$

$=\sqrt{7}$ 。

$\sin A=\frac{\sqrt{7}}{4}$ ， $\cos A=\frac{3}{4}$ ， $\tan A=\frac{\sqrt{7}}{3}$ ，

$\cot A=\frac{3\sqrt{7}}{7}$ 。

由分析得：

当根据三角函数定义求一个角的某个三角函数值时，应首先确定这个角是否是直角三角形中的一个锐角，不然则需构造直角三角形或进行等角转化；然后，确定该角所在直角三角形中的对边、邻边或斜边的长再进行计算求值。

② 在 $\triangle ABC$ 中，若各边的长度同时扩大3倍，则锐角A的正弦值和余切值（）。

A. 都不变

B. 都扩大3倍

C. 正弦值扩大3倍，余切值缩小3倍

D. 不能确定

答：B. 都扩大3倍

当一个角的任一三角函数值只与该角的度数大小有关，而与它所在的直角三角形相似，所以各角大小不变。

故选A。

③ (1) $\cos^2 45^\circ - \tan^2 45^\circ + \sin^2 60^\circ$ ，(2) $\sin 15^\circ + \tan 20^\circ - \tan 80^\circ + \sin 75^\circ$ 。

$\sin^2 30^\circ + \tan 30^\circ \cdot \cos 30^\circ$

● 权威总结·知识点分析

本章节知识点的分析总结，令你理清思路，脱颖而出。

● 指导

将一类问题典型的解题思路、方法和容易犯错失分的陷阱特别归纳指出，是应考的提分秘诀。

特色要点

勤能补拙!

- 针对中考,突出主干:**专门针对最新中考数学命题趋势,由名师为你梳理知识脉络,权威又高效。
- 配合课改,培养技巧:**密切配合最新课改理念,用丰富的例题,详细的讲解,培养你高超的应考技巧。
- 注重能力,轻松应考:**精选例题强化能力训练,举一反三,轻松应对百变考场,得分最有效。
- 新增考点,创新实践:**新增内容重点练习,让所有新考点、新题型了然于心,上线提分最关键。

② 解析考点 得分关键

21. 去年1~7月份某一天的最低气温为 -5°C ,最高气温为 13°C ,那么这一天的温差(即最高气温比最低气温高)是()。

- A. -18°C B. 18°C C. 13°C D. 5°C

◆ ◆ 13-(-5)=18,
这道题考查负数的意义和有理数运算。
故选B.

22. 下列运算中正确的是()。

- A. $-\frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = -\frac{1}{25}$ B. $-(+2)=-2$ C. $3 \times -9 = -9$ D. $(-\frac{1}{2}) \times \frac{1}{8} = -\frac{1}{16}$

◆ ◆ B项, (-2)+2=0;
C项, $3 \times (-9) = -27$ 。
故选A.

③ 考点集锦 得分关键

以往考试中涉及到本章知识的考点集合,掌握好它是得分的关键。

随时提醒学生应注意的地方。

④ 考试陷阱 全面防范

23. 若一个三角形三边长的满足方程 $x^2+8x+16=0$,则该三角形的周长是()。

◆ ◆ 方程 $x^2+8x+16=0$ 的解为 $x_1=x_2=-4$ 。当三边长均为 4 时,周长为 12 ;由于三角形的两边均满足方程。
故选A.

⑤ 考试陷阱 全面防范

特别指出在考试中容易出错丢分的地方,答题正确更有保证。

⑥ 重点追击 最新题型

24. 已知点D在直线AB上,线段AC \parallel CB,AD,DB的长满足 $AC:CB=5:4$, $AD:DB=2:1$,且 $CD=2\text{cm}$.求线段AB的长。

◆ ◆ 题意可知:若点B,D,C在同一直线上,则 $CD=BD-BC=2$;

⑦ 新题型 新题型

新题型密切贴近最新中考命题趋势,考试成功更有把握。

⑧ 练习题库

精智 P032

1. 在 $\triangle ABC$ 中, $\frac{2}{3} \times \angle A + \angle B = \frac{\pi}{8}$, $\angle A=\angle B=\angle C$,则 $\angle C$ 的度数是()。

