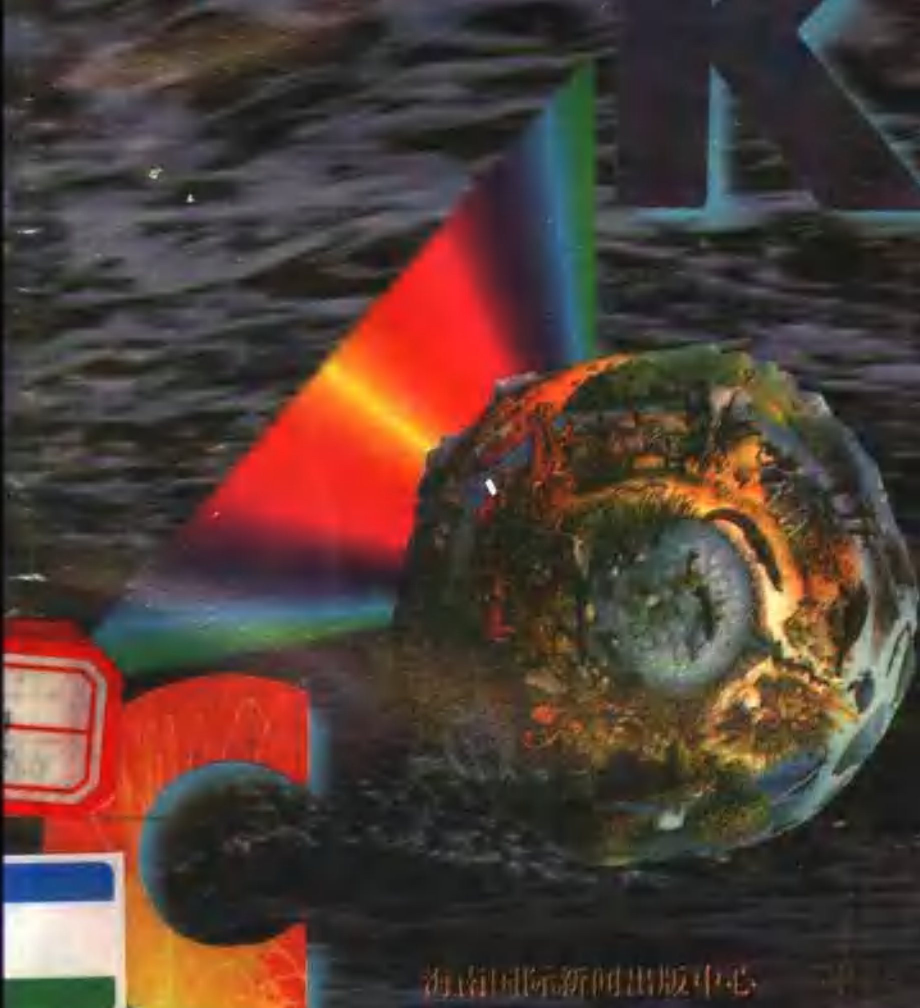
中小学

课外小博士

世界数学通（二）



海南国际新闻出版中心

世界数学通(二)

刘以林
冯晓林 主编
俞渭贤 撰文

海南国际新闻出版中心图书出版社

目　录

一、黄金分割"美的密码"

毕达哥拉斯有一句至理名言:"凡是美的东西都具有共同的特性,这就是部分与部分以及部分与整体之间的协调一致。"

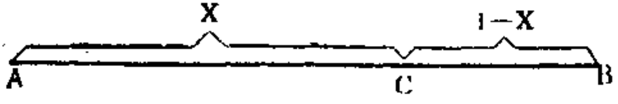
其实咱们每个人都在实践着毕老前辈的教导,比如说到哪一处名胜摄影留念,很多时候我们都是把自己放在画面的一侧,放在中间就不太好看了。当然也不能太靠边了,"过犹不及"嘛。一般来说大约站在画面的 0.618 处比较多,比较合适。

世界上绝大部分国旗都是矩形。大伙把这百多面国旗拿出来看看,匀称好看的也大多是那些边长之比接近 0.618 的。从古代起人们就似乎有这种感觉,这种矩形特别令人赏心悦目。

这样一个比就叫做黄金比,而一条线段分成这么两段的话,就叫黄金分割。瞧,多值钱! 多被人们看重!

