工商管理系列教材

管理运筹学

陈戈止 编著

西南财经大学出版社

GUANLI YUNCHOU XUE

工商管理系列教材

管理运筹学

陈戈止　编著

西南财经大学出版社

GUANLI YUNCHOU XUE

图书在版编目(CIP)数据

管理运筹学/陈戈止编著.—成都:西南财经大学出版社,2006.8
ISBN 7-81088-464-6

Ⅰ.管… Ⅱ.陈… Ⅲ.管理学:运筹学—高等学校—教材 Ⅳ.C931.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第013449号

管理运筹学

陈戈止 编著

责任编辑:张纪亮
封面设计:何东琳设计工作室
责任印制:杨斌

出版发行:	西南财经大学出版社(四川省成都市光华村街55号)
网　　址:	http://www.xcpress.net
电子邮件:	xcpress@mail.sc.cninfo.net
邮政编码:	610074
电　　话:	028-87353785　87352368
印　　刷:	成都市书林印刷厂
成品尺寸:	170mm×240mm
印　　张:	20.5
字　　数:	330千字
版　　次:	2006年8月第1版
印　　次:	2006年8月第1次印刷
印　　数:	1—3000册
书　　号:	ISBN 7-81088-464-6/F·402
定　　价:	32.80元

前 言

运筹学是20世纪40年代发展起来的一门研究系统运行与调节过程中如何实现整体最优化的理论学科。运筹学首先从定性分析入手，然后借助数学工具去量化地研究客观世界中存在的各种各样的复杂问题，并且通过科学的抽象，建立起系统的数学模型，以此来对客观事物进行量化分析，寻求系统的最优运行方式(最优解)。

《管理运筹学》是架构在运筹学基础上的学科，它借助运筹学的理论方法，针对现实中的系统，特别是经济系统进行量化分析，并以量化数据为支撑，去求得经济系统运行的最优化方案，以此来帮助系统运行的决策者做出科学的决策。由此可见，管理运筹学是一门以决策支持为目标的应用性学科。

由于管理运筹学是一门理论和实践相结合的学科，因此它具有极强的可操作性。它所涉及的领域极为广阔，其理论和方法均广泛地应用于政治、经济、军事、社会管理和工程技术等许多领域的优化研究。主要包括：研究资源的最优配置和利用的数学规划方法；研究（企业）战略管理最优选择问题的决策理论方法；研究市场战术的对策（博弈）理论和方法；研究绩效评价、服务效率及最佳设置的伺服系统理论和排队方法等。

本书引用的运筹学理论主要包括：线性规划原理、对偶规划原理、整数规划原理、运输模型、动态规划原理、贮存理论、排队理论、图分析、决策理论、博弈（对策）理论等。

本书主要是为学习管理学、经济学、社会学、政治学等学科的读者撰写的，因此本书的主要内容涉及的是经济管理中的最优规划及决策方法等问题。通过本书的学习，可以使读者掌握如何从定性分析向定量分析过渡，分析整理系统的有关信息去建立相应的定量分析模型，同时掌握有关的求解定量模型的数学方法。

本书可作为经济管理类专业高年级本科生和研究生学习运筹学的教材，也可

以作为企事业单位、政府规划部门、军事管理部门等的管理人员学习运筹方法的参考用书。

作　者

2006年春于西南财经大学光华园

目　录

第一章
线性规划

线性规划（*Linear Programming*，*LP*）是辅助管理者进行科学管理规划的一种数学方法，它是数学规划和运筹学的一个重要分支，在工农业生产、经济管理、交通运输安排中都有极为广泛的应用。线性规划主要用于研究解决有限资源的最佳配置问题，即如何对有限的资源做出最佳的调配和最有利的使用，以此来最大可能地发挥有限资源的效能去获取最佳的经济效益。

第一节　线性规划的一般模型

一、线性规划问题的引入

什么是线性规划问题？它具有哪些特点呢？为了回答这两个问题，我们先来考察几个例子。这些例子中所讲的内容是我们在经济管理中经常遇到的问题。

例1　某企业生产甲、乙两种产品，要使用 A、B、C 三种不同的原材料。已知生产一件甲产品需用三种原料分别为 1、1、0 个单位，生产一件乙产品需用三种原料分别为 1、2、1 个单位。现企业每天供应原材料的能力分别为 6、8、3 个单位。又已知每生产一件甲产品和乙产品企业的利润收入分别是 30 元和 40 元，问企业应该如何安排甲、乙产品的生产，可以使一天的总利润最大？