- A. 60° B. 65° C. 70° D. 75°

2. 下列计算中,正确的()。

- A. $\sqrt{4}=2\sqrt{2}$ B. $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b}$

- C. $\sqrt{a^2+b^2}=a+b$ D. $a\sqrt{b}-b\sqrt{a}=(a-b)\sqrt{ab}$

3. 随着通讯市场竞争日益激烈,某通讯公司的手机话费收费标准按阶梯式计算。

⑨ 习题 习题

• **习题:**采用练习题的形式帮助你检查学习成效。

• **解答:**配编标准答案,依据题目难易程度提供思路或详解供参考。

目 录

第1章 数与式

撰稿:崔佳佳

| | |
|----------------------|-----|
| ◆ 中考生必备·最重点 | 008 |
| ◆ 基础牢固·数与式基础知识汇总 | 009 |
| ◆ 战力养成 | 012 |
| ① 权威总结·知识点分析 例题 20 道 | 012 |
| ② 解析考点·得分关键 例题 37 道 | 017 |
| ③ 考试陷阱·全面防范 例题 7 道 | 027 |
| ④ 重点追击·最新题型 例题 7 道 | 029 |
| ◆ 实力测验 | 031 |
| ◆ 答案与解法 | 032 |

第2章 方程(组)和不等式(组)

撰稿:崔佳佳

| | |
|---------------------------|-----|
| ◆ 中考生必备·最重点 | 034 |
| ◆ 基础牢固·方程(组)和不等式(组)基础知识汇总 | 035 |
| ◆ 战力养成 | 039 |
| ① 权威总结·知识点分析 例题 16 道 | 039 |
| ② 解析考点·得分关键 例题 34 道 | 044 |
| ③ 考试陷阱·全面防范 例题 5 道 | 057 |
| ④ 重点追击·最新题型 例题 3 道 | 059 |
| ◆ 实力测验 | 061 |
| ◆ 答案与解法 | 062 |

第3章 函数及其图象

撰稿:王爽

| | |
|-------------|-----|
| ◆ 中考生必备·最重点 | 064 |
|-------------|-----|

| | |
|----------------------|-----|
| ◆ 基础牢固·函数及其图象基础知识汇总 | 065 |
| ◆ 战力养成 | 069 |
| ① 权威总结·知识点分析 例题 19 道 | 069 |
| ② 解析考点·得分关键 例题 21 道 | 081 |
| ③ 考试陷阱·全面防范 例题 8 道 | 092 |
| ④ 重点追击·最新题型 例题 4 道 | 098 |
| ◆ 实力测验 | 101 |
| ◆ 答案与解法 | 102 |

第4章 概率与统计

撰稿:曾研华

| | |
|---------------------|-----|
| ◆ 中考生必备·最重点 | 104 |
| ◆ 基础牢固·概率与统计基础知识汇总 | 105 |
| ◆ 战力养成 | 107 |
| ① 权威总结·知识点分析 例题 8 道 | 107 |
| ② 解析考点·得分关键 例题 26 道 | 110 |
| ③ 考试陷阱·全面防范 例题 4 道 | 119 |
| ④ 重点追击·最新题型 例题 2 道 | 120 |
| ◆ 实力测验 | 121 |
| ◆ 答案与解法 | 123 |

第5章 直线形

撰稿:王张平 李燕

| | |
|----------------------|-----|
| ◆ 中考生必备·最重点 | 124 |
| ◆ 基础牢固·直线形基础知识汇总 | 125 |
| ◆ 战力养成 | 127 |
| ① 权威总结·知识点分析 例题 13 道 | 127 |



| | |
|--------------------|-----|
| ◆解析考点·得分关键 例题 29 道 | 132 |
| ◆考试陷阱·全面防范 例题 7 道 | 146 |
| ◆重点追击·最新题型 例题 10 道 | 148 |
| · 实力测验 | 155 |
| · 答案与解法 | 157 |

