

广东省教育厅推荐教材

广东省非全日制(成人)中等职业学校试用教材
高职考试与成人高考教学用书

数学

Shuxue

第二册

广东省中等职业学校教材编写委员会 组编



广东科技出版社

广东省教育厅推荐教材

广东省非全日制(成人)中等职业学校试用教材
高 职 考 试 与 成 人 高 考 教 学 用 书

数 学

第二册

广东省中等职业学校教材编写委员会 组编

广东科技出版社

· 广 州 ·

广东省非全日制(成人)中等职业学校试用教材
高职考试与成人高考教学用书

数 学

第二册

广东省中等职业学校教材编写委员会 组编

出版发行: 广东科技出版社

(广州市环市东路水荫路11号 邮编: 510075)

E-mail: gdkjzhhb@21cn.com

http://www.gdstp.com.cn

经 销: 广东教育书店

印 刷: 中山新华商务印刷有限公司

(厂址: 中山市火炬开发区逸仙大道 邮编: 528437)

规 格: 787mm × 1 092mm 16开 15印张 340 000字

版 次: 2005年1月第1版

2006年2月第2次印刷

ISBN 7 - 5359 - 3445 - 5 / G · 687

定 价: 20.30元

如发现因印装质量问题影响阅读, 请与承印厂联系调换。

前 言

职业教育是国民经济和社会发展的基础。党的十六大提出我国要走新型工业化道路,不仅需要数以千万计的专门人才和一大批拔尖人才,还需要数以亿计的高素质的技能型劳动者。然而,目前我省技能型人才短缺的状况依然存在。据有关部门统计,到2005年,我省技术工人缺口将达130多万名。广东要全面建设小康社会,加快率先基本实现现代化,必须加快技能型人才的培养和培训。

根据国务院《关于大力推进职业教育改革与发展的决定》和我省经济社会发展的实际,广东省教育厅发出了《关于调整成人高中教育的意见》,提出通过采用半工半读、工学交替的形式,面向城镇从业人员特别是农村进城务工人员,进行非全日制中等职业教育和培训,提高他们的文化和技能水平。为了配合这项利国利民的重要措施的实施,我们参照教育部颁发的《中等职业学校课程教学大纲》和新修订的全国成人高等学校招生复习考试大纲,结合我省实际,组织编写了这套非全日制(成人)中等职业学校试用教材。

本套教材力求通俗易懂,体现时代性、技能性、实用性和针对性,适合初中毕业及以上文化程度的城镇从业人员学习使用,也可作为高职考试和成人高考教学用书。

由于编者水平有限,不当之处,切望专家及广大读者批评指正。

广东省中等职业学校教材编写委员会

2005年8月

说 明

《广东省非全日制（成人）中等职业学校试用教材·数学》是参照教育部2000年颁布的《中等职业学校数学教学大纲（试行）》和教育部于2002年8月颁布的《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲·数学》的要求，遵照广东省教育厅发出的《关于调整成人高中教育的意见》的精神组织编写的，供我省非全日制（成人）中等职业学校的各类专业试用。

全套《数学》教材分四册，有必学内容也有选学内容，其中必学部分包括函数、几何、概率与统计初步三个模块，基本课时为160。限定选学内容（标“*”）的教学时数为65，故低限课时为225。选学部分包括微积分初步、统计两个模块，建议教学时数为72，故高限课时为298。

这套《数学》教材的第二册内容包括：数列、数列极限、复数、向量、解析几何四章。

这套《数学》教材以非全日制（成人）中等职业教育培养目标为依据，注意与初中数学课程的衔接，按照“加强基础，注重能力，突出应用，增加弹性，适度更新，兼顾体系”的原则，确定教学内容。在编写体例上有如下特点：

（一）教材以教学课时为单位编写，以章为单位排列课时。

（二）每课时含以下四部分内容：

1. 知识基本内容和要求。这里强调坚持符合时代要求的“新双基”，注重知识实际背景，体现知识发生发展过程，发展学生的数学应用意识。

2. 例题。注意精选突出思维、体现本课教学要求的题目，既有体现本课全局知识的例题，也有注重局部知识训练的例题。

3. 练习。以学习掌握本课时的教学内容为主，供课堂练习用。练习分A、B组，留有解题空位，A组题一般含填空题、选择题、局部训练题、全局训练题。B组题属提高、综合性，不是模仿就可完成的。