那么这 0.618 黄金之比倒是如何发现的呢? 这就要想到毕达哥拉斯的那段名言了:

假如 C 是线段 AB 的一个分点。



为了使 C 满足毕达哥拉斯所讲的"部分与部分以及部分与整体之间的协调一致",显然应该有:

AB:AC=AC:CB　　如果 AB=1,咱们看看 AC 应该是多少。设 AC=x,那么就有:

$$1:x = x:(1-x)$$

也就是方程 $x^2+x-1=0$

接着解这个方程那倒不费力 $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\doteq 0.618$!

人们把它称之为"美的密码",二千多年来如痴如醉。毕氏团体更是把含有这黄金分割点的五角星作为他们的徽记。五角星中的黄金分割点究竟有几个?其中的黄金分割究竟在哪里?好好的画上一个五角星,就立即会发现了。

这毕氏门徒们对几何形体之美是如此神魂颠倒,弄得对什么样的几何体都要给个"说法",以符合宇宙的和谐之美。

比如像正多边体,它们确实对称,均匀,所有的面都是正多边形,而且还是都一样的多边形,有着一种均衡、对称的韵律美。像立方体(也就是正六面体),有四个三角形面的正四面体,有八个三角形面的八而体,都是咱们平常经常看见的。

毕老先生们就把它们和古代人认为的四种原始"元素"神秘地联系在一起:四面体代表火;二十面体代表水;八面体代表气;六面体能很稳地放在地上,就让它代表地了。

怪不得他们的学派弄得神秘兮兮的,原来做学问的时候就有着这毛病。追求美、追求和谐自然不错,不过一旦"唯美"了就过了"度",反而把本来是美的弄成不美了。

毕氏学派也很崇尚数字之美。他们把 6 叫做完全数,因为 $6=1+2+3$,而 1、2、3 是 6 的全部真因子。

28 的全部真因子是 1,2,4,7,14,而 $28=1+2+4+7+14$,所以 28 也是个完全数。

人类对完全数的寻找可真是费了劲。直到 1952 年,才知道 12 个完全数,它们都是偶数,其中头三个就是 6,28 和 496。

那么奇完全数是否存在呢?这就成了数论中一个著名的还

没有解决的问题。

现如今咱们有不少人，要电话号码拿汽车牌照，以至于结婚、开张，都想弄个吉利的数码讨个口彩，什么“168”啦，“1898”啦，为弄个数码花钱托人。要是摊上个“184”，定有几天几夜睡不着。

不过咱们这些个可爱的土迷信要是到了毕达哥拉斯那儿，可真算得上粗俗不堪土得掉渣，连讲究个迷信都没那份水平。

那么毕达哥拉斯们又把什么数看成是大吉大利的呢？这就是亲和数。亲和数总是成对的，毕达哥拉斯提出的一对亲和数是284和220。

为什么称它们为亲和数呢？因为，220的真因子是1,2,4,5,10,11,20,22,44,55,110，其和为284；而284的真因子是1,2,4,71,142，其和为220。

你瞧，这两数倒 亲亲密密，关系不浅，所以那时就把这两个数分别写在两个护身符上，两个佩带护身符的人一定能平平安安万事顺利友谊地久天长。这洋迷信还真上点档次，有点学术水平。

奇怪的是，从毕老前辈以后，很长一段时间都没有发现新亲和数。直到136年，法国数论大家费马才宣布17926和18416是另一对亲和数。又过了两年，法国数学家笛卡儿找到了第三对。