| | |
|---------|-------|
| · 实力测验 | |
| · 答案与解法 | 216 |

| | |
|---------------------|---------|
| 第 6 章 解直角三角形 | 撰稿: 冯志华 |
| ◆ 中考生必备·最重点 | 158 |
| · 基础牢固·解直角三角形基础知识汇总 | 159 |
| ◆ 战力养成 | 162 |
| ①权威总结·知识点分析 例题 5 道 | 162 |
| ②解析考点·得分关键 例题 14 道 | 164 |
| ③考试陷阱·全面防范 例题 3 道 | 171 |
| ④重点追击·最新题型 例题 3 道 | 172 |
| · 实力测验 | 174 |
| · 答案与解法 | 176 |

| | |
|---------------------|--------|
| 第 7 章 圆 | 撰稿: 韦善 |
| ◆ 中考生必备·最重点 | 178 |
| · 基础牢固·圆基础知识汇总 | 179 |
| ◆ 战力养成 | 184 |
| ①权威总结·知识点分析 例题 27 道 | 184 |
| ②解析考点·得分关键 例题 34 道 | 194 |
| ③考试陷阱·全面防范 例题 2 道 | 211 |
| ④重点追击·最新题型 例题 2 道 | 213 |

第 8 章 综合题

撰稿: 王爽

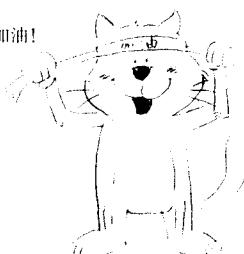
| | |
|------------------------|-----|
| ◆ 方程型综合题·例题 6 道 | 220 |
| ◆ 函数型综合题·例题 6 道 | 224 |
| ◆ 由几何图形求函数型综合题·例题 6 道 | 228 |
| ◆ 解直角三角形型综合题·例题 6 道 | 233 |
| ◆ 圆中计算型综合题·例题 6 道 | 237 |
| ◆ 几何探究型综合题·例题 6 道 | 242 |
| ◆ 直角坐标系中的几何型综合题·例题 6 道 | 246 |
| ◆ 函数动点探究型综合题·例题 5 道 | 251 |
| ◆ 代数几何型综合题·例题 4 道 | 255 |
| ◆ 新题型综合题·例题 4 道 | 259 |

第 9 章 压轴题

撰稿: 王爽

| | |
|---------------|-----|
| ◆ 压轴题·例题 16 道 | 262 |
|---------------|-----|

时刻为自己加油!



第1章

数与式

中考生必备·最重点

● 重点复习数与式的相关知识

数与式作为初中数学的基础知识,有许多的概念、性质与运算等内容.

初中“数”的教学包括两部分内容:有理数和实数,它们是学习代数式、方程和不等式等内容的基础.而整式的运算、方程或不等式的解、解直角三角形、数据处理等问题,都可归结为数和数的计算问题.在学习中,要掌握正数、负数、相反数、数轴、绝对值、有理数、倒数等重要概念;学会用数轴表示数,会利用数轴比较数的大小,体现数形结合的数学思想;掌握平方根、立方根的概念及性质;熟练准确地掌握实数的概念、运算法则及运算律.

初中“式”的学习主要是代数式,包括整式、分式和二次根式.代数式在初中代数学习中占有重要的地位.在学习中,要掌握代数式的概念,熟练求出代数式的值,并能根据实际问题列出代数式;掌握整式、分式和二次根式的有关概念和性质,灵活运用公式和性质进行运算.

数是具体的,或是抽象的.数是特殊的,或是一般的,因此学习时要重视

上述特点,不要把数与式割裂.如:对于分数的性质与分式的性质,努力去把握其相同点与不同点.

● 数与式的学习方法

对于“数与式”的学习,在重视基础知识、基本技能的基础上,要加强对数学思想方法,如分类讨论、数形结合等的理解和运用;提高运用数学知识解决简单的实际问题的能力,如图表信息问题等;增强探索、创新能力、观察、归纳能力,如寻找规律等开放探索问题.