4. 课外作业。一般安排类似A组题所含四类型题目，也适当安排少量有思考性的问题。这部分不留空，可以用作业簿练习。

（三）每章书内容的后面都有“小结与复习”和“复习参考题”，供复习巩固全章书时使用。少数标有“*”号的是在难度上略有提高的题目，仅供学有余力的学员选用。

（四）为了让学员在学习时能够做到及时反馈、及时纠正，书的最后附有练习、作业和复习参考题的答案或提示。

（五）遵循成人学习的特点和规律，考虑到能够适应不同水平的各类成人学员的需要和适合自学，这套书编写时注意贯彻由易到难、由具体到抽象、循序渐进、利教易学、“小步子”的原则。内容安排上尽量注意创设情境，从实例出发，展现数学知识的来龙去脉；精选例题和配备足够的训练题目，从知识范围、能力层次要求、题型结构等方面达到“新大纲”的要求。

这套书在组织编写过程中，听取了有关职业技术学校领导和数学教师的许多宝贵意见和建议；中山大学教学系陈云峰教授对我们的编写工作给予具体的指导和帮助，在此，我们特向这些同志表示衷心的感谢！

这套书由郭鸿、吴占华主持编写，参加本书编写、统稿和审稿的有：郭鸿、吴占华、刘会

金、郭紫燕、梁锡焜、何溯、郑喜中、罗思明、符毅成等。

最后，希望读者对本书的不足之处提出意见和建议，容再版时修改完善。

《数学》编写组

2003 年 12 月

第一模块 函 数

第六章 数列、数列极限

一 数列	1
第 1 课 数列的概念	1
二 等差数列	5
第 2 课 等差数列及其通项公式	5
第 3 课 等差中项及其应用	9
第 4 课 等差数列的前 n 项和	12
第 5 课 数列、等差数列习题课	16
三 等比数列	19
第 6 课 等比数列及其通项公式	19
第 7 课 等比中项与等比数列的前 n 项和	23
第 8 课 等比数列的简单应用	26
* 四 数列极限	28
第 9 课 * 数列极限的描述性定义	28
第 10 课 * 数列极限的四则运算	32
小结与复习	35
复习参考题六	36

第七章 复 数

一 复数的有关概念	38
第 1 课 虚数单位的定义	38
第 2 课 复数的实部、虚部及复数的相等	40
二 复数的几何意义	42
第 3 课 共轭复数	42
第 4 课 复数的向量表示	44
三 复数的运算	47
第 5 课 复数的加法与减法(一)	47
第 6 课 复数的加法与减法(二)	49
第 7 课 复数的乘法与除法(一)	51
第 8 课 复数的乘法与除法(二)	53
第 9 课 复数的乘法与除法(三)	56
第 10 课 实系数一元二次方程在复数范围内的解	58

四 复数的三角形式及运算	61
第 11 课 复数的三角形式和复数的代数形式	61
第 12 课 复数的三角形式和复数的代数形式互化	63
第 13 课 复数三角形式的乘、除运算和棣莫弗定理(一)	65
第 14 课 复数三角形式的乘、除运算和棣莫弗定理(二)	69
第 15 课 复数三角形式的乘、除运算和棣莫弗定理(三)	72
小结与复习	76
复习参考题七	78

第二模块 几 何

第一章 向 量

一 向量的基本概念	80
第 1 课 向量的定义、长度、单位向量、相等向量和共线向量	80
二 向量的运算	82
第 2 课 向量的加法	82
第 3 课 向量的减法	84
第 4 课 向量的数乘运算	87
三 向量的坐标表示及运算	90
第 5 课 坐标轴上的单位向量和向量坐标	90
第 6 课 向量的直角坐标运算	92
第 7 课 两个向量共线的条件	94
四 向量的数量积和运算法则	96
第 8 课 向量的数量积和运算法则(一)	96
第 9 课 向量的数量积和运算法则(二)	98
第 10 课 向量的数量积和运算法则(三)	100
五 平移公式、中点公式、两点距离公式	103
第 11 课 平移公式、中点公式、两点距离公式	103
六 余弦定理和正弦定理	106
第 12 课 余弦定理	106
第 13 课 正弦定理	108
小结与复习	111
复习参考题一	113

