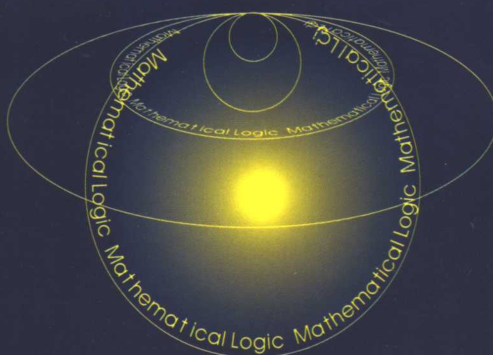
数理逻辑

现代逻辑学讲义

李小五 编著



中山大学出版社

/现/代/逻/辑/学/讲/义/

数理逻辑

A Course in Mathematical Logic

李小五 编著

中山大学出版社

·广州·

图书在版编目(CIP)数据

现代逻辑学讲义/李小五编著. —广州:中山大学出版社,2005.9
ISBN 7-306-02588-0

Ⅰ. 现…　Ⅱ. 李…　Ⅲ. 逻辑—高等学校—教学参考资料
Ⅳ. B81

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 088511 号

责任编辑:黄国荣　李　文
封面设计:八　度
责任校对:吴　燕
责任技编:黄少伟
出版发行:中山大学出版社
编辑部电话(020)84111996,84113349
发行部电话(020)84111998,84111160
地　　址:广州市新港西路 135 号
邮　　编:510275　　传真:(020)84036565
印 刷 者:广州市番禺市桥印刷厂
经 销 者:广东新华发行集团
规　　格:850mm×1168mm　1/32　16.25 印张　410 千字
版次印次:2005 年 9 月第 1 版　2006 年 6 月第 2 次印刷
定　　价:35.00 元(两册)

内容提要

数理逻辑是研究可以用数学语言表述的推理形式的有效性的学问。它是全部逻辑的基础,作为一门课程,它是逻辑学专业最重要的基础课。

数理逻辑分两大部分:句子逻辑和量化逻辑。本讲义介绍句子逻辑的基本内容和量化逻辑的基础——一阶逻辑的基本内容。

本讲义内容丰富,知识面广,表达严谨,习题例题丰富,可作为高等学校逻辑学专业本科生、研究生教材使用。

目　录

第0章　引　论

本引论分两节。

我们在§1给逻辑和数理逻辑下一个直观的定义。

在§2我们给出一些预备知识,这些知识是我们在全书经常要用到的。这些预备知识主要是集合论方面的。

§1 导 言

通俗地说,逻辑是研究推理的学问。但这种说法不严格。更严格的说法是:

逻辑是研究推理形式的有效性的学问。它提供一种系统的方法来刻画所有的有效推理形式。

这两句话有三层意思:

(1) 研究一定范围内(例如,相对某类语言)的所有推理形式。这样的推理形式往往有无穷多个。

(2) 所谓刻画就是把一定范围内的所有推理形式划分为两个部分:有效推理形式和非有效推理形式。这里的有效性概念基于真这个概念。

(3) 所谓系统的方法是指用具有某种演绎封闭性的聚合把所有的有效推理归在一起。

数理逻辑是研究可以用数学语言表述的推理形式的有效性的学问。

换句话说,数理逻辑顾名思义就是关于数学之理的逻辑。什么是数学之理呢? 笔者认为,数学之理主要指数学公式之间的推演。数学理论就是关于数学概念(数、形、…)和原则(公理)及其推演的理论。数学中的推演比较严格,但并不十分严格,而且一般性也不够。数理逻辑就是要进一步对上述推演进行抽象,建立更严格、更一般的形式系统。

§2　集合论初步

本节我们给出一些预备知识，这些知识是我们在全书经常要用到的。这些预备知识主要是集合论方面的。为了节省篇幅，下面给出的定义有时并不十分严格，请读者注意。但另一方面，这些定义在现今大多数集合论的教科书中都出现，所以（以后用∴表示）对此十分熟悉的读者可以跳过此节，直接阅读以后的内容。