数与式是中学数学的基本内容,也是进一步学习的实用工具,打好基础,不仅有利于为掌握初中阶段的恒等变形等知识创造有利条件,对于进一步学习高中乃至大学的数学,都是非常必要的.

对于各种运算法则,要深刻理解,会正逆双向使用.如乘法公式与因式分解,达到灵活使用、运用自如的水平.

轻松愉快学数学!



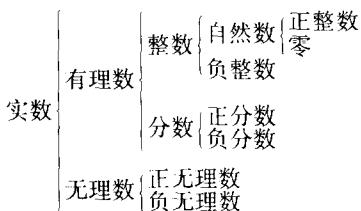
超重要!!

1 基础牢固

考基重点!

1. 实数

◆ 实数的分类



◆ 数轴

1. 规定了原点、正方向和单位长度的直线叫做数轴.
2. 实数与数轴上的点是一一对应的关系,这是数形结合的重要基础.在数轴上,如果A、B两点所表示的实数分别是 x_1 、 x_2 ,那么A、B两点之间的距离就是 $|x_2-x_1|$.

◆ 相反数

1. 数 a 和 $-a$ 叫做互为相反数.零的相反数是零.
2. a 和 b 互为相反数 $\Leftrightarrow a+b=0$.

◆ 倒数

1. 数 a 和 $\frac{1}{a}$ ($a \neq 0$) 叫做互为倒数.
2. a 与 b 互为倒数 $\Leftrightarrow ab=1$.

◆ 绝对值

1. 一个实数的绝对值就是数轴上表示这个数的点与原点的距离.
2. 一个正数的绝对值是它本身;一个负数的绝对值是它的相反数;零的绝对值是零.即:

$$|a| = \begin{cases} a & (a > 0), \\ 0 & (a = 0), \\ -a & (a < 0). \end{cases}$$

3. 绝对值的性质:

对于实数 a 、 b ,

任何一个实数的绝对值总是非负数,即 $|a| \geq 0$.

$|-a|=|a|$, 并且 $|a-b|=|b-a|$.

若 $|a|=|b|$, 则 $a=b$ 或 $a=-b$.

$|a \cdot b|=|a| \cdot |b|$.

$$\left| \frac{b}{a} \right| = \frac{|b|}{|a|} \quad (a \neq 0).$$

◆ 实数大小的比较

1. 对于数轴上的任意两个点,靠右边的点所表示的数较大.
 2. 正数都大于零;负数都小于零;两个正数,绝对值大的那个正数大;两个负数,绝对值大的那个负数小.
 3. 对于实数 a 、 b ,
- $$a-b>0 \Leftrightarrow a>b; a-b=0 \Leftrightarrow a=b; a-b<0 \Leftrightarrow a<b.$$
4. 对于实数 a 、 b 、 c ,若 $a>b$, $b>c$,则 $a>c$.

◆ 实数的运算

1. 实数的运算法则.
2. 实数的运算律.
3. 实数的运算顺序.

◆ 平方根和立方根

1. 平方根:若 $x^2=a$,那么 x 就叫做 a 的平方根.正数 a 的平方根有两个,即 $\pm\sqrt{a}$,它们互为相反数.

零的平方根是零.

在实数范围内负数没有平方根.

正数a的正的平方根叫做a的算术平方根,记作 \sqrt{a} .

零的算术平方根是零.

$$(\sqrt{a})^2=a(a \geq 0); \sqrt{a^2}=|a|$$

2. 立方根:若 $x^3=a$,那么x就叫做a的立方根,记作 $\sqrt[3]{a}$.

正数有一个正的立方根,负数有一个负的立方根,零的立方根是零.

◆ 非负数

1. 正数和零统称非负数.

2. 任何一个实数a的绝对值是非负数,即 $|a| \geq 0$;

任何一个实数a的平方是非负数,即 $a^2 \geq 0$;

任何一个非负数的n次算术根是非负数,即 $\sqrt[n]{a} \geq 0(a \geq 0)$.

3. 非负数的性质:

若a为非负数,则 $a \geq 0$,即最小值为0;

几个非负数的和或积仍为非负数;

若几个非负数的和为零,则这几个非负数必定同时为零.

