高考数学专项夺标

GAOKAO
SHUXUE TIANKONGTI
QIAOJIE

高考数学填空题巧解

高考数学研究组 组编

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大學出版社

高考数学专项夺标

- ★ 高考数学新颖题解读
- ★ 高考数学解题法揭秘
- ★ 高考数学选择题突破
- ★ 高考数学填空题巧解
- ★ 高考数学中档题攻略
- ★ 高考数学综合题透析
- ★ 高考数学展望与对策

ISBN 7-308-04657-5

9 787308 046572 >

ISBN 7-308-04657-5/G · 1035
定价：12.00 元

高考数学填空题巧解

高考数学研究组　组编

编　委　（按姓氏笔画为序）

马茂年　王小海　王　新　王旭斌　方夏婴
李惟峰　许静香　朱进初　张金良　陈　伟
陈红艳　徐国君　徐小明　倪志香　俞　昕
俞建光　韩国梁　蒋瑞龙　谢春计　蔡小雄

浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高考数学填空题巧解 / 高考数学研究组组编. —杭州：浙江大学出版社，2006. 3
ISBN 7-308-04657-5

Ⅰ. 高... Ⅱ. 高.... Ⅲ. 数学课—高中—解题—升学参考资料 Ⅳ. G634. 605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 018455 号

出版发行	浙江大学出版社
	(杭州天目山路 148 号 邮政编码 310028)
	(E-mail:zupress@mail. hz. zj. cn)
	(网址:http://www. zjupress. com)
责任编辑	杨晓鸣 王 波
排 版	浙江大学出版社电脑排版中心
印 刷	杭州杭新印务有限公司
开 本	787mm×960mm 1/16
印 张	10. 25
字 数	200 千字
版 印 次	2006 年 3 月第 1 版 2006 年 4 月第 2 次印刷
书 号	ISBN 7-308-04657-5/G・1035
定 价	12. 00 元

前　言

高考复习是循序渐进、不断综合、不断深入、不断提高的过程，也是再学习、再研究、再认识、再质变的过程。数学作为高考三大工具学科之首，在高考中的地位是显而易见的。那么，怎样才能学好数学呢？特别提醒考生要注意以下几点：

1.要真正做到了解自己，要了解自己的知识薄弱环节，寻找相关题目，进行有选择性、有针对性的训练。

2.在做题过程中，要掌握解决问题的基本方法，注重通性通法，做题要有主动意识、要及时总结和反思，力争通过做一题，得到一类问题的解决方法。

3.在做题过程中，要注重解题的思考过程，注重研究解题的方向和策略，逐步提高自身的解题能力。

4.在做题过程中，要有一个阶段对选择题、填空题、中档题、综合题进行专门训练，要加强准确度的训练，提高解题速度，只有这样才能在高考中取得好成绩。

5.在做题过程中，应该学会数学思维与数学方法，数学思维方法都不是单独存在的，都有其对立面，并且两者能够在解决问题的过程中相互转换、补充，领悟数学思维中的哲学思想和在哲学思想的指导下进行数学思维，是提高学生数学素养、培养学生数学能力的重要方法。

6.加强自身解题规范性的训练，了解试卷批改中的给分点，严格按评分标准书写解答题，熟练、准确地用文字语言、符号语言、逻辑语言表达解题过程，字迹工整，力争会做的题目不丢步骤分，不完全会做的题目也能拿到部分分数。

“高考数学专项达标丛书”以其鲜活的素材，准确的信息，新颖的体例，独特的风格呈现给读者。丛书包括《高考数学新颖题

解读》、《高考数学解题法揭秘》、《高考数学选择题突破》、《高考数学填空题巧解》、《高考数学中档题攻略》、《高考数学综合题透析》、《高考数学展望与对策》共七个分册。丛书内容全面细致，容量大，既抓住主干知识的重点、难点、热点，又不留知识死角。题型全面，题量充分，体例设计科学，构思奇巧。丛书可以带领你进入数学的殿堂，领略殿堂的美丽和奥妙，掌握更熟练的方法和技巧。

丛书由高考数学研究组组织编写。尽管在成书过程中，我们本着近乎苛刻的态度，题题推敲，层层把关，力求能够帮助读者更好地把握丛书的脉络和精华，但书中也难免有疏忽和纰漏之处，诚挚地希望广大师生批评指正。