第二章 解析几何

一 直线的方程	116
第1课 直线的方向向量与直线的点向式方程	116
第2课 直线的斜率和点斜式方程	118
第3课 直线的一般式方程	120
二 两条直线的位置关系	123
第4课 两条直线平行的判定	123
第5课 两条直线垂直的判定	125
第6课 两条直线的夹角	127
第7课 两条直线的交点	129
三 点到直线的距离	131
第8课 点到直线的距离	131
四 二元一次不等式表示的平面区域	133
*第9课 二元一次不等式表示的平面区域	133
五 曲线与方程	135
第10课 曲线与方程	135
第11课 求曲线的交点	138
六 圆的方程	141
第12课 圆的标准方程(一)	141
第13课 圆的标准方程(二)	144
第14课 圆的一般方程	147
*第15课 圆的参数方程	150
七 椭圆、双曲线和抛物线	154
第16课 椭圆的标准方程(一)	154
第17课 椭圆的标准方程(二)	157
第18课 椭圆的几何性质	160
第19课 双曲线的标准方程	164
第20课 双曲线的几何性质	168
第21课 抛物线的标准方程	173
第22课 抛物线的几何性质	176
*第23课 坐标轴的平移	180
*八 极坐标	182
*第24课 极坐标系	182
*第25课 曲线的极坐标方程	184
小结与复习	186
复习参考题二	188
参考答案	190

第一模块 函 数

第六章 数列、数列极限

一、数列

第 1 课 数列的概念

前几章我们已学过一些函数的知识, 让我们来看下面的例子. 某种茶杯每个 5 元, 那么买 x 个茶杯所花的钱 y (元) 可用函数 $y=5x$, $x \in \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ 表示. 若我们将所需的钱数按茶杯的个数从小到大列出, 则可得到一列有顺序的数:

$$5, 10, 15, 20, \dots \quad \textcircled{1}$$

又如图 6-1 所示: 一堆钢管共堆放了 7 层, 自上而下各层的钢管数排列成一列数:

$$4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. \quad \textcircled{2}$$

正偶数 $2, 4, 6, 8, \dots$ 的倒数排列成一列数:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \dots \quad \textcircled{3}$$

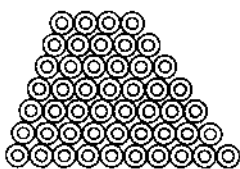


图 6-1

像上面的例子中, 按一定次序排列的一列数叫做数列, 数列中的每一个数都叫做这个数列的项, 按其顺序, 依次叫做这个数列的第 1 项 (或首项), 第 2 项, $\dots$, 第 n 项, $\dots$.

我们通常用带数字下标的字母表示数列的项, 于是数列的一般形式可以写成

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

其中 a_n 是数列的第 n 项. 有时我们把数列简记作 $\{a_n\}$. 例如: 数列 $2, 4, 6, \dots, 2n$ 中第一项是 2, 第二项是 4, 第三项是 6, $\dots$, 第 n 项是 $2n$. 可以简记作数列 $\{2n\}$.

在数列①中, 茶杯的个数 x 同时也表示相应的数在该列数中的位置 (序号). 所以数列①中, 第 n 项 a_n 与序号 n 有关系 $a_n=5n$. 如果数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项 a_n 与 n 之间的关系可以用一个公式来表示, 那么这个公式就叫做这个数列的通项公式. 例如, 数列②的通项公式是: $a_n=n+3$ ($n \leq 7$), 数列③的通项公式是 $a_n=\frac{1}{2n}$. 从函数的观点看, 数列可以看作是一个定义域为正整数集 $\mathbf{N}^*$ (或它的有限子集 $\{1, 2, \dots, n\}$) 的函数当自变量从小到大依次取值时对应的一列函数值, 而数列的通项公式也就是相应函数的解析式. 如果已知一个数列的通项公式, 那么只要依次用 $1, 2, 3, \dots$ 代替公式中的 n , 就可以求出这个数列的各项.