◆ 科学记数法、近似数及有效数字

1. 科学记数法:把一个数记成 $\pm a \times 10^n$ 的形式(其中n是整数,1≤a<10),叫做用科学记数法表示这个数.

2. 近似数及有效数字:一个近似数,四舍五入到哪一位,就说这个近似数精确到哪一位,这时从左边第一个不是零的数字起,到精确的数为止,所有的数字都叫做这个近似数的有效数字.

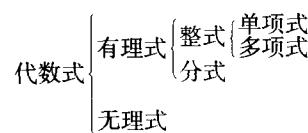
2. 代数式

◆ 整式

1. 代数式的有关概念

(1) 代数式:用运算符号把数或表示数的字母连接而成的式子,叫做代数式.单独一个数或表示数的字母也叫做代数式.

(2) 代数式的分类:



2. 整式的运算

(1) 整式的加减运算,实际上就是合并同类项.

在运算时,如果遇到有括号的,就根据去括号法则,先去掉括号,再合并同类项.

(2) 整数指数幂及其运算性质:

正整数指数幂: $a^n=\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{个}}$ (n 为正整

数);

零指数幂: $a^0=1(a \neq 0)$;

负整数指数幂: $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$ ($a \neq 0, n$ 为正整数).

(3) 整数指数幂的运算性质:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n};$$

$$(a^m)^n = a^{mn};$$

$$(ab)^m = a^m b^m (\text{其中 } m, n \text{都是整数}).$$

(4) 整式的乘法法则:

① 乘法公式:

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2;$$

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2;$$

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2;$$

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3;$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3.$$

②常用的乘法公式的变形:

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(a-b)^2+2ab;$$

$$(a-b)^2=(a+b)^2-4ab.$$

(5)整式的除法法则.

3. 因式分解

(1)把一个多项式化成几个整式的积的形式的变形过程叫做多项式的因式分解.

(2)因式分解的方法:

①提公因式法:

$$ma+mb+mc=m(a+b+c);$$

②运用公式法:

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b);$$

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2;$$

$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2.$$

③分组分解法:

分组后能直接提公因式或运用公式.

④十字相乘法:

$$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b).$$

⑤二次三项式的方法:

用一元二次方程求根公式来分解.

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c=a(x-\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a})(x-\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}) \quad (a\neq 0, b^2-4ac\geq 0). \end{aligned}$$

(3)因式分解时,注意在指定数的范围内分解到不能分解为止,若没有指定数的范围,一般是指在实数范围内因式分解.

◆ 分式

1. 分式:若A和B均为整式(其中B中含有字母),形如 $\frac{A}{B}$ 的式子叫做分式.

2. 分式 $\frac{A}{B}$ 有意义 $\Leftrightarrow B\neq 0$.

3. 分式 $\frac{A}{B}$ 的值为零 $\Leftrightarrow A=0$,且 $B\neq 0$.

4. 分式的基本性质:

$$\frac{A}{B}=\frac{A\times M}{B\times M},$$

$$\frac{A}{B}=\frac{A\div M}{B\div M}.$$

(其中M是不等于零的整式)

5. 分式的运算.

◆ 二次根式

1. 二次根式

式子 \sqrt{a} ($a\geq 0$)叫做二次根式.

2. 最简二次根式

被开方数的因数是整数,或因式是整式;被开方数中不含开方开得尽的因数或因式.

3. 同类二次根式

化成最简二次根式后,被开方数相同的二次根式叫做同类二次根式.

4. 二次根式的性质

\sqrt{a} ($a\geq 0$)是一个非负数;

$$(\sqrt{a})^2=a (a\geq 0);$$

$$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases} a & (a\geq 0), \\ -a & (a<0). \end{cases}$$

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} \quad (a\geq 0, b\geq 0);$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad (a\geq 0, b>0);$$

若 $a>b\geq 0$,则 $\sqrt{a}>\sqrt{b}$.