目　　录

第一部分　填空题的解题思路与方法

由于高考填空题注重多个知识点的小型结合，渗透着各种数学思想和数学方法，体现了利用基础知识考查能力的导向，因而中、低档填空题仍为具备较佳区分度的基本题型. 特别是近年来命题指导思想又倾向于“多题把关”，并把开放型问题引入填空题中，明显加大了填空题中一些题目的难度，这就使填空题成为拉开考生时间差、分数差、加大区分度的必要题型. 解答好填空题的关键是“准确、迅速”，要做到这一点，就需要结合试题的结构特点，掌握一些常用的方法和技巧.

填空题是近几年高考试题难易程度变化较大的题型，考查的功能从只考计算的单一形式变为考查概念、推理、数学思想方法和应用. 从 1997 年以来，高考试卷把填空题当作创新改革的“试验田”，相继推出了一些题意新颖、构思精巧、具有相当深度和明确导向的创新题型，使高考数学试卷充满了活力，并随之加大了填空题的难度. 这类题型的特点是，将解题信息改变常规表述方式，设计或定义一个陌生的数学情景，让考生首先要深入审题，细心阅读理解，提取解题信息，在此基础上运用所学知识和方法灵活地进行知识迁移. 近几年多次出现的多选填空题，虽然题型相似，但由于结论的不惟一性，也会造成误选或多选，成为失分最多的考题之一. 解决此类问题的方法是通过阅读材料，分析、理解问题所给的相关信息，经过合成和加工，形成解题思路.

这些年的创新填空题是综合考查考生的阅读能力、分析能力、随机应变能力的极好素材. 填空题年年都有新颖题型出现，除多选填空题外，还有完形填空题、组合填空题、类比迁移题等. 这些试题都没有现成的题型、模式或方法可以套用，能有效地检测考生的创新意识和创造能力. 因此，填空题中的一些创新题型增大了单题的知识覆盖面，并且考查的自由度加大，不仅解法不固定、结论有时不惟一，而且题设条件比较灵活，由考生自由选择. 这些对考生的能力和素质要求都比较高.

一、解题思路

填空题是一种要求只写出结论，不要求写出解答过程的特殊解答题，其形态短小精悍，答案简短、明确、具体，不必写解答过程，类似于选择题的特点，因而可考虑特殊化方法、图像法等求解. 填空题又不同于选择题，因为选择题的答案是给出的，它隐匿在选择支中，而填空题缺少选支信息，因此求解填空题不能猜测答案，而需要准确计算或合情推理. 填空题也不同于解答题，不需要写出解题的过程和步骤，只需要将解答题的速解思路迁移到填空题上来，在“准”、“巧”、“快”上下功夫、做文章.

二、解题方法

总的说来，同选择题一样，填空题也属小题，其解题的基本原则是：“小题不能大做”. 解题的基本策略是：巧做. 解题的基本方法一般有：直接求解法，图像法和特殊化法（特殊值法、特殊函数

法、特殊角法、特殊数列法、图形特殊位置法、特殊点法、特殊方程法、特殊模型法）等.

1. 直接求解法——能直接从题设条件出发，利用定义、性质、定理、公式等，经过变形、推理、计算、判断得到结论的问题，通常用直接求解法，它是解填空题的常用的基本方法. 使用直接法解填空题，要善于透过现象抓本质，自觉地、有意识地采取灵活、简捷的解法.

例 1　以双曲线$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$的右顶点为顶点，左焦点为焦点的抛物线的方程为________.

【分析】　本题考查二次曲线的定义与性质，可直接运用抛物线的定义来求解.

【解析】　由双曲线方程$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$可知，其右顶点坐标为$(4,0)$，左焦点坐标为$(-5,0)$，由$4-(-5)=\frac{p}{2}$，得$p=18$.

故所求抛物线方程为$y^2=-2\times18(x-4)=-36(x-4)$.

【答案】　$y^2=-36(x-4)$.

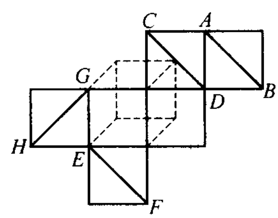
例 2　函数$y=\sin x\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$的最小正周期$T=$________.