另外，本章还引入一些约定和记号。这些也大都是他人经常用到的，∴我们也不做特别的交待。

本书我们定义、证明和讨论的许多东西在以后经常提到，∴冠以标号以节省篇幅。例如，下面的 0.2.1 表示此段内容是第 0 章 §2 的第 1 项我们需要标号的内容。这样的内容结束之后我们用◀结尾；“◀”可以称为**结束符号**。

0.2.1 定义和记号

(1) 我们用 $X=\{x, y, \cdots\}$ 表示包含 x，y，…为元素的**集合**。

(2) 我们用 $\varnothing$ 表示不含任何元素的集合，并称 $\varnothing$ 为**空集**。

我们用 $X\neq\varnothing$ 表示 X 不是**空集**，简称 X 是**非空集**。

(3) 令 X 是任意非空集。

我们用 $x\in X$ 表示 x 是 X 的**元素**，称为 x **属于** X；

用 $x\notin X$ 表示 x 不是 X 的元素，称为 x **不属于** X。

(4) 令 X 是集合，我们用 $|X|$ 表示 X 的基数，即 X 的元素的个数。◀

说明：据上述定义和记号，我们可以用 $X=\{x\in Y: P(x)\}$ 表示以集合 Y 中使 P 成立的 x 为元素构成的**集合**。

0.2.2 定义和记号

(1) $X\subseteq Y$ 表示“对所有 $x\in X$，有 $x\in Y$”。

这时称 X 是 Y 的**子集**。

$X=Y$ 表示 $X\subseteq Y$ 且 $Y\subseteq X$。

$X\nsubseteq Y$ 表示"并非'对所有 $x\in X$,有 $x\in Y$'"。

(2) $X\subset Y$ 表示 $X\subseteq Y$ 且 $X\neq Y$。

这时称 X 是 Y 的**真子集**(proper subset)[1]。

(3) $X\supseteq Y$ 表示 $Y\subseteq X$,这时称 X 是 Y 的**扩集**。

(4) $X\supset Y$ 表示 $Y\subset X$,这时称 X 是 Y 的**真扩集**。

说明:在本书,符号=有两种用法:一种在"是"的意义上使用,例如 0.2.1(1)中的=。另一种是在"集合互相包含"的意义上使用,例如 0.2.2(1)中的=。下面我们还用$=_{df}$,它表示用$=_{df}$右边的内容定义$=_{df}$左边的概念。

0.2.3 定义和记号

(1) $X\cup Y=_{df}\{x: x\in X$ 或 $x\in Y\}$。

称 $X\cup Y$ 为 X **和** Y **的并**。

(2) $X\cap Y=_{df}\{x: x\in X$ 且 $x\in Y\}$。

称 $X\cap Y$ 为 X **和** Y **的交**。

(3) $X-Y=_{df}\{x\in X: x\notin Y\}$,且称 $X-Y$ 为 X **与** Y **的差**。

(4) $\mathscr{P}(X)=_{df}\{Y: Y\subseteq X\}$,且称 $\mathscr{P}(X)$为 X 的**幂集**。

(5) 令 X 是集合的集合。定义

$$\bigcup X=_{df}\{x: \text{存在 } y\in X \text{ 使得 } x\in y\}。$$

称$\bigcup X$ 为 X **的并**。◀

0.2.4 定义和记号

[1] 通常我们把 proper subset 中的"proper"译为"真",这也许是借用过去一些数学家的译法,但在逻辑著作中,把形容词"proper"译为"真"是非常不合适的,因为(以后用∵来表示)逻辑中的"真"(truth, true,…)是一个与"proper"无关的核心概念,∴本书除了大家已经非常习惯的概念(如"真子集",以及下面的"真扩集")保持这种称谓,其他的"proper"尽量译为"实"。

(1) $\langle x, y\rangle =_{\mathrm{df}} \{\{x\}, \{x, y\}\}$。

称$\langle x, y\rangle$为 x 和 y 构成的**有序对**。

$\langle x_1, \cdots, x_n\rangle =_{\mathrm{df}} \langle\langle x_1, \cdots, x_{n-1}\rangle, x_n\rangle$。