5. 分母有理化

常用的二次根式的有理化因式:

\sqrt{a} 与 \sqrt{a} 互为有理化因式;

$a+c\sqrt{b}$ 与 $a-c\sqrt{b}$ 互为有理化因式;

$c\sqrt{a}+d\sqrt{b}$ 与 $c\sqrt{a}-d\sqrt{b}$ 互为有理化因式.

6. 二次根式的运算

权威总结·知识点分析

(例)

01 在 $\frac{\pi}{2}$, $\sqrt{7}-1$, $-\cos 30^\circ$, 3.14, $(\sqrt{3}-2)^0$, $\frac{22}{7}$, $-0.1010010001\dots$, $\sqrt{4}$, $\sqrt[3]{9}$ 中, 哪些是有理数? 哪些是无理数?

◆◆◆ 由有理数和无理数的定义可知: $\sqrt[3]{9}$ 都是无理数.

3.14, $(\sqrt{3}-2)^0$, $\frac{22}{7}$, $\sqrt{4}$ 都是有理数;

$\frac{\pi}{2}$, $\sqrt{7}-1$, $-\cos 30^\circ$, $-0.1010010001\dots$,



$(\sqrt{3}-2)^0=1$ 是有理数; $\sqrt{4}=2$ 是有理数; $\sqrt[3]{9}$ 是无理数.

(例)

02 (1)求144的平方根;

(2)求 $\sqrt{81}$ 的值;

(3)求 $\sqrt[3]{-0.125}$ 的值.

◆◆◆ (1)144的平方根有两个, 即

$$\pm\sqrt{144}=\pm12;$$

$$(2)\sqrt{81}=9;$$

$$(3)\sqrt[3]{-0.125}=-0.5.$$



point 一个正数的平方根有两个, 不要丢掉了负的平方根. 同时要弄清平方根及算术平方根的意义及表示方法. 切勿把144的平方根写作 $\sqrt{144}=\pm 12$, 也不可以把 $\sqrt{81}$ 写作 ± 9 , 因为 $\pm\sqrt{a}$ 与 \sqrt{a} ($a \geq 0$) 表示两个不同的含义.

(例)

03 $1-\sqrt{2}$ 的倒数是_____, 相反数是_____, 绝对值是_____.

$$\text{◆◆} \quad \frac{1}{1-\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{2}}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}$$

是 $-1+\sqrt{2}$, 绝对值是 $\sqrt{2}-1$.

$$= \frac{1+\sqrt{2}}{1-2} = -1-\sqrt{2};$$

$$-(1-\sqrt{2}) = -1+\sqrt{2}; |1-\sqrt{2}| = \sqrt{2}-1.$$

所以, $1-\sqrt{2}$ 的倒数是 $-1-\sqrt{2}$, 相反数



一定要掌握求一个数的倒数、相反数及绝对值的方法, 从而加深对概念的理解.

例 04

近年来,我国旅游产业迅速发展.据统计,2003年某市实现旅游收入41亿元,则此收入值(单位:元)用科学记数法表示为().

- A. 4.1×10^9 B. 4.1×10^8 C. 41×10^8 D. 0.41×10^{10}

◆ 因为1亿= 10^8 ,

那么 41 亿= $41 \times 10^8=4.1 \times 10^9$,

所以用科学记数法表示为 $41 \times 10^8=4.1 \times 10^9$,

故选A.



正确使用科学记数法表示数,数清零的个数,注意指数的正负.

例

05

计算: $(\frac{1}{3})^{-1}+16 \div (-2)^3+(2005-\frac{\pi}{3})^0-\sqrt{3} \cdot \tan 60^\circ$.

$$\begin{aligned} & (\frac{1}{3})^{-1}+16 \div (-2)^3+(2005-\frac{\pi}{3})^0 = 3+16 \div (-8)+1-\sqrt{3} \times \sqrt{3} \\ & = 3-2+1-3 \\ & = -1. \end{aligned}$$

例

06

下列各式计算正确的是().

- A. $a^2 \cdot a^3=a^5$ B. $(a^2)^3=a^5$ C. $a^6 \div a^2=a^3$ D. $a^5+a^5=2a^{10}$

◆ 由题意可知,

故选A.