例 1 根据下面数列 $\{a_n\}$ 的通项公式, 写出它的前 5 项:

$$(1) a_n = \frac{n+1}{n}; \quad (2) a_n = (-1)^{n+1} \cdot n.$$

解: (1) 用 $1, 2, 3, 4, 5$ 依次代替通项公式中的 n , 得到数列 $\{a_n\}$ 的前 5 项为

$$2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}.$$

(2) 用 1, 2, 3, 4, 5 依次代替通项公式中的 n , 得到数列 $\{a_n\}$ 的前 5 项为

$$1, -2, 3, -4, 5.$$

注: 在计算 $(-1)^{n-1}$ 时注意它的符号规律.

例 2 写出下面数列的一个通项公式, 使它的前 4 项分别是下列各数:

(1) 3, 5, 7, 9;

(2) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}$;

(3) $-\frac{1}{1 \times 2}, \frac{1}{2 \times 3}, -\frac{1}{3 \times 4}, \frac{1}{4 \times 5}$.

解: (1) 这个数列的前 4 项 3, 5, 7, 9 都是序号的 2 倍加上 1, 所以它的一个通项公式是:

$$a_n = 2n + 1;$$

(2) 数列的前 4 项 $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}$ 的分母都是以 2 为底以序号作指数的幂, 而分子都是分母减去 1, 所以它的一个通项公式是:

$$a_n = \frac{2^n - 1}{2^n};$$

(3) 这个数列的前 4 项 $-\frac{1}{1 \times 2}, \frac{1}{2 \times 3}, -\frac{1}{3 \times 4}, \frac{1}{4 \times 5}$ 均为分数, 其分母都等于序号与序号加 1 的积, 且奇数项为负, 偶数项为正, 说明它含有因子 $(-1)^n$, 所以它的一个通项公式是

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n(n+1)}.$$

由数列的有限项观察得出数列的通项公式, 结果可能不是唯一的, 在解题过程中应分清给出各项中的不变部分和变动部分. 总结出变动部分与序号之间的关系.

例 3 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 30 + n - n^2$.

(1) 问 -60 是否这数列中的一项?

(2) 当 n 为何值时, $a_n = 0$, $a_n < 0$, $a_n > 0$?

解: (1) 令 $-60 = 30 + n - n^2$, 解得 $n = 10$ 或 $n = -9$ (舍去).

$\therefore -60$ 是这一数列的第 10 项.

(2) 令 $30 + n - n^2 = 0$, 解得 $n = 6$ 或 $n = -5$ (舍去).

$\therefore a_6 = 0$, 即当 $n = 6$ 时 $a_n = 0$.

令 $30 + n - n^2 > 0$, 解得 $0 < n < 6$.

$\therefore$ 当 $0 < n < 6$ 且 $n \in \mathbb{N}^*$ 时 $a_n > 0$.

同理可得: 当 $n > 6$ 且 $n \in \mathbb{N}^*$ 时 $a_n < 0$.

数列是一种特殊的函数, 所以也可以用图象来表示. 在画图时, 根据实际需要, 在直角坐标系两条坐标轴上取的单位长度可以不同. 图 6-2, 6-3 分别是数

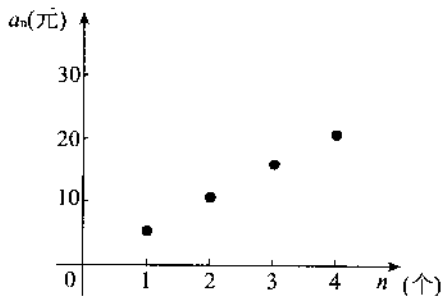


图 6-2

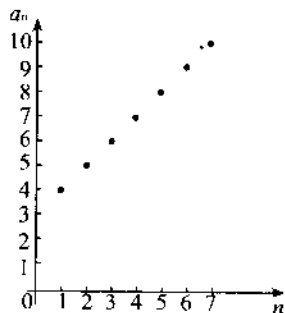


图 6-3

列①, ②的图象表示. 从图上看, 它们都是一群孤立的点. 例如, 表示数列①的各点的坐标依次是 $(1, 5), (2, 10), (3, 15), (4, 20)$.

一般地, 数列 $\{a_n\}$ 的图象是直角坐标平面上的·串点列, 其坐标依次为 $(1, a_1), (2, a_2), \dots, (n, a_n), \dots$. 借助数列的图象能直观地反映数列的变化趋势及各项的变化规律, 有利于讨论其性质.