【解析】　套用公式由

$y=\sin\left[x+\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$，得$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，故应填$\pi$.

【答案】　π.

例 3　如右图表示一个正方体表面的一种展开图，图中的四条线段AB,CD,EF和GH在原正方体中相互异面的有________对.



【解析】　将展开图恢复正方体后，得到AB和CD，EF和GH，AB和GH三对异面直线.

【答案】　三.

【说明】　翻折问题应注意翻折前后的变化.

例 4　在等差数列$\{a_n\}$中，$a_5=3,a_6=-2$，则$a_4+a_5+\cdots+a_{10}=$________.

【解析】　套用公式，设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，则$d=a_6-a_5=-5$，$a_4=a_5-d=8$，于是$a_4+a_5+\cdots+a_{10}=7a_4+\frac{7\cdot6}{2}d=56+21\cdot(-5)=-49$，故应填$-49$.

【答案】　-49.

【说明】　解答本题，也可应用等差数列求和的另一公式.

例 5　椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$上的一点$P$到两焦点的距离的乘积为$m$，则当$m$取最大值时，点$P$的坐标是________.

【解析】　记椭圆的两个焦点为F_1,F_2，有$|PF_1|+|PF_2|=2a=10$，

则知$m=|PF_1|\cdot|PF_2|\leqslant\left(\frac{|PF_1|+|PF_2|}{2}\right)^2=25$.

显然当$|PF_1|=|PF_2|=5$，即点P位于椭圆的短轴的顶点处时，m取得最大值25.

故应填$(-3,0)$或$(3,0)$.

【答案】 $(-3,0)$或$(3,0)$.

【说明】 这里直接从已知条件出发，利用椭圆定义和均值不等式，通过取最大值时等号成立的条件来确定P点的坐标.

例6 若四面体各棱的长是1或2，且该四面体不是正四面体，则其体积是________（只需写出一个可能的值）.

【解析】 本题是一道很好的开放题，解题的开窍点是：每个面的三条棱是怎样构造的，依据"三角形中两边之和大于第三边"，就可否定$\{1,1,2\}$，从而得出$\{1,1,1\}$，$\{1,2,2\}$，$\{2,2,2\}$三种形态，再由这三类面构造满足题设条件的四面体，最后计算出这三个四面体的体积分别为$\frac{\sqrt{11}}{6}$，$\frac{\sqrt{11}}{11}$，$\frac{\sqrt{14}}{12}$，故应填$\frac{\sqrt{11}}{6}$，$\frac{\sqrt{11}}{12}$，$\frac{\sqrt{14}}{12}$中的一个即可.

【答案】 $\frac{\sqrt{11}}{6}$，$\frac{\sqrt{11}}{12}$，$\frac{\sqrt{14}}{12}$中任意一个.

例7 已知数列$\{a_n\}$，满足$a_1=1$，$a_n=a_1+2a_2+3a_3+\cdots+(n-1)a_{n-1}(n\geqslant 2)$，则$\{a_n\}$的通项$a_n=\begin{cases}1, & n=1,\\ ______, & n\geqslant 2.\end{cases}$

【解析】 $a_n=a_1+2a_2+3a_3+\cdots+(n-1)a_{n-1}$　①

$a_{n-1}=a_1+2a_2+3a_3+\cdots+(n-2)a_{n-2}$　②

①－②得$a_n-a_{n-1}=(n-1)a_{n-1}$，所以$a_n=na_{n-1}$，即有$\frac{a_n}{a_{n-1}}=n(n\geqslant 3)$.

又$a_2=a_1=1$，所以$a_n=\frac{n!}{2}$.

【答案】 $\frac{n!}{2}$.

【说明】 类似于①的递推关系求a_n往往予以类比$n-1$，$n+1$作差求解.

例8 设中心在原点的椭圆与双曲线$2x^2-2y^2=1$有公共的焦点，且它们的离心率互为倒数，则该椭圆的方程是________.

【解析】 由双曲线方程$\frac{x^2}{\frac{1}{2}}-\frac{y^2}{\frac{1}{2}}=1$，知焦点坐标为$(\pm 1,0)$，$e_{双}=\sqrt{2}$，

又椭圆与双曲线有公共的焦点，且它们的离心率互为倒数，

所以椭圆的$c=1$，$e=\frac{1}{\sqrt{2}}$，从而$a=\sqrt{2}$，$b^2=a^2-c^2=1$.