我们首先可以根据题中的条件、数据列成一个表格，如表 1－1 所示。然后对问题进行定性分析，搞清楚需求（产品）和供给（原材料）之间的关系，建立起它们之间的关系（数学）模型。有了模型以后，再寻找出相应的数学方法对模型求解，求解出来的量化数据，用来指导（支持）最后的实践决策。

表 1 - 1

单位产品耗用材料 / 产品 / 材料	甲	乙	材料供应量
A	1	1	6
B	1	2	8
C	0	1	3
利润(元/件)	30	40	

以上的逻辑思想,如图 1 - 1 所示。

$$(\text{定性})\text{问题分析}\xrightarrow{\text{建立}}(\text{数学})\text{模型}\xrightarrow{\text{数学方法}}\text{求解}\xrightarrow{\text{指导}}\text{实践}(\text{决策})$$

图 1 - 1

我们现在只讨论从问题分析到建立模型。求解的方法和指导实践的步骤,我们将在后面的章节中讲解。

下面是定性分析的步骤:

第一步:将要解决的实际问题含义搞清楚。本例中告诉我们要生产甲、乙两种产品,使用的原材料是 A、B、C 三种,且这三种原材料的日供应量是有限的。

第二步:明确问题所要追求的目标。本例是要追求目标利润的最大化,且已知甲、乙产品的利润分别是每件 30 元、40 元。

第三步:将问题定量化。即找出问题的关键因素,并将其假设为一种可以量化的变量。本例中产品的日产量就是可量化的因素。

第四步:建立起量化的数学模型。

现假设甲产品的日产量为 x_1,乙产品的日产量为 x_2,根据题中给出的数据和限制条件,我们有:

对于原料 A:$x_1 + x_2 \leqslant 6$

对于原料 B:$x_1 + 2x_2 \leqslant 8$

对于原料 C:$x_2 \leqslant 3$

且 x_1, x_2 不能为负数,即 $x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0$。

以上所有的式子称为问题的约束条件。

本例目标的追求是日总利润最大,下面设利润为 S,则根据题中的利润条件有

目标函数：

$S = 30x_1 + 40x_2$

且要使 S 最大化。

现在我们将最大化的目标函数与限制条件放在一起，就构成了一个完整的线性规划数学模型：

$$\begin{cases} \max S = \max(30x_1 + 40x_2) & ⓪ \\ x_1 + \quad x_2 \leqslant 6 & ① \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 8 & ② \\ \qquad\quad x_2 \leqslant 3 & ③ \\ x_1, x_2 \geqslant 0 & ④ \end{cases}$$

我们将⓪式称为 *LP* 问题的目标函数，它可以是求最大（*max*），也可以是求最小（*min*）；①、②、③式称为 *LP* 问题的前约束条件；④式称为 *LP* 问题的后约束条件。①—④式统称为约束条件。

例 2 某种产品是由甲、乙两种原料混合配制而成。已知甲、乙两种原料都含有 A、B、C 三种化学成分，其含量（%）分别是：甲为 12、2、3；乙为 3、3、15。如果产品中的三种化学成分含量（%）不得低于 4、2、5，且甲、乙原料的成本每千克分别为 30 元和 20 元，问如何配制该产品，可以使成本最小？

解：设每千克产品用甲原料 x_1 千克，用乙原料 x_2 千克，且每千克产品的成本为 S 元，则根据平衡条件有：

$x_1 + x_2 = 1$

再根据题中的条件，写出该题的数据表，如表 1 - 2。

表 1 - 2

成分 \ 含量 \ 原料	成分含量（%） 甲	乙	产品成分最低含量（%）
A	12	3	4
B	2	3	4
C	3	15	5
成本（元/千克）	30	20	

则有：

$$\begin{cases} \min S = \min(30x_1 + 20x_2) \\ 12x_1 \quad + 3x_2 \quad \geqslant 4 \\ \ \ 2x_1 \quad + 3x_2 \quad \geqslant 2 \\ \ \ 3x_1 \quad + 15x_2 \quad \geqslant 5 \\ \ \ \ x_1 \quad + x_2 \quad = 1 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