B中, $(a^2)^3=a^{2 \times 3}=a^6$,

C中, $a^6 \div a^2=a^{6-2}=a^4$,

D中, $a^5+a^5=2a^5$,



应记清楚幂的运算法则并正确使用.

例

07

计算: $(3x^2-4x+5)(3x^2+4x-5)$.

$$\begin{aligned} & (3x^2-4x+5)(3x^2+4x-5) = 9x^4-16x^3+40x-25. \\ & =[3x^2-(4x-5)][3x^2+(4x-5)] \\ & =(3x^2)^2-(4x-5)^2 \\ & =9x^4-(16x^2-40x+25) \end{aligned}$$



point 在整式的运算中,要注意灵活运用运算法律、运算法则和乘法公式.

例

08

已知 $x^2+3x+5=7$,则代数式 $3x^2+9x-2=$ _____.

◆ 因为 $x^2+3x+5=7$,

$$=6-2=4.$$

即 $x^2+3x=2$.



所以,

$$3x^2+9x-2$$

$$=3(x^2+3x)-2$$

$$=3 \times 2-2$$

本题中代数式的字母隐含在方程中,且方程求解较繁琐,根据已知条件和结论的联系,应采用整体代入的方法.

例

09

小亮从一列火车的第 m 节车厢数起,一直数到第 n 节车厢($n > m$),他数过的车厢节数是()。

A. $m+n$ B. $n-m$ C. $n-m+1$ D. $n-m-1$

◆◆◆ 根据题意,小亮数过的车厢节数应

为 $n-m+1$,

故选C.



根据问题情境列代数式.

例

10

观察下面一列有规律的数: $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}, \frac{1}{42}, \dots$ 根据其规律回答:

(1)第7个数是_____,第 n 个数是_____(n 是正整数);(2) $\frac{1}{132}$ 是第____个数.

◆◆◆

$\frac{1}{2} = \frac{1}{1 \times 2}, \frac{1}{6} = \frac{1}{2 \times 3}, \frac{1}{12} = \frac{1}{3 \times 4}, \dots$ 第 n 个数是 $\frac{1}{n(n+1)}$;

 \dots ,

所以,

(1)第7个数是 $\frac{1}{7 \times 8} = \frac{1}{56}$;(2)因为 $\frac{1}{132} = \frac{1}{11 \times 12}$,所以它是第11个数.

本题考查探求并发现规律的能力.

例

11

已知: $a=\frac{1}{1-\sqrt{2}}, b=\frac{1}{1+\sqrt{2}}$,求 a^3b+ab^3 的值.

◆◆◆

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{1-\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{2}}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})} \\ &= -1-\sqrt{2}, \end{aligned}$$

$$=(-1) \times [(-2)^2 - 2 \times (-1)]$$

$$=(-1) \times (4+2)$$

$$=-6.$$

$$b = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}$$

∴当 $a=\frac{1}{1-\sqrt{2}}, b=\frac{1}{1+\sqrt{2}}$ 时,

$$= \sqrt{2}-1,$$

a^3b+ab^3 的值是-6.

$$\therefore a+b = -1-\sqrt{2} + \sqrt{2}-1$$

$$=-2,$$

$$ab = (-1-\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)$$

$$= 1-2$$

$$=-1.$$

$$\therefore a^3b+ab^3 = ab(a^2+b^2)$$

$$= ab[(a+b)^2 - 2ab]$$



求代数式的值,有时要把已知条件化简,得出字母的值或字母之间的关系,然后把它们代入化简(或变形)后的所要求的代数式里,再进行计算求值.