称 $\langle x_1, \cdots, x_n\rangle$为 $x_1, \cdots, x_n$ 的(**有序**)n **元组**。

(2) $X\times Y =_{\mathrm{df}} \{\langle x, y\rangle: x\in X$ 且 $y\in Y\}$。

称 $X\times Y$ 为 X 和 Y 的**笛卡尔集**。

$X_1\times\cdots\times X_n =_{\mathrm{df}} (X_1\times\cdots\times X_{n-1})\times X_n$。

称 $X_1\times\cdots\times X_n$ 为 $X_1, \cdots, X_n$ 的**笛卡尔集**。

若 $X_1=\cdots=X_n$,则 $X_1\times\cdots\times X_n$ 记为 X^n。

我们约定 $X^1=X$, $X^0=\{\langle\ \rangle\}$,其中$\langle\ \rangle$是(惟一的)**空序列**。

通常也把$\langle x_1, \cdots, x_n\rangle$简写为 $x_1, \cdots, x_n$。

(3) 我们用 ω 表示**所有自然数的集合**。∴$n\in\omega$ 表示 n 是自然数。对每一 $n\in\omega$,我们也用 $n<\omega$ 来表示 $n\in\omega$,并把 n 理解为 $\langle 0, \cdots, n-1\rangle$。∴$m<n$ 表示 m 是 $0, \cdots, n-1$ 中的一个。

(4) 称集合 X 是**可数集** $\Leftrightarrow$ $|X|$是有穷的(当然是可数的),或$|X|$是可数无穷的(即 X 的基数与 ω 的基数相同:$|X|=|\omega|$)。◀

为了方便,以后我们用⇒表示元语言中的"若…则…",用⇔表示元语言中的"…当且仅当…"。我们规定⇒的结合力强于⇔。

0.2.5 定义和记号

(1) 称 F 是 n **元函数**或 n **元映射** $\Leftrightarrow$ 对所有 $x_1, \cdots, x_n, y, z$,

$$\langle x_1, \cdots, x_n, y\rangle\in F \text{ 且} \langle x_1, \cdots, x_n, z\rangle\in F \Rightarrow y=z。$$

(2) 若存在惟一的 y 使得$\langle x_1, \cdots, x_n, y\rangle\in F$,则称 y 是 F 在 $x_1, \cdots, x_n$ 处的**函数值**,记作 $y=F(x_1, \cdots, x_n)$。

(3) 我们用 $F: X\to Y$ 表示 F 是一个函数使得 F 的定义域 $\mathrm{Dom}(F)=X$ 且 F 的值域$\mathrm{Ran}(F)\subseteq Y$。

这时也称 F 是**从 X 到 Y 中的函数**。

若 Y 在上下文中清楚,无需提及,我们也称 F 是 X **上的函数**。

(4) $Y^X =_{df} \{F: F: X \to Y\}$。

(5) 称函数 $F: X \to Y$ 是**满射** $\Leftrightarrow \mathrm{Ran}(F) = Y$。

这时也称 F 是**从 X 到 Y 上的函数**。

(6) 称函数 $F: X \to Y$ 是**单射**

$\Leftrightarrow$ 对所有 x, $y \in \mathrm{Dom}(F)$,若 $F(x) = F(y)$,则 $x = y$。

称单射 $F: X \to X$ 是**调换次序函数**(permutation)。

(7) 称函数 F 是**双射或一一对应函数**

$\Leftrightarrow$ F 既是满射又是单射。

(8) 令 $F: X \to Y$。若 $X = \{\langle\ \rangle\}$,则称 F 是 0 **元函数**。

由于$\langle\ \rangle$是固定的,∴据 F 的单值性,F(在我们关注的性质上)等同于它的函数值,∴我们可以约定 F 就是 $F(\langle\ \rangle)$。∴我们把每一 0 元函数 F 等同于 F 的值域中的那个惟一的元素 $F(\langle\ \rangle)$。◀