例 3 某建筑工地需要直径相同、长度不同的成套钢筋，每套由 7 根 2 米长与 2 根 7 米长的钢筋组成。现有 15 米长的钢筋 150 根，问应该如何下料，才能使废料最少？

解：根据题设条件，写出表 1 - 3。

表 1 - 3

分割方法	7 米长	2 米长	废料长(米)
第一种方法	1 根	4 根	0
第二种方法	2 根	0 根	1
第三种方法	0 根	7 根	1

设 x_1、x_2、x_3 分别代表三种方法切割 15 米长钢筋的根数，S 表示废料的总长度，则有：

$x_1 + x_2 + x_3 = 150$

注意到，每套由 7 根 2 米长和 2 根 7 米长的钢筋组成，而 2 米长的钢筋共有 $(4x_1 + 7x_3)$ 根，7 米长的钢筋共有 $(x_1 + 2x_2)$ 根，

即： $(4x_1 + 7x_3) : (x_1 + 2x_2) = 7 : 2$

即： $7(x_1 + 2x_2) = 2(4x_1 + 7x_3)$

整理后有： $x_1 - 14x_2 + 14x_3 = 0$

目标函数是废料最少，而废料 S 的长度为：

$S = x_2 + x_3$

于是有下料的线性规划数学模型为：

$$\begin{cases} \min S = \min(x_2 + x_3) \\ x_1 \quad + x_2 \quad + x_3 \quad = 150 \\ x_1 \quad - 14x_2 \quad + 14x_3 \quad = 0 \\ x_i \geqslant 0 \quad (i = 1,2,3) \end{cases}$$

二、线性规划的一般模型

由以上的例 1、例 2、例 3 我们可以知道,针对一个具体的问题,可以有不同形式的线性规划数学模型,但归结起来,它们都有以下的共同点:

1. 任何一个问题,都存在一组变量,即 $x_1, x_2, \cdots, x_n$。我们称这组变量为决策变量。

2. 都存在一组约束条件,它们都是关于决策变量的线性不等式或等式。

3. 都有一个期望达到的目标,称为目标函数。目标函数可以是求最大或最小。

我们将决策变量、约束条件、目标函数称为线性规划数学模型的三要素。

于是我们可以写出线性规划的一般模型为:

$$\begin{cases} \max(\min) S = \max(\min)(c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n) \\ a_{11}x_1 \quad + a_{12}x_2 \quad + \cdots \quad + a_{1n}x_n \quad \leqslant (\text{或} \geqslant, =) b_1 \\ a_{21}x_1 \quad + a_{22}x_2 \quad + \cdots \quad + a_{2n}x_n \quad \leqslant (\text{或} \geqslant, =) b_2 \\ \quad \cdots \quad \quad \cdots \quad \quad \cdots \quad \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 \quad + a_{m2}x_2 \quad + \cdots \quad + a_{mn}x_n \quad \leqslant (\text{或} \geqslant, =) b_m \\ x_{j_1}, x_{j_2}, \cdots, x_{j_k} \geqslant 0 \end{cases}$$

在线性规划数学模型的一般形式中应注意以下三点:

1. 目标函数可以是最大,也可以是最小。

2. 约束条件中的前约束关系符号三种都可能出现,而且并不要求符号要一致。

3. 约束条件中的后约束中并没有要求所有的 $x_j \geqslant 0$ 都必须出现,即可能某个 x_{j_k} 没有后约束($k \leqslant n$)。

三、小结

线性规划所研究的问题是,在线性约束的条件下,使某个线性目标函数达到最优(最大或最小)。在经济领域中,这类问题是非常多的。如:

1. 任务安排问题。在有限资源条件下，如何去确定生产产品的品种、产量，使产值或利润最大。

2. 配料问题。在既定的工艺、质量等指标下，确定各种原料的选购量，使成本最小。

3. 下料问题。在材料切割上，如何使废料最少，使材料的利用率最高。

4. 布局问题。如何合理安排各种作物在不同土壤上的种植面积，达到土地的最佳利用，在完成种植计划的前提下使总产量最多。如何建厂、城市如何布局等等都属此类问题。

5. 库存问题。在一定库存条件下，确定库存物资的品种、数量、期限，使库存效益最高。

6. 运输问题。在物资调配网点中，如何决定产地和销地之间的运输量，在满足供需平衡的条件下，使运费(成本)最小。

7. 非生产性问题。如在各种宣传手段中，如何分配利用不同的广告宣传手段，使宣传的效果最好；再如如何安排各厂班次的值班人数，以最少的人完成既定的值班任务等。

第二节　线性规划的图解法

如何求解一个线性规划问题？我们在讲解线性规划模型的一般解法(单纯形法)之前，先介绍两个变量的线性规划问题的图解法，使读者对线性规划的解有一个直观的认识，并由此引入可行解与最优解的概念。