例

12

分解因式：

$$(1)x^2y-4xy+4y; (2)x^2-y^2+y-\frac{1}{4}; (3)x^2-9y^2-2x-6y.$$

$$\blacklozenge (1) x^2y-4xy+4y$$

$$=y(x^2-4x+4)=y(x-2)^2.$$

$$(2) x^2-y^2+y-\frac{1}{4}$$

$$=x^2-(y^2-y+\frac{1}{4})$$

$$=x^2-(y-\frac{1}{2})^2$$

$$=(x+y-\frac{1}{2})(x-y+\frac{1}{2}).$$

$$(3) x^2-9y^2-2x-6y$$

$$=(x^2-9y^2)-(2x+6y)$$

$$=(x+3y)(x-3y)-2(x+3y)$$

$$=(x+3y)(x-3y-2).$$



因式分解的步骤是：先看是否可以提取公因式，再考虑是否能用公式分解。对于项数较多的多项式，可考虑运用分组分解法分解因式。

例

13

当 x _____ 时，分式 $\frac{3}{1-x}$ 有意义。
 \blacklozenge ∵ 分式中的分母不能为零，
 $\therefore 1-x \neq 0$, 即 $x \neq 1$.
 故当 $x \neq 1$ 时，分式 $\frac{3}{1-x}$ 有意义。

例

14

若分式 $\frac{x^2-9}{x^2-4x+3}$ 的值为零，则 x 的值为（ ）。

A. 3

B. 3或-3

C. -3

D. 0

 \blacklozenge ∵ 分式 $\frac{x^2-9}{x^2-4x+3}$ 的值为零，
 $\therefore x^2-9=0$, 且 $x^2-4x+3 \neq 0$,
 $\therefore x=\pm 3$, 且 $x \neq 1$, 且 $x \neq 3$,
 $\therefore x=-3$.

故选C。



分式有意义的条件是分母不为零；分式值为零的条件是分子为零且分母不为零。

例

15

计算 $\frac{1}{m+2} + \frac{4}{m^2-4}$ 的结果是（ ）。A. $m+2$ B. $m-2$ C. $\frac{1}{m+2}$ D. $\frac{1}{m-2}$

$$\blacklozenge \quad \frac{1}{m+2} + \frac{4}{m^2-4}$$

$$= \frac{m-2}{(m+2)(m-2)} + \frac{4}{m^2-4} = \frac{m-2+4}{(m+2)(m-2)}$$

$$= \frac{m+2}{(m+2)(m-2)} = \frac{1}{m-2}.$$

故选D.

例16

当 $a = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, $b = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 时, 求代数式 $\frac{a^2-2ab+b^2}{a^2-b^2}$ 的值.

$$\diamond \quad \frac{a^2-2ab+b^2}{a^2-b^2} = \frac{(a-b)^2}{(a+b)(a-b)}$$

$$\text{故原式} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{a-b}{a+b}.$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

所以当 $a = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, $b = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 时,
 $a+b=\sqrt{5}$, $a-b=1$.



求代数式的值时, 先化简要求的
式子, 再将值代入计算.

例17

使 $\frac{1}{\sqrt{2-x}}$ 有意义的 x 的取值范围是_____.

\diamond 要使 $\frac{1}{\sqrt{2-x}}$ 有意义, 只要使

解得: $x < 2$.

$$\begin{cases} \sqrt{2-x} \neq 0, \\ 2-x \geq 0, \end{cases}$$



题目需要满足的条件要考虑周全.

例18

当 $a < 1$ 且 $a \neq 0$ 时, 化简 $\frac{\sqrt{a^2-2a+1}}{a^2-a} = \underline{\hspace{2cm}}$.

$$\diamond \quad \frac{\sqrt{a^2-2a+1}}{a^2-a} = \frac{\sqrt{(a-1)^2}}{a(a-1)}$$

$$\therefore \text{原式} = \frac{1-a}{a(a-1)} = -\frac{1}{a}.$$

$$= \frac{|a-1|}{a(a-1)}.$$



本题考查 $\sqrt{a^2} = |a|$, 利用已知 a 的范围
对绝对值进行化简.

例19

下列各式属于最简二次根式的是()。

A. $\sqrt{8}$

B. $\sqrt{x^2+1}$

C. $\sqrt{y^3}$

D. $\sqrt{\frac{1}{2}}$

\diamond A中, $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$;



C中, $\sqrt{y^3} = y\sqrt{y}$; D中, $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

可根据最简二次根式的两个条件来
判断.

故选B.