数列的项数可以是有限的, 也可以是无穷多, 前者称之为**有穷数列**, 后者称之为**无穷数列**. 有穷数列的最后一项叫做该数列的**末项**, 无穷数列没有末项. 上面的数列②是有穷数列, 数列①、③都是无穷数列.

对于一个给定的数列 $\{a_n\}$, 时常会研究它的前 n 项的和的性质, 所谓数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和是指和数

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \quad (1)$$

由前 n 项和的意义可得:

$$S_{n-1} = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} \quad (2)$$

上两式相减 (① - ②) 得:

$$S_n - S_{n-1} = a_n \quad (n \geq 2).$$

注意到上式只在 $n \geq 2$ 时才成立, 当 $n=1$ 时, 我们将 $n=1$ 代入 $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ 得:

$$a_1 = S_1$$

所以 a_n 与 S_n 这间有以下的关系: $a_n = \begin{cases} S_1 & (n=1) \\ S_n - S_{n-1} & (n \geq 2). \end{cases}$

这里的两个式子只有联合起来才能完整地反映 a_n 与 S_n 之间的关系, 运用时应加以注意.

例 4 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 3^n - 2$, 求它的通项公式.

解: 当 $n=1$ 时, $a_1 = S_1 = 3^1 - 2 = 1$.

$$\begin{aligned} \text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } a_n &= S_n - S_{n-1} = 3^n - 2 - (3^{n-1} - 2) \\ &= 3^n - 3^{n-1} = 2 \times 3^{n-1} \end{aligned}$$

将 $n=1$ 代入上式得: $2 \times 3^{1-1} = 2 \neq a_1$

$$\therefore \text{通项公式为 } a_n = \begin{cases} 1 & (n=1) \\ 2 \times 3^{n-1} & (n \geq 2). \end{cases}$$

注: 应注意 a_1 是否也适合由 $a_n = S_n - S_{n-1} \quad (n \geq 2)$ 得出的表达式. 若不适合, 通项公式就需要用分段函数的形式给出.

练习

A 组

1. 数列 $\{(-2)^n + 1\}$ 的第 7 项是_____, 第 10 项是_____.

2. 选择题:

(1) 数列 $0, 2, 4, 6, \dots$ 的通项公式可能是: ()

(A) $a_n = 2n$. (B) $a_n = n^2$. (C) $a_n = 2(n-1)$. (D) $a_n = 2(n+1)$.

(2) 如果数列的前 3 项分别为 $-2, 1, -\frac{2}{3}, \dots$ 那么这个数列的通项公式可能是: ()

(A) $a_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{2}{n}$. (B) $a_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{2}{n}$.

(C) $a_n = (-1)^n \cdot \frac{2}{n}$. (D) $a_n = -\frac{2}{n}$.

3. 观察下面数列的特点, 用适当的数填空, 并写出每个数列的一个通项公式:

(1) (), 4, 9, 16, 25, (), 49;

(2) $-1, \frac{1}{2}, (), \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \frac{1}{32}, ()$;

(3) $1, \sqrt{3}, (), \sqrt{7}, 3, (), \sqrt{13}$.

4. 已知无穷数列 $1 \times 2, 2 \times 3, 3 \times 4, \dots, n(n+1) \dots$

(1) 求这个数列的第 10 项, 第 31 项及第 48 项.

(2) 420 是不是这个数列中的项? 如果是, 是第几项?

5. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = 2n^2 + n - 2$, 求数列通项 a_n .

解: 当 $n=1$ 时 $a_n = S_1 = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$. ①

当 $n \geq 2$ 时 $a_n = S_n - S_{n-1} = \underline{\hspace{2cm}} - \underline{\hspace{2cm}}$
 $= \underline{\hspace{2cm}}$. ②

将 $n=1$ 代入②式得 $a_1 = \underline{\hspace{2cm}}$ 与①式不相符

$\therefore$ 通项公式为 $a_n = \begin{cases} 1 & (n=1) \\ 4n-1 & (n \geq 2) \end{cases}$.

B 组

1. 数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=2, a_{17}=66$, 通项公式是序号 n 的一次函数. 求通项公式.

解: $\because$ 通项公式是序号 n 的一次函数.