∴椭圆方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

【答案】 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

例9 口袋内装有10个相同的球，其中5个球标有数字0，5个球标有数字1，若从袋中摸出

高考数学填空题巧解

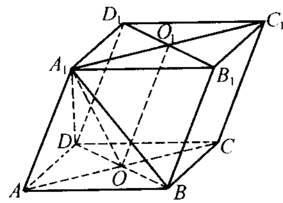
5 个球，那么摸出的 5 个球所标数字之和小于 2 或大于 3 的概率是________.（以数值作答）

【解析】 因为 $P_1=P(2\leqslant\xi\leqslant3)=P(\xi=2)+P(\xi=3)=\dfrac{2C_5^2C_5^3}{C_{10}^5}$，

所以，所求的概率 $P=P(\xi<2$ 或 $\xi>3)=1-P_1=1-\dfrac{200}{252}=\dfrac{13}{63}$.

【答案】 $\dfrac{13}{63}$.

例 10 如图，四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 为正方形，侧棱与底面边长均为 $2a$，且$\angle A_1AB=60°$，则侧棱 AA_1 到截面 B_1D_1DB 的距离是________.



【解析】 连接 AC、A_1C_1 交 BD、B_1D_1 于 O、O_1，则由 AA_1 // 面 BB_1D_1D知，所求距离为 AA_1 到 OO_1 的距离.

且 $AA_1 /\!/ OO_1$，由$\angle A_1AB=60°$，易证$\square ABB_1A_1$ 为含 60°角的菱形，$\therefore AB=A_1B=2a$，可证$\triangle A_1BD\cong\triangle ABD$.

$\therefore AO=A_1O=\sqrt{2}a$. 又 $AA_1=2a$，$\therefore A_1O\perp AO$，$A_1O\perp A_1O_1$，

$\therefore A_1$ 到 O_1O 的距离为$\dfrac{1}{2}O_1O=\dfrac{1}{2}\cdot 2a=a$.

【答案】 a.

例 11 从 1，3，5，7 中任取 2 个数字，从 0，2，4，6，8 中任取 2 个数字，组成没有重复数字的四位数，其中能被 5 整除的四位数共有________个.（用数字作答）

【解析】 末位是 0 的有：$C_4^2C_4^1A_3^3=144$.

末位是 5 $\begin{cases}\text{其中不含 0：}C_3^1C_4^2A_3^3=108.\\ C_3^1C_4^1A_2^1A_2^2=48.\end{cases}$

$\therefore N=144+108+48=300$.

【答案】 300.

例 12 下面是关于四棱柱的四个命题：

①若有两个侧面垂直于底面，则该四棱柱为直四棱柱；

②若两个过相对侧棱的截面都垂直于底面，则该四棱柱为直四棱柱；

③若四个侧面两两全等，则该四棱柱为直四棱柱；

④若四棱柱的四条对角线两两相等，则该四棱柱为直四棱柱.

其中，真命题的编号是________.（写出所有真命题的编号）

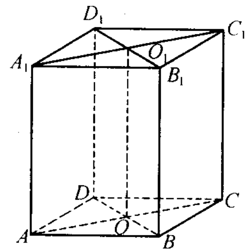
【解析】 画出四棱柱的直观图：

（1）命题①为假命题（若有两个相邻侧面垂直于底面，则该四棱柱为直四棱柱）.

（2）命题②为真命题，简证如下：

$\left.\begin{array}{l}\text{平面 }ACC_1A_1\perp\text{平面 }ABCD\\ \text{平面 }BB_1D_1D\perp\text{平面 }ABCD\end{array}\right\}\Rightarrow OO_1\perp$平面 $ABCD$ 又 A_1A 平行于 $OO_1\Rightarrow A_1A\perp$平面 $ABCD$

$\Rightarrow$四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 为直四棱柱.



(3)命题③为假命题(再增加条件"$\angle A_1AB=\angle A_1AD$ 且$\angle D_1DA=\angle D_1DC$",命题才正确).