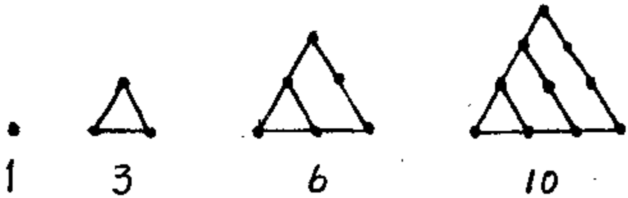
瑞士数学家欧拉其志不小，他想一劳永逸地解决这个问题，虽然不太成功，但他仍然才气非凡地在1747年给出了一个30对亲和数的表，后来又扩展到超过60对！

在这漫漫的寻宝历史中，还有一件趣事，一个十六岁的意大利男孩帕加尼尼，居然在1886年发现了被人们忽视的、比较小的一对亲和数：1184和1210。现在，已经知道的亲和数有1000对以上。

尽管亲和数、完全数被毕氏派笼罩了一层神秘迷信的色彩，可这毕竟开拓了数论——这门古老而又年轻的数学学科的道路。

毕氏数学"学会"不但从真因子这方而去研究数，而且他们把整数看成是一些几何图形的排列。他们常把数在沙滩上用小石子排成某个图形。

1，3，6，10……这些数叫三角形数，因为相应的点子能摆成正三角形。这第四个三角形数特别使他们神往，因为这 10 等于 1＋2＋3＋4，而这四个数更是神秘地被认为是构成宇宙的基础呢！



在沙滩上不断地摆弄这些三角形，时间久了当然看出门道来了，三角形数不就能写成 1，1＋2，1＋2＋3，1＋2＋3＋4 吗？

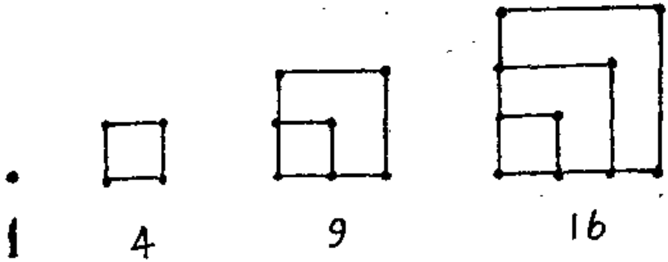
这从图形上来看是很清楚的呀！慢慢地又得出了一般情况

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

得出这样一个数列的和已经相当不容易了，但毕氏门人更有绝招，正方形、正五边形，他们都用石子来摆弄一番，得出了更多数列方面的发现。

瞧瞧下而的一些正方形，就是 2500 年前爱琴海滩上的杰作，数一数就能知道，分别是 1，4，9，16……这些数当然就叫正方形数了。用咱们现在的话来说，就是自然数的平方项：1^2，2^2，3^2，4^2……n^2

在某一个正方形中(比如说第三个)打上一条斜杠,正方形不就变成两个三角形了?所以,两个相邻的三角形数的和,就是个正方形数,用现在的记法就是:



$$\frac{(n-1)n}{2}+\frac{n(n+1)}{2}=n^2$$

这正方形数的花样他们还能变出更多。比如说把这正方形的点阵分割成一把一把曲尺,就像我们在图里看到的那样,您再仔细看看,每一把曲尺里都是多大的数?从里向外一数就可以明白了,不就是 1,3,5,7,……,奇数数列!