$\therefore$ 可设通项公式为: $\underline{\hspace{2cm}}$ ①

由已知得 $a_1=2, a_{17}=66$

令①式中 $n=1$ 和 $n=17$ 得方程组 $\begin{cases} \underline{\hspace{2cm}} \\ \underline{\hspace{2cm}} \end{cases}$

解方程组可得 $\underline{\hspace{2cm}}$

$\therefore$ 通项公式为: $\underline{\hspace{2cm}}$.

2. 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = -2n^2 + 19n - 23$, 求 $\{a_n\}$ 中的最大项.

解: 由已知可知 a_n 可以看成是 n 的二次函数.

用配方法得: $a_n = \underline{\hspace{2cm}}$

可知二次函数的对称轴为: $\underline{\hspace{2cm}}$

又 $\because n \in \mathbb{N}^*$, $\therefore$ 当 $n = \underline{\hspace{2cm}}$ 时, a_n 最大,

最大值为: _____.

课外作业

1. 数列 $\left\{n + \frac{1}{n^2}\right\}$ 的前 5 项分别是: _____.

2. 写出下面数列的一个通项公式, 使它的前 4 项分别是下列各数:

(1) 0, -2, -4, -6;

(2) $\frac{3}{2}$, 1, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{4}$;

(3) $-\frac{1}{2 \times 1}$, $\frac{1}{2 \times 2}$, $-\frac{1}{2 \times 3}$, $\frac{1}{2 \times 4}$.

3. 选择题:

(1) 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = n^2 - n - 50$, 则 -8 是该数列的()

(A) 第 5 项. (B) 第 6 项. (C) 第 7 项. (D) 非任何一项.

(2) 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和公式为: $S_n = n^2 - 2n + 3$, 则该数列的前 3 项为()

(A) -1, 1, 3. (B) 2, 1, 3. (C) 2, 1, 0. (D) 2, 1, 6.

二、等差数列

第 2 课 等差数列及其通项公式

让我们看下面的数列:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7; ①

3, 6, 9, 12, 15, 18, 21; ②

3, 0, -3, -6, ... ③

它们有什么共同特点?

容易看到:

对于数列①, 从第 2 项起, 每一项与前一項的差都等于 1;

对于数列②, 从第 2 项起, 每一项与前一項的差都等于 3;

对于数列③, 从第 2 项起, 每一项与前一項的差都等于 -3.

这就是说, 这些数列的共同特点是: 从第 2 项起, 每一项与前一項的差都等于同一常数.

一般地, 如果一个数列从第 2 项起, 每一项与它的前一項的差等于同一个常数, 那么这个数列就叫做等差数列, 这个常数叫做等差数列的公差, 公差通常用字母 d 表示. 上面等差数列的定义可表示为:

$$a_n - a_{n-1} = d \quad (n \geq 2, d \text{ 为常数}).$$

上面 3 个数列都是等差数列, 它们的公差依次是 1, 3, -3.

等差数列在生活中有着广泛的应用, 如: 全国统一鞋号中成年女鞋的各种尺码 (表示鞋底长, 单位是 cm):

$$21, 21\frac{1}{2}, 22, 22\frac{1}{2}, 23, 23\frac{1}{2}, 24, 24\frac{1}{2}, 25.$$

显然这些尺码是按等差数列排布的, 那么公差是多少呢?

如果等差数列 $\{a_n\}$ 的首项是 a_1 , 公差是 d , 那么根据等差数列的定义可得:

$$a_2 - a_1 = d, a_3 - a_2 = d, a_4 - a_3 = d, \dots$$

所以我们用 a_1 和 d 表示各项得:

$$a_2 = a_1 + d,$$

$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d,$$

$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d,$$

.....

由此得到

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d.}$$

当 $n=1$ 时, 上面等式两边均为 a_1 , 即等式也是成立的, 也就是说对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$ 上面公式都成立. 因而它就是等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

例如, 如果一个等差数列 $\{a_n\}$ 的首项 a_1 是 1, 公差 d 是 2, 那么将它们代入上面的公式, 就得到这个数列的通项公式

$$a_n = 1 + (n-1) \times 2$$

即

$$a_n = 2n - 1.$$

等差数列的通项公式中出现 a_1 , a_n , n , d 四个重要的量, 任意给出其中三个, 我们就能求出第四个.

例 1 (1) 求等差数列 2, 5, 8, ... 的第 15 项.