一、两个变量的线性规划问题图解法

例 1　用图解法求解下面线性规划问题。

$$\begin{cases} \max S = \max(3x_1 + 4x_2) \\ x_1 + x_2 \leqslant 6 \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 8 \\ x_2 \leqslant 3 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

解：由约束条件可知，同时满足所有约束条件的点(x_1, x_2)均落于由坐标轴

x_1, x_2 及直线 $x_1 + x_2 = 6, x_1 + 2x_2 = 8, x_2 = 3$ 所围成的多边形 $OABCDO$ 内及边界上，如图 1 – 2 所示。

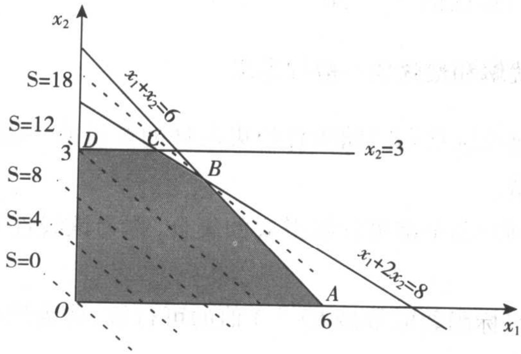

图 1–2

由图 1 – 2 我们可以看出，凸多边形 $OABCDO$ 上的任一点坐标都同时满足所有的约束条件，而凸多边形外的任意点坐标都不能同时满足所有的约束条件，我们称凸多边形 $OABCDO$ 上的任意一点都是该线性规划问题的一个可行解，而整个凸多边形，称为该线性规划问题的可行解域或可行解集。

线性规划问题的条件，是要求目标函数最大。为此，我们可以将 S 看成一个参数，当 S 取不同的值时，就形成一条不同的直线，于是 $S = 3x_1 + 4x_2$ 表示一组直线，且它们有相同的斜率 $k = -\dfrac{3}{4}$，即形成一组平行的直线，如图 1 – 2 中虚线所示，我们称这些虚线为目标函数 S 的等值线。当将这些等值线向图的右上方移动时，S 的值也随着变大。现在我们的目标是：一方面要使 S 最大，另一方面使目标函数 S 的等值线上至少要有一个点位于凸多边形 $OABCDO$ 的内部或边界上。由图 1 – 2 可以看出，点 B 同时满足以上两个要求。我们称既满足可行解，又满足目标函数最大的解为该线性规划问题的最优解，最优解对应的目标函数值称为该线性规划问题的最优值。

本例中，线性规划问题的最优解为直线 $x_1 + x_2 = 6$ 与直线 $x_1 + 2x_2 = 8$ 的交点 B。求解联立方程：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ x_1 + 2x_2 = 8 \end{cases}$$

得到 B 点的坐标为(4,2)，代入目标函数中，有：

$$S = 3 \times 4 + 4 \times 2 = 20$$

即本线性规划问题的最优解为：

$x_1 = 4, x_2 = 2$；最优值 $S = 20$

二、可行解、最优解和最优值一般的定义

定义 1.1 满足线性规划问题所有约束条件的变量的一组值，称为该线性规划问题的一个可行解。

由一个线性规划问题全部可行解组成的集合，称为该线性规划问题的可行解集。

定义 1.2 使目标函数取得最大(小)值的可行解，称为该线性规划问题的最优解。

由一个线性规划问题全部最优解组成的集合，称为该线性规划问题的最优解集。

定义 1.3 最优解的目标函数值称为该线性规划问题的最优值。

三、图解法的进一步讨论

下面我们将通过一些例子的图解，对线性规划问题的解作进一步讨论。

例 2 求解。

$$\begin{cases} \max S = \max(2x_1 + x_2) \\ x_1 \leqslant 4 \\ x_2 \leqslant 5 \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 9 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

解：根据问题的约束条件，可作图 1－3。