说明:根据 0.2.4(2)和 0.2.5(4),X^n 既可以表示 n 重笛卡尔集,又可以表示从 n 到 X 中的所有函数的集合。但从集合论的角度来看,这两者指称的是同一个东西,∵n 元组序列可以看作定义域为 n 的函数,∴X^n 就是所有定义域为 n 且值域包含在 X 中的函数的集合。

本书我们要考虑的逻辑用形式语言来表述,而后者要用初始符号集来构造,∴我们这里先一般性地讨论初始符号集的有穷串的基本性质。

本章我们固定初始符号集 $\mathscr{S}$ 是可数集。我们总用元变元 α, β, γ(带或不带上下标)表示 $\mathscr{S}$ 中的元素。

0.2.6 定义

(1) $\mathscr{S}$ 中的符号构成的有穷横串(可以是空串)称为 **$\mathscr{S}$ 的有穷串**,简称**有穷串**,若上下文清楚。

若不再作说明,我们总用元变元 s, t, w,…(带或不带上下

标)表示 $\mathscr{S}$ 的有穷串,特别是用〈 〉表示空串。

(2) 称有穷串 t 的**长度**为 $n \Leftrightarrow t$ 由 n 个(允许重复出现的)符号构成。空串的长度为 0,单个符号构成的串的长度为 1。

我们用 $\lg(s)$ 表示 s 的长度。

(3) st 表示**毗连** s 和 t 得到的串(显然 st 也是有穷串)。

(4)

① 称 s 是 t 的**始节**(initial segment) $\Leftrightarrow$ 存在 w 使得 $t=sw$。令 s 是 t 的始节。称 s 是 t 的**实始节** $\Leftrightarrow s$ 不是空串也不是 t。

② 称 s 是 t 的**末节**(final segment) $\Leftrightarrow$ 存在 w 使得 $t=ws$。令 s 是 t 的末节。称 s 是 t 的**实末节** $\Leftrightarrow s$ 不是空串也不是 t。◀

据上述定义,我们有

0.2.7 推论

(1) 令 s, s' 是有穷串使得 $t=ss'$。则

① s 是 t 的始节。若 s' 还是非空的且 $s'\neq t$,则 s 是 t 的实始节。

② s' 是 t 的末节。若 s 还是非空的且 $s\neq t$,则 s' 是 t 的实末节。

(2) 设 $s=\alpha_1\cdots\alpha_n$。则对 $1\leqslant m\leqslant n$, $\alpha_1\cdots\alpha_m$ 是 s 的始节。

(3) 设 $s=\alpha_1\cdots\alpha_n$。则对 $1\leqslant m\leqslant n$, $\alpha_m\cdots\alpha_n$ 是 s 的末节。

(4) 空串和 s 自身既是 s 的始节又是 s 的末节。

(5) 若 s 的长度为 n,则 s 有 $n+1$ 个始节和 $n+1$ 个末节。

证明:(1)—(4) 显然。

(5) ∵空串和 s 自身也是 s 的始节和末节,∴施归纳不难得到要证结果。◀

0.2.8 定义　令 $s=\alpha_1\cdots\alpha_n$ 是有穷串。

称 α 在 s 中**有一个出现** $\Leftrightarrow$ 存在 $1\leqslant i\leqslant n$ 使得 $\alpha=\alpha_i$。◀

下列推论易证,留给读者作为练习:

0.2.9 推论　任给有穷串 s, t 和 w。

(1) $\lg(st)=\lg(s)+\lg(t)$。

(2)(**左消去原则**) 若 $st=sw$,则 $t=w$。

(3)(**右消去原则**) 若 $st=wt$,则 $s=w$。

(4) 设 s_1, s_2, s_3 和 s_4 是有穷串使得 $s_1s_2=s_3s_4$。

① s_1 是 s_3 的始节或 s_3 是 s_1 的始节。

② s_2 是 s_4 的末节或 s_4 是 s_2 的末节。

(5)