(4)命题④为真命题,简证如下:

四棱柱的四条对角线两两相等

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{平行四边形 } BB_1D_1D \text{ 为矩形}\Rightarrow D_1D\perp BD\\ \text{平行四形边 } ACC_1A_1 \text{ 为矩形}\Rightarrow A_1A\perp AC\\ \text{又 } A_1A \text{ 平行于 } D_1D\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow A_1A\perp BD\\ \text{又 } A_1A\perp AC\\ \text{且 } BD\cap AC=O\end{array}\right\}\Rightarrow A_1A\perp \text{平面 } ABCD\Rightarrow \text{四棱柱 } ABCD-A_1B_1C_1D_1 \text{ 为直四棱柱.}$$

【答案】 ②④.

例 13 设函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x-1 & (x\geqslant 0),\\ \frac{1}{x} & (x<0).\end{cases}$ 若 $f(a)>a$,则实数 a 的取值范围是________.

【解析】 由$\begin{cases}\frac{1}{2}a-1>a\\ a\geqslant 0\end{cases}$得$\begin{cases}a<-2,\\ a\geqslant 0.\end{cases}$ $\therefore a\in\varnothing$.

由$\begin{cases}\frac{1}{a}>a\\ a<0\end{cases}$得$\begin{cases}a^2>1,\\ a<0.\end{cases}$即有 $a<-1$.

【答案】 $a<-1$.

例 14 设 F 是椭圆$\frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{6}=1$ 的右焦点,且椭圆上至少有 21 个不同的点 $P_i(i=1,2,3,\cdots)$,使$|FP_1|,|FP_2|,|FP_3|,\cdots$组成公差为 d 的等差数列,则 d 的取值范围为________.

【解析】 因为$|P_1F|=a-c=\sqrt{7}-1$,$|P_{21}F|=a+c=\sqrt{7}+1$,

$\therefore |P_{21}F|-|P_1F|=20d=2$.

即有 $d=\frac{1}{10}$.

反之,则 $d=-\frac{1}{10}$.

$\therefore d\in\left[-\frac{1}{10},0\right)\cup\left(0,\frac{1}{10}\right]$.

【答案】 $\left[-\frac{1}{10},0\right)\cup\left(0,\frac{1}{10}\right]$.

例 15 已知平面 α 与平面 β 交于直线 l,P 是空间一点,$PA\perp\alpha$,垂足为 A,$PB\perp\beta$,垂足为 B,且 $PA=1$,$PB=2$,若点 A 在 β 内的射影与点 B 在 α 内的射影重合,则点 P 到 l 的距离为______.

【解析】 由条件可判定 $\alpha\perp\beta$,设 A 在 β 内射影为 C,则 $l\perp$ 面 $PABC$,所以 $l\perp PC$.

即有 $PC=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$.

【答案】 $\sqrt{5}$.

例 16 将长度为 1 的铁丝分成两段，分别围成一个正方形和一个圆形，要使正方形与圆的面积之和最小，正方形的周长应为________.

【解析】 设正方形的周长为 x，正方形与圆的面积之和为 S，则

$$S=\frac{1}{16}\cdot x^2+\pi\left(\frac{1-x}{2\pi}\right)^2=\frac{\pi+4}{16\pi}x^2-\frac{1}{2\pi}x+\frac{1}{4}\pi.$$

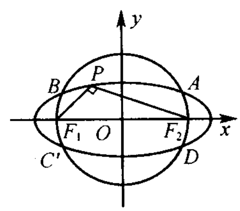
于是，要使 S 取得最小值，当且仅当 $x=-\dfrac{-\frac{1}{2\pi}}{2\left(\frac{\pi+4}{16\pi}\right)}=\dfrac{4}{\pi+4}$.

【答案】 $\dfrac{4}{\pi+4}$.

例 17 椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 的焦点为 F_1,F_2，点 P 为其上的动点，当 $\angle F_1PF_2$ 为钝角时，点 P 的横坐标的取值范围是________.