(2) -201 是不是等差数列 -5, -9, -13, ... 的项? 如果是, 是第几项?

解: (1) 由已知可得: $a_1 = 2$, $d = a_2 - a_1 = 5 - 2 = 3$, $n = 15$, 代入等差数列的通项公式得:

$$a_{15} = 2 + (15-1) \times 3 = 44.$$

(2) 由 $a_1 = -5$, $d = -9 - (-5) = -4$, 得到这个数列的通项公式为 $a_n = -4n - 1$.

由题意知, 本题是要回答是否存在正整数 n , 使得 $-201 = -4n - 1$ 成立. 解这个关于 n 的方程, 得 $n = 50$, 即 -201 是这个数列的第 50 项.

注: 这是一个存在性问题, 对于此类问题, 我们的一般解法是, 首先假设它存在, 然后根据条件求出相应的量, 若能求出, 说明假设正确; 若不能求出, 则表示不存在.

例 2 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_5 = 10$, $a_{12} = 31$, 求 a_{20} .

分析: 要求 a_{20} 我们可先求出 a_1 和 d , 为此我们应着眼于建立两个关于 a_1 和 d 的方程,

解: 利用通项公式可得: $a_1 + 4d = 10$,

①

$$a_1 + 11d = 31.$$

②

这是一个以 a_1 和 d 为未知数的二元一次方程组, 解这个方程组, 得:

$$a_1 = -2, d = 3.$$

$$\therefore a_{20} = a_1 + (20-1)d = 55.$$

注: 由于 a_1 和 d 是等差数列中两个最重要的量, 等差数列的问题往往都通过求解出 a_1 和 d 从而获得解决. 数列 $\{a_n\}$ 的项数 n 往往随着 a_n 给出. 如给出 $a_5 = 10$ 的同时, 也给出了 $n = 5$.

例 3 安装在一个公共轴上的 5 个皮带轮的直径成等差数列, 其中最大的与最小的皮带轮的直径分别是 216mm 与 120mm, 求中间三个皮带轮的直径.

解: 用数列 $\{a_n\}$ 表示各个皮带轮从大到小排列时直径所成的等差数列, 由已知可得:

$$a_1 = 216, a_5 = 120, n = 5$$

由通项公式得: $a_5 = a_1 + (5-1)d$,

即: $120 = 216 + 4d$,

解出: $d = -24$,

因此: $a_2 = 192$, $a_3 = 168$, $a_4 = 144$.

答: 中间三个皮带轮的直径为 192, 168, 144.

例 4 已知数列的通项公式为 $a_n = -2n + 7$, 这个数列是否一定是等差数列? 如果是, 其首项与公差分别是什么?

分析: 由等差数列的定义, 要判定 $\{a_n\}$ 是不是等差数列, 只要看 $a_n - a_{n-1}$ ($n \geq 2$) 是不是一个与 n 无关的常数就行了.

解: 取数列 $\{a_n\}$ 中的任意相邻两项 a_n 与 a_{n-1} ($n \geq 2$)

$$\begin{aligned} a_n - a_{n-1} &= (-2n + 7) - [-2(n-1) + 7] \\ &= -2n + 7 + 2n - 2 - 7 \\ &= -2, \end{aligned}$$

它是一个与 n 无关的常数, 所以 $\{a_n\}$ 是等差数列, 且公差是 -2 .

在通项公式中令 $n=1$, 得 $a_1 = -2 + 7 = 5$, 所以这个等差数列的首项是 5, 公差是 -2 .

我们看到, 等差数列的通项公式可以表示为:

$$a_n = a_1 + (n-1)d = nd + (a_1 - d).$$

当 $d \neq 0$ 时, 它是关于 n 的一次式, 因此从图象上看, 表示这个数列的各点均在一次函数 $y = dx + (a_1 - d)$ 的图象上. 例如, 首项是 1, 公差是 2 的无穷等差数列的通项公式为:

$$a_n = 2n - 1$$

相应的图象是直线 $y = 2x - 1$ 上的均匀排开的无穷多个孤立点, 如图 6-4 所示.

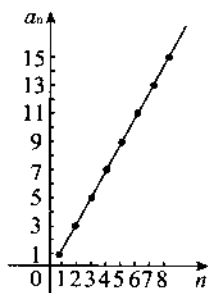


图 6-4

练习:

A 组

1. (1) 等差数列 13, 9, 5, ... 的第 4 项是 _____, 第 10 项是 _____.