再把它们加起来,不就是个正方形吗?于是有:$1+3+5+7+\cdots+(2n-1)=n^2$

且说毕氏学派把学问发展到这份上,就觉着相当满意了。很对得起自己,也很对得住和谐完美的宇宙了。

“万物皆数”,在他们看来确实是颠扑不破的真理了。当然,他们心目中的“数”,是完美、和谐、有着种种美妙表现的整数。

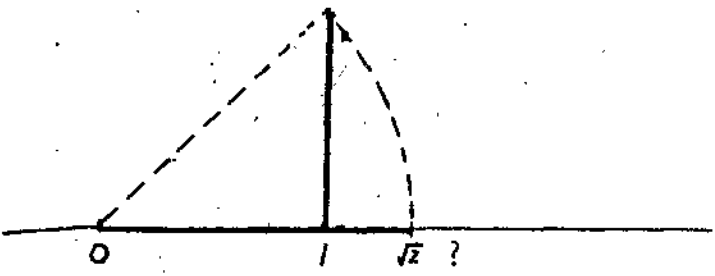
二、无理数引发第一次数学危机

那么当时难道就没有分数？当然不会。做买卖，搞贸易，测天量地，不可避免会出现“零头”，要把一个单位，比如说一块钱啦一尺长啦，分成几分之几。就是日常生活，拿了一块面包分给几个孩子吃，也要平均分一下，这样久而久之，当然会有分数的概念了。

但是毕氏学派并不把这些分数看作是一类新的数，而是把分数看成两个整数的比：$\frac{p}{q}$。这么一来，一切都还是整数的天下，完美无缺的世界当然会永远继续下去。

毕氏学派把分数看成是$\frac{p}{q}$倒也很对，我们现在也还是这么看的。而且这么一来，也没有古埃及人和巴比伦人那一套繁杂的表示了，当然是一大进步。

把数和图形联系起来是毕达哥拉斯们的一大爱好，什么三角形数啦，正方形数啦等等，从中还发现了不少美妙的性质。那么这整数之比又用什么图形呢！当然也有办法。



用一条直线，上面标上单位，哪一个分数不能在这条直线上

找到一点呢！比如说$\frac{p}{q}$，要表示的话，就把0到1那段线段等分成q份，再取其中的p份，不就成了？这样，每个分数（按照毕老的意见，是“整数之比”），都对应着直线上的一个点。

在这些老前辈看来，直线上的点就这么用完了，不是整数点，就是分数的点。所以，像$\sqrt{2}$这样的无理数居然能在直线上表示出来，对他们来说，简直是不能忍受的大打击。

这$\sqrt{2}$的发现很可能也是在研究直角三角形时产生的。

等腰直角三角形是一个常见的三角形了，如果两条直角边都等于1的话，那么用毕达哥拉斯定理，当然能得出斜边应该是2的平方根，也就是$\sqrt{2}$。

当然那时候这$\sqrt{2}$也不是咱们现在这种表示，大家也都把它当成是一个有限的小数，那里想到会出什么事呢？比如巴比伦人，就是用一串六十进制的分数来表示的：$1+\frac{24}{60}+\frac{51}{60^2}+\frac{10}{60^3}$。

想法大家都差不多，但是用毕氏学派的惯用语言来说，那就是$\sqrt{2}$肯定也是两个整数之比，绝对错不了，否则宇宙不乱了套？

这毕氏一派毕竟是讲究推理，讲究证明，2开平方到底是个什么样“整数之比”，总想问个明白。这种正面寻找的工作究竟做了多少时候，想了些什么办法，有哪些人从事这项课题，又拨了多少科研经费，咱们现在都不清楚了。不过虽然一直都没找到这“整数之比”，也都觉得不会有多大的问题。

这一天，毕氏的一位门徒希帕索斯先生，又把这个问题拿出来考虑一番。猛然间想到，既然大家都认为它是一个整数之比，那不防设它为$\frac{m}{n}$。约去m、n的公因数，则m、n之中至少有一个是奇数。