【解析】 方法一：在椭圆中，$a=3,b=2,c=\sqrt{5}$. 依焦半径公式知，$|PF_1|=3+\dfrac{\sqrt{5}}{3}x$，$|PF_2|=3-\dfrac{\sqrt{5}}{3}x$；由余弦定理知，$\angle F_1PF_2$ 为钝角 $\Leftrightarrow |PF_1|^2+|PF_2|^2<|F_1F_2|^2 \Leftrightarrow \left(3+\dfrac{\sqrt{5}}{3}x\right)^2+\left(3-\dfrac{\sqrt{5}}{3}x\right)^2<(2\sqrt{5})^2 \Leftrightarrow x^2<\dfrac{9}{5}$，即有 $-\dfrac{3}{\sqrt{5}}<x<\dfrac{3}{\sqrt{5}}$.

方法二：以 O 为圆心，OF_1 的长为半径作圆 $x^2+y^2=5$，如图，与椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 联立，解得两曲线交点的横坐标分别为 $-\dfrac{3}{\sqrt{5}},\dfrac{3}{\sqrt{5}}$，由圆的知识可知点 P 在椭圆的 AB 或 CD 弧线(在辅助圆内)上时，$\angle F_1PF_2$ 为钝角，故点 P 的横坐标的取值范围是 $-\dfrac{3}{\sqrt{5}}<x<\dfrac{3}{\sqrt{5}}$.



方法三：由题意知 $F_1(-\sqrt{5},0)$，$F_2(\sqrt{5},0)$. 设椭圆上的动点 P 的坐标是 (x,y)，有 $y^2=4-\dfrac{4}{9}x^2$，于是

$$|PF_1|^2=(x+\sqrt{5})^2+4-\frac{4}{9}x^2,$$

$$|PF_2|^2=(x-\sqrt{5})^2+4-\frac{4}{9}x^2,\ |F_1F_2|^2=20.$$

由 $\angle F_1PF_2$ 为钝角，

得 $\cos\angle F_1PF_2=\dfrac{|PF_1|^2+|PF_2|^2-|F_1F_2|^2}{2|PF_1|\cdot|PF_2|}<0$，

即 $(x+\sqrt{5})^2+4-\dfrac{4}{9}x^2+(x-\sqrt{5})^2+4-\dfrac{4}{9}x^2-20<0$，解得 $-\dfrac{3}{5}\sqrt{5}<x<\dfrac{3}{5}\sqrt{5}$.

方法四：设椭圆上动点 P 的坐标为 $(3\cos\theta,2\sin\theta)$，则 $|PF_1|^2=(3\cos\theta+\sqrt{5})^2+4\sin^2\theta$，$|PF_2|^2=(3\cos\theta-\sqrt{5})^2+4\sin^2\theta$，于是 $\cos\angle F_1PF_2<0$ 等价于 $|PF_1|^2+|PF_2|^2<|F_1F_2|^2$，即 $(3\cos\theta+\sqrt{5})^2+4\sin^2\theta+(3\cos\theta-\sqrt{5})^2+4\sin^2\theta<20$.

化简，得 $\cos^2\theta<\frac{1}{5}$，即 $-\frac{\sqrt{5}}{5}<\cos\theta<\frac{\sqrt{5}}{5}$.

所以 $-\frac{3\sqrt{5}}{5}<x=3\cos\theta<\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

方法五：若 P 点在椭圆上方，设椭圆上动点 P 的坐标为 $(3\cos\theta,2\sin\theta)$，由题意知，把 $\angle F_1PF_2$ 可看成直线 PF_1 到直线 PF_2 的角.

$\because k_1=\frac{2\sin\theta}{3\cos\theta-\sqrt{5}}$，$k_2=\frac{2\sin\theta}{3\cos\theta+\sqrt{5}}$，

$\therefore$ 由直线 PF_1 到直线 PF_2 的角公式，得

$$\tan\angle F_1PF_2=\frac{\frac{2\sin\theta}{3\cos\theta-\sqrt{5}}-\frac{2\sin\theta}{3\cos\theta+\sqrt{5}}}{1+\frac{4\sin^2\theta}{9\cos^2\theta-5}}\Leftrightarrow\frac{1}{5\cos^2\theta-1}<0\Leftrightarrow-\frac{3\sqrt{5}}{5}<3\cos\theta<\frac{3\sqrt{5}}{5}.$$

$\therefore$ 点 P 横坐标的取值范围是 $\left(-\frac{3\sqrt{5}}{5},\frac{3\sqrt{5}}{5}\right)$.