① 若 s 是 t 的始节且 t 是 s 的始节,则 $s=t$。

② 若 s 是 t 的末节且 t 是 s 的末节,则 $s=t$。◀

最后我们来证明两个关于可数无穷集的基本性质。它们也是我们这本书的集合论基础之一。

0.2.10 定理 任给可数无穷多个集合 $X_0,\cdots,X_n,\cdots$,其中每一 X_n 也是可数无穷的。则 $\bigcup_{n<\omega} X_n$ 也是可数无穷的。

证明:我们要证明 $\bigcup_{n<\omega} X_n$ 中的元素与 ω 中的元素一一对应。

用行列式枚举 $X_0,\cdots,X_n,\cdots$的元素如下:

$$
\begin{array}{ll}
X_0: & x_{00}, x_{01}, x_{02}, x_{03},\cdots, x_{0m},\cdots,\\
X_1: & x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13},\cdots, x_{1m},\cdots,\\
X_2: & x_{20}, x_{21}, x_{22}, x_{23},\cdots, x_{2m},\cdots,\\
\cdots\cdots, & \\
X_n: & x_{n0}, x_{n1}, x_{n2}, x_{n3},\cdots, x_{nm},\cdots,\\
\cdots\cdots。 &
\end{array}
$$

我们可以采用斜线法把 $\bigcup_{n<\omega} X_n$ 的元素枚举如下:

$$
\begin{array}{l}
x_{00}\to\\
x_{01}\to x_{10}\to\\
x_{02}\to x_{11}\to x_{20}\to\\
x_{03}\to x_{12}\to x_{21}\to x_{30}\to\\
x_{04}\to x_{13}\to x_{22}\to x_{31}\to\cdots。
\end{array}
$$

$\bigcup_{n<\omega} X_n$ 中元素 x_{nm}的位置，即 x_{nm}所对应的自然数，可以用函数 f：$\bigcup_{n<\omega} X_n \to \omega$ 来定义

$$f(n,\ m)=\frac{(n+m)^2+3n+m}{2},$$

其中$(n,\ m)$就是 x_{nm}的下标。易证 f 是双射。◀

0.2.11 定理　令 $\mathscr{S}$ 是可数无穷的，且令 X 是 $\mathscr{S}$ 中符号构成的所有有穷串的集合。则 X 是可数无穷的。

证明：任给 $1\leqslant n<\omega$，令 X_n 是所有长度为 n 的有穷串的集合。显然 X_n 是可数无穷的。∴我们可以枚举 X_n 的元素如下：

$$x_{n0},\ x_{n1},\ x_{n2},\ x_{n3},\cdots,\ x_{nm},\cdots。$$

令 $X_0=\{\langle\ \rangle\}$，则 X 就是$\bigcup_{n<\omega} X_n$，∴我们可以把它们排列如下：

X_0:　　$\langle\ \rangle$,

X_1:　　$x_{10},\ x_{11},\ x_{12},\ x_{13},\cdots,\ x_{1m},\cdots,$

X_2:　　$x_{20},\ x_{21},\ x_{22},\ x_{23},\cdots,\ x_{2m},\cdots,$

X_3:　　$x_{30},\ x_{31},\ x_{32},\ x_{33},\cdots,\ x_{3m},\cdots,$

……,

X_n:　　$x_{n0},\ x_{n1},\ x_{n2},\ x_{n3},\cdots,\ x_{nm},\cdots,$

……。

我们可以采用另一种斜线法把$\bigcup_{n<\omega} X_n$ 的元素枚举如下：

$\langle\ \rangle\to$

$x_{10}\to x_{11}\to$

$x_{20}\to x_{30}\to x_{21}\to x_{12}\to$

$x_{13}\to x_{22}\to x_{31}\to x_{40}\to$

$x_{50}\to x_{41}\to x_{32}\to x_{23}\to x_{14}\to x_{15}\to\cdots$。

如前我们可以证明 X 是可数无穷的。◀

注意：自然数集 ω 的幂集是不可数的。

练习 0.2

0.2.12 证明 0.2.9。◀

第 1 章　句形的基本性质

在我们的日常思维中，通常是用句子来进行推理的。∴本编研究最简单、也是最基础的数理逻辑。这种逻辑研究的最小语言单位是句形，即形式化的句子。