如此一来，$2=\frac{m^2}{n^2}$，从而 $m^2=2n^2$ 是偶数；m^2 既是偶数，那么 m 必然也是偶数，因此 n 是奇数。

m 既然是偶数了，那么可以设它为 2p：$m=2p$，这样就有 $4p^2=2n^2$，约去 2 就得到 $n^2=2p^2$，n 又变成偶数了。

如此一来产生矛盾，那 $\sqrt{2}$ 的地位就十分清楚了：根本不可能是两个整数之比，不可能是分数。

一个新的数发现了。一种新的证明方法也从此得到了运用，这就是上面所用的反证法。不过希帕索斯并没有因为这两项成果得到什么科学奖，却被他的同伴们引到了茫茫的大海上。

话说这希帕索斯的发现在学术讨论会上一公布，顿时是议论纷纷，那惊愕的程度不亚于原子弹爆炸。

其实咱们细想一下也并不奇怪。实际生活中谁会用到 $\sqrt{2}$？分数足矣！如果你去买 $\sqrt{2}$ 斤糖，售货员小姐不给你一个"卫生球"才怪呢！说不定还要喊保安。再说了，她也没法称啊！就是拿最精密的天平，也绝对称不出 $\sqrt{2}$ 来。

人们的直觉中，根本没有无理数的地位，只有当演绎推理的方法一应用，大家这才张开吃惊的嘴巴。在这里，我们看到了另外一种数学之美：逻辑美。

再说这毕氏门中之人自然都不是无能之辈，一开始当然是不相信，都想找找希帕索斯的发现是不是有些毛病，挑出点错。可日子一久，在那铁的逻辑推理面前，都只能哑口无言。

一边是苦心经营多年的和谐完美的数的大厦，一边是不容怀疑、被他们的当作锐利武器的逻辑推理，这真叫"以子之矛，攻子之盾"，学派陷入了两难境地，思想混乱，信仰危机。

这就是历史上常常说起的"第一次数学危机"。

痛苦万状的毕氏学者们真不知怎么办是好。照理来说，痛痛

快快地承认，向真理投降，不失为大丈夫气概，学者风范。但细细一想，却万万不可。且不说心目中那神圣和谐的宇宙秩序顷刻瓦解，就连学派的地位也岌岌可危，闹不好会全盘崩溃，树倒猢狲散。

于是这帮有着责任感的弟兄们决定再做努力，邀请那位闯祸的哥们作最后的谈判。

会谈是在平静海面的一条小舟上进行的。希帕索斯真理在握，自然力图再一次说服大家，但船里的诸位哪能不明白。

不明白的是那位希帕索斯先生，大伙的目的是要他放弃"邪说"，以后少说废话。希先生还想辩个究竟，但见七八只手一起伸过来，来了"一、二、三"，听"扑嗵"一下，请他一了百了。

数学史上一位悲壮的殉道者就这样产生了。

崇尚"美"的毕氏门徒，就这样否认了"真"，违背了"善"。

看来不管什么改革运动，有些人不是不明白要改革，但他更明白改革要改到自己头上。所以反对起来最起劲。

不过也有人说，希帕索斯的那帮弟兄看在多年的情份上，饶他一死，但立即革出教门，请他马上离开家乡，自我流放。

然后就造了一座假坟，断了其他人的是非之心。

这毕达哥拉斯学派的功功过过咱们已经明明白白，成败是非咱们也已一清二楚。

真可谓：伟哉毕氏学派！创千年数学之基业，开逻辑证明之先河！

悲哉，毕达哥拉斯学派！置伟大发现于不顾，入"唯美"迷途而不返。

由于他们不承认无理数，所以他们认为，结构严密的数学大厦只能是几何。是啊，正方形的对角线在几何图形中一点没困难，一点没毛病，但是一到了代数、算术中，要用一个他们认为不

可能存在的数去表示，确实使这些老先生既头痛，又迷糊。

于是，几何在希腊数学中占有特殊地位。代数和几何分成了截然不同的两部分。

一边是遭到他们冷落的代数和算术，许多方面的问题在那会儿都用几何方法去解决。古希腊的学者们对“算”没什么兴趣，认为那不过是商人们关心的事，哪能进入神圣的数学殿堂！

一边是备受青睐的几何。用严密的逻辑，严格的推理，把它构筑成一座令人赞叹的宏伟建筑。一直到欧几里德，集希腊数学之大成，以不朽名著《几何原本》登上了当时的最高峰，我会在第四回中详细介绍。