方法六：P 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上一点，F_1，F_2 是两焦点，$\angle F_1PF_2=\theta$，易得 $\triangle F_1PF_2$ 的面积.

$S=b^2\tan\frac{\theta}{2}$.

令 P 点的坐标为 (x_0,y_0)，由 $\angle F_1PF_2=\theta$ 为钝角，有 $\tan\frac{\theta}{2}>2$，又因为 $S_{\triangle F_1PF_2}=\frac{1}{2}|F_1F_2|\cdot|y_0|=b^2\tan\frac{\theta}{2}$，则有 $\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{5}\cdot|y_0|>4$，即 $|y_0|>\frac{4}{\sqrt{5}}$.

$\because \frac{x_0^2}{9}+\frac{y_0^2}{4}=1$，

$\therefore -\frac{3}{\sqrt{5}}<x_0<\frac{3}{\sqrt{5}}$，即 $x_0\in\left(-\frac{3\sqrt{5}}{5},\frac{3\sqrt{5}}{5}\right)$.

【说明】 本题若是从运动观点看，当点 P 向 y 轴靠近时，角度越来越大，故 $\angle F_1PF_2=90^\circ$ 时是分值，易计算 $\angle F_1PF_2=90^\circ$ 时 $x=\pm\frac{3}{5}\sqrt{5}$. 所以 $-\frac{3\sqrt{5}}{5}<x<\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

【答案】 $\left(-\frac{3\sqrt{5}}{5},\frac{3\sqrt{5}}{5}\right)$.

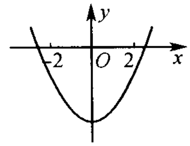
2. 图像法——能借助图形的直观性，通过数形结合的方法，迅速作出判断的问题，通常用图像法、文氏图、三角函数线、函数的图像及方程的曲线等，借助图形的直观性，作出问题的判断.

例 18　设对于任意实数 $x\in[-2,2]$，函数 $f(x)=\lg(3a-ax-x^2)$ 总有意义，则实数 a 的取

值范围是________.

【解析】 函数 $f(x)$ 有意义，则 $3a-ax-x^2>0$，即 $x^2+ax-3a<0$，在 $x\in[-2,2]$ 时总成立.

设 $g(x)=x^2+ax-3a$，即当 $x\in[-2,2]$ 时，$g(x)<0$ 总成立.



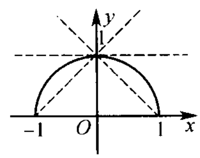
依抛物线特征有 $\begin{cases} g(-2)<0, \\ g(2)<0, \end{cases}$ 如右图所示，

即 $\begin{cases} 4-5a<0, \\ 4-a<0, \end{cases} \Rightarrow a>4.$

【答案】 $a>4$.

例 19 关于 x 的方程 $kx+1=\sqrt{1-x^2}$ 有且只有一个实数根，则实数 k 的取值范围是__________.

【解析】 由题设知，直线 $y=kx+1$ 与半圆 $y=\sqrt{1-x^2}$ 有且只有一个公共点，由右图可知，当 $k<-1$ 或 $k=0$ 或 $k>1$ 时，满足题设条件.



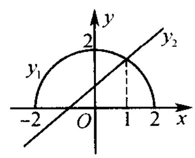
【答案】 $k<-1$ 或 $k=0$ 或 $k>1$.

例 20 不等式 $\sqrt{4-x^2}\leqslant x+1$ 的解集为________.

【解析】 在同一坐标系中，分别作出 $y_1=\sqrt{4-x^2}$ 与 $y_2=x+1$ 的图像，满足 $y_1\leqslant y_2$ 的区间 $[t,2]$，如右图所示.

其中 t 是 $\sqrt{4-x^2}=x+1$ 的正根，解此方程得正根 $t=\dfrac{-1+\sqrt{7}}{2}$.

所以原不等式的解集为 $\left[\dfrac{-1+\sqrt{7}}{2},2\right]$.



【答案】 $\left[\dfrac{-1+\sqrt{7}}{2},2\right]$.

例 21 若直线 $y=2a$ 与函数 $y=|a^x-1|(a>0,a\neq1)$ 的图像有两个公共点，则 a 的取值范围是________.