(2) 等差数列 $\{a_n\}$ 中, $d = -\frac{1}{3}$, $a_{10} = 8$, 则 $a_1 =$ _____.

2. 选择题:

(1) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = a_n + \lg 2$, 且 $a_1 = 1$, 则其通项公式为 ()

- (A) $a_n = 1 + (n-1) \lg n$. (B) $a_n = 1 + \lg n$.
(C) $a_n = 1 + (n-1) \lg 2$. (D) $a_n = 1 + n \lg 2$.

(2) 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1 = -\frac{3}{2}$, $a_5 = 1$, 则 ()

- (A) $a_3 = 0$. (B) $a_4 = 0$. (C) $a_5 = 0$. (D) 各项都不是零.

(3) 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_9 = 3$, $a_{11} = 13$, 则 $a_{15} =$ ()

- (A) 33. (B) 28. (C) 23. (D) 18.

(4) 如果 2, a , b , 14 成等差数列则 ()

- (A) $a = 5$, $b = 8$. (B) $a = 6$, $b = 10$.
(C) $a = 5.5$, $b = 9.5$. (D) $a = 6.5$, $b = 9.5$.

3. 梯子的最高一级宽 33cm, 最低一级宽 110cm, 中间还有 10 级, 各级的宽度成等差数列. 计算中间各级的宽度.

解: 用 $\{a_n\}$ 表示梯子自上而下各级宽度所成的等差数列, 由已知条件有

$$a_1 = 33, a_{12} = 110, n = \underline{\hspace{2cm}}.$$

由通项公式, 得: $a_{12} = a_1 + (\underline{\hspace{2cm}} - 1)d$.

$$\text{即 } 110 = 33 + 11d.$$

解得 $d = 7$.

因此, $a_2 = \underline{\hspace{2cm}}, a_3 = \underline{\hspace{2cm}}, a_4 = \underline{\hspace{2cm}}, a_5 = \underline{\hspace{2cm}}, a_6 = \underline{\hspace{2cm}}, a_7 = \underline{\hspace{2cm}},$
 $a_8 = \underline{\hspace{2cm}}, a_9 = \underline{\hspace{2cm}}, a_{10} = \underline{\hspace{2cm}}, a_{11} = \underline{\hspace{2cm}}.$

答: 略.

4. 从材料工地运送电线杆到 500m 以外的公路一方安装, 每隔 50m 在路边安装一根, 又知每次只能运三根, 要完成运输 30 根电线杆, 并返回材料工地, 运输卡车最后一个来回要经过多少路程?

B 组

1. (选择题) 数列 $\{a_n\}$ 是一个无穷等差数列, 公差为 d , 则 $\{a_n\}$ 有有限个负数项的条件是: ()

(A) $a_1 > 0, d > 0$. (B) $a_1 > 0, d < 0$. (C) $a_1 < 0, d < 0$. (D) $a_1 < 0, d > 0$.

2. 首项为 -24 的等差数列, 从第 10 项起开始为正数, 试求公差 d 的取值范围.

分析: 题中数列从第 10 项起开始为正数, 说明前边 9 项都是等于或小于 0 的数, 第 10 项是第一个正数项, 结合不等式可求出相应量的范围.

解: $\because a_1 = -24 \therefore a_n = \underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}} \times d$

$\therefore$ 数列从第 10 项起开始为正数.

$\therefore a_9 \underline{\hspace{2cm}} 0; a_{10} \underline{\hspace{2cm}} 0.$

$\therefore$ 由不等式组 $\begin{cases} \underline{\hspace{2cm}} \\ \underline{\hspace{2cm}} \end{cases}$

解出 $d \in \underline{\hspace{2cm}}$

课外作业

1. (选择题) 设 $\{a_n\}$ 为等差数列, 首项 $a_1 = 1$, 公差 $d = 3$, 当 $a_n = 298$ 时, 则项数 n 等于 ()

(A) 101. (B) 100. (C) 99. (D) 98.

2. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中,

(1) 已知 $a_1 = 10, a_7 = 19$, 求 a_1 与 d ,

(2) 已知 $a_1 + a_8 = 12, a_4 = 7$, 求 a_9 ,