上回书中说到中国的墨子谈到的分割问题，与古希腊倒也有一段瓜葛。这也并非说有什么产权官司好打，只不过是异曲同工而已罢。

那墨老先生是说，把一个物体从中间分开，丢掉一半；再从中间分开，再弃去一半；如此这般分下去，最后剩的就是一点了。

墨老先生是公元前五世纪人，和希腊的学者们完全是同时代。那么他的希腊同行们是如何看待这个问题的呢？

话说到这儿，也该讲个故事给大伙听听了。不过，这次的故事还是个进口的，虽然都是些洋名号，聊起来倒是挺有趣。

那希腊雅典，本是神话的沃土，什么太阳神阿波罗，战神阿雷斯，雅典守护神雅典娜，如此等等，真是丰富多彩，琳琅满目。

内中单道一位善跑之神阿基里斯，虽然没有与咱中国追太阳的夸父在什么运动会上一决雌雄，相信他俩恐怕也是不分伯仲，一天之内绕地球几圈没问题。

这一天，不知为的是啥，阿基里斯居然要与乌龟比一比高低。为了表示大度，决定先让乌龟跑上一百里。

比赛尚未开始，有一位智叟在旁放了话。他说阿基里斯永远

追不上乌龟！

各位观众一听愣了神，纷纷请智叟说个明白。

这位智叟不慌不忙说了一番话："咱们现在就比方阿基里斯跑的速度是乌龟的十倍。那么当阿基里斯跑完开始的一百里的时候，乌龟又向前爬了 10 里，等阿基里斯追上这 10 里，乌龟又向前爬了 1 里；等冠军阿基里斯再追上这 1 里，乌龟又走了$\frac{1}{10}$里……，如此一来，你们说阿基里斯能追上乌龟吗？"

众人想想这道理还真对。后仔细一想，与真实的情况又大不一样啊！被智叟弄得一头雾水，脑门子想疼了也得不出个所以然，只有作鸟兽散回家睡觉。

这种似是而非、充满着矛盾的问题，就叫"悖论"。"悖"，就是有悖常理的意思。这就是历史上有名的"芝诺悖论"。

提出这悖论的芝诺是公元前 495 年到公元前 480 年间的数学家，也是位哲学家。他和他的老师都是毕达哥拉斯派的学者。

芝诺先生是位大学问家，当然不会不明白阿基里斯实际上一会儿功夫就能上乌龟。他提出这么个问题，正说明他想得深刻，问得高明，把人们原来模糊的东西，很清楚很尖锐地展现出来。

那人们又模糊在什么地方呢？这就是无限与有限的关系。

阿基里斯要追上乌龟，就要不停地跑下去。在这不停地跑（也就是"追"）的过程中，他追的路程依次是：

$$100,10,1,0.1,0.01,0.001,\cdots\cdots$$

这是无限多个距离，越到后面越小。

有人说了，后面数字哪怕再小，总是个有大小的数，那阿基里斯和乌龟不就还是存在距离吗？比方说，从头数第 10000 个数，是 10^{-9997}，($\frac{1}{10^{9997}}$)，不有大小吗？