【解析】 (1)当 $a>1$ 时，如图 1 所示，两图像不可能有两个交点.

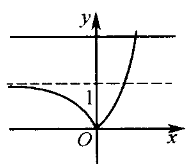


图 1

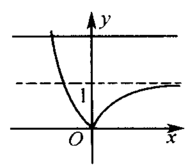


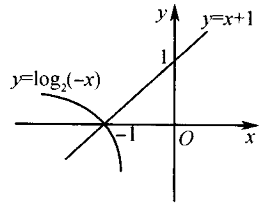
图 2

(2)当 $0<a<1$ 时，如图 2 所示，若两图像有两个交点，则须有 $0<2a<1$，解得 $0<a<\dfrac{1}{2}$.

【答案】 $0<a<\dfrac{1}{2}$.

【说明】 利用数学对象的数量特征与其图像之间的关系，充分发挥形的直观性和数的精确性作用，并使之有机地结合、互补，从而体现出数形结合快速解题的魅力.

例 22　使 $\log_2(-x)<x+1$ 成立的 x 的取值范围是________.

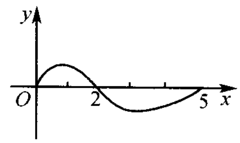


【解析】　作出函数 $y=\log_2(-x)$ 及 $y=x+1$ 的图像. 其中 $y=\log_2(-x)$ 与 $y=\log_2 x$ 的图像关于 y 轴对称，观察图像知 $-1<x<0$，即 $x\in(-1,0)$.

【答案】　$(-1,0)$.

【说明】　也可把不等式化为 $\begin{cases}-x>0\\-x<2^{x+1}\end{cases}$ 后去作图求解.

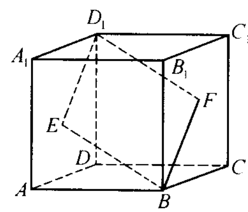
例 23　设奇函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-5,5]$，若当 $x\in[0,5]$ 时，$f(x)$ 的图像如右图所示，则不等式 $f(x)<0$ 的解是________.



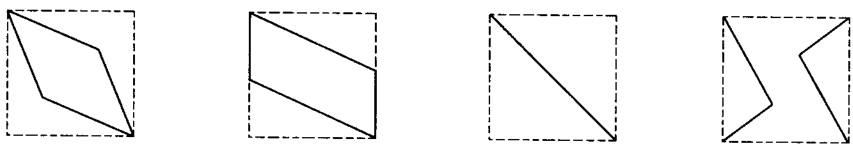
【解析】　本题没有给出具体解析式，由图像及对称性画出 $[-5,0]$ 的函数图像，可直观地看出不等式的解集，体现数学语言之间的转化，故应填 $(-2,0)\cup(2,5)$.

【答案】　$(-2,0)\cup(2,5)$.

例 24　E、F 分别是正方体的面 ADD_1A_1、面 BCC_1B_1 的中心，则四边形 BFD_1E 在该正方体的面上的射影可能是________.（要求：把可能的图的序号都填上）



【解析】　因为正方体是对称的几何体，所以四边形 BFD_1E 在该正方体的面上的射影可分为上下、前后、左右三个方向的射影，也就是在面 $ABCD$、面 ABB_1A_1、面 ADD_1A_1 上的射影.



(a)　　(b)　　(c)　　(d)

四边形 BFD_1E 在面 $ABCD$ 和面 ABB_1A_1 上的射影相同，如图(b)所示；

四边形 BFD_1E 在该正方体对角面的 ABC_1D_1 内，它在面 ADD_1A_1 上的射影显然是一条线段，如图(c)所示. 故应填(b)，(c).

【答案】　(b)，(c).

【说明】　本题从正方形概念和性质以及射影的有关知识出发，借助直观图形，运用合情推理和逻辑分析的方法，直接获得了要求的结果.

例 25　如下页图，P_1 是一块半径为 1 的半圆形纸板，在 P_1 的左下端剪去一个半径为 $\frac{1}{2}$ 的半圆后得到图形 P_2，然后依次剪去一个更小半圆（其直径为前一个被剪掉半圆的半径）得圆 P_3，P_4，…，P_n，…. 记纸板 P_n 的面积为 S_n，则 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=$________.