不错，你说的有几分对。如果阿基里斯走到这时停下来了，那两者之间确实从理论上说有这么点点小距离。

但是现在阿基里斯是继续地往下追！所以两者的差距肯定比这要小！

阿基里斯不停地这么追下去（就像我们在前面所说过的那样），无限地追下去，那两者之间的距离可就比你给的任一个很小很小的差距还要小。

比方说，你说现在阿基里斯和乌龟相差$\frac{1}{10^{100000}}$，那么因为继续无限地在追，两者之差肯定比它小。

如果你还有兴趣举一些很小的数的话，回答还是一样。这样一来，两者之间的距离就只能是零了，也就是神跑手追上了乌龟。

这里的关键就是“无限”，无限地在追！中途停下来可就不成了。

通过无限的过程，一直往小里变化的正数可就变成一个固定的常数了。

在古代华夏，差不多与芝诺同时，也有对无限的思考。

一位是咱们前面提过的墨子。

另一位是庄子。老庄先生有句名言：

“一尺之棰，日取其半，万世不竭！”意思是把长一尺的木棒，每天取下前一天所剩下的一半，一万年也取不完。

这墨子说的也是把东西一分为二，不过他是说，老这么分，无限地分，分到最后就没有了，变成一点（“零”）。

通过芝诺悖论的分析，当然大家知道墨子的话是对的。

那庄先生呢？他的话对吗？

如果真是只取一万年，停下来不取了，那自然是还有这么一

小段(不是一点),倒也真是没取完。

不过古代这“万世”,意思也就永远不停地取下去。这么一来,庄先生可就要“梦蝶一场空”了,说的就不对了。

这无限与有限还真是不一样。所以就像咱们的圆脑袋不能往方帽子里套一样,那无限的问题也不能用有限的框框去套。

话是这么说,可事到临头又会不自主去套以前现成的框框。

比如说,那阿基里斯追上乌龟的距离之和应该是:

$$100 + 10 + 1 + 0.1 + 0.01 + 0.001 + \cdots\cdots$$

这么多个有限的数!无限多个!加起来照咱们以前的框框,应当是无限大了!但答案自然不是无限大。

瞧,那后面的小数之和:

$$0.1 + 0.01 + 0.001 + \cdots = 0.\dot{1}$$

就是循环小数 $0.\dot{1}$,而 $0.\dot{1}=\frac{1}{9}$,是个有限数!

当然,并不是所有无限个数的和都是一个有限数:

$$1 + 10 + 100 + 1000 + \cdots\cdots$$

这就是无限大了。

所以,无限的世界与有限的世界不一样,具体问题要具体分析。

奇妙的无限世界并不神秘,而彻底揭开这神秘的面纱,已经是离古希腊 2000 多年后的 19 世纪了。

让咱们回过头来再谈一番古希腊,然后聊 19 世纪不迟。

三、思维清晰运算同步灿烂

再说这古希腊数学,从公元前 600 年泰勒斯首开证明先河,到公元前 300 年,著名的欧几里得《几何原本》的问世,可谓是成

就辉煌的 300 年，英雄辈出的 300 年。

在这 300 年中，有三个不同的发展方向，我们已经谈了其中的两个。

其一，是泰勒斯开头，毕氏学派高擎大旗，后经希波克拉底、欧多克斯等人不断努力，形成一股讲求严密和逻辑推理的主流。最后汇入到欧几里德的《几何原本》中去，使其成为傲视千年的经典。

其二，以芝诺悖论为开篇，有关无穷小、无限以及求和过程的各种概念的萌发，代表了古代对极限思想的认识，其中又以欧多克斯的穷竭法最合理，最先进。而其余的学者，往往只能用迷朦的眼光看着自己的问题。一直到现代，微积分发明之后，才得最后的解决。

那么，这第三个方向又为如何呢?这倒可以从古希腊几何中的三大难题或说趣题谈起。

这三大难题也许大家都知道一些，因为它们很有名，而且有名有了几千年。

这是三个著名的作图问题：

化圆为方问题。就是作一个正方形，让它与一个给定的圆面积相等。

三等分角问题。就是给你一个任意角，把它分为三等分。

倍立方体问题。给你一个立方体，让你作一个新的立方体，体积是原来的两倍。

这三个问题名气之大，可以说是上下几千年，纵横几万里。它的有名居然是因为统统作不出图！是古希腊所谓几何三大作图不可能问题。

不过，咱们要说得周全一些的话，是尺规作图不可能问题。

这尺和规是人类老祖宗最早的作图工具。