高 等 学 校 教 学 用 书

高等数学学习指导

陈晓龙　施庆生　主编

化学工业出版社
高等教育教材出版中心

高等学校教学用书

高等数学学习指导

陈晓龙　施庆生　主编

化学工业出版社
高等教育教材出版中心
·北京·

本书是根据原国家教委制定的《工科高等数学课程教学基本要求》和《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》编写的，全书共分十二章，每章内容包含基本要求、内容提要、本章学习注意点、典型方法与例题分析、同步练习题和自我测试题六大部分．它是一本将《高等数学学习指导》和《高等数学习题课指导》融为一体的参考书，可以帮助读者深刻理解高等数学的基本概念和理论，准确地抓住解题关键，提高分析问题和解决问题的能力．

本书可供工科院校学生、报考硕士研究生的考生及自学高等数学的读者参考，还可供从事工科高等数学教学的教师作为高等数学课程的教学参考书．

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导/陈晓龙，施庆生主编．—北京：化学工业出版社，2006.9
高等学校教学用书
ISBN 7-5025-8708-X

Ⅰ．高… Ⅱ．①陈…②施… Ⅲ．高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 071033 号

高等学校教学用书
高等数学学习指导
陈晓龙　施庆生　主编
责任编辑：唐旭华
文学编辑：林　丹
责任校对：李　林
封面设计：关　飞

*

化学工业出版社
高等教育教材出版中心 出版发行
（北京市朝阳区惠新里 3 号　邮政编码 100029）
购书咨询：(010)64982530
(010)64918013
购书传真：(010)64982630
http://www.cip.com.cn

*

新华书店北京发行所经销
北京市彩桥印刷有限责任公司印装
开本 787mm×1092mm　1/16　印张 17¾　字数 473 千字
2006 年 9 月第 1 版　2006 年 9 月北京第 1 次印刷
ISBN 7-5025-8708-X
定　价：27.00 元

前　言

高等数学是高等工科院校最主要的基础理论课之一，同时也是硕士研究生入学考试的一门必考科目，掌握好高等数学的基本知识、基本理论、基本运算和分析方法，不仅仅是学生学习后续课程和将来从事理论研究或实际工作的必要基础，而且对学生理性思维的训练以及对他们今后的提高和发展都有深远的影响．

要学好高等数学，总离不开解题，通过解题加深对所学课程内容的理解，灵活地掌握运算方法和提高自己的解题技巧，培养解题、解决问题的能力．因此如何帮助学生提高解题能力是当前高等数学课程教学改革的一项重要任务．为了帮助正在学习高等数学的学生和有志报考硕士研究生的考生，我们组织部分多年从事高等数学教学且有丰富教学经验的老师共同编写了这本《高等数学学习指导》．本书依据《工科高等数学课程教学基本要求》和《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》编写，它可以帮助学生更深刻地理解高等数学的基本概念和基本理论，准确地抓住解题关键，清晰地辨明解题思路，不断提高分析问题和解决问题的能力．

本书在内容安排上紧扣“基本要求”和“大纲”，在章节编排上与教材同步，每章内容包含基本要求、内容提要、本章学习注意点、典型方法与例题分析、同步练习题和自我测试题六大部分．每章基本要求、内容提要和本章学习注意点列出了该章主要概念和重要定理、公式等，起到了提纲挈领的作用；典型方法与例题分析是本书的重点内容，例题和练习题内容丰富、典型性强，覆盖面广，且有层次，既有基本题，也有综合提高题，其中许多例题是历届硕士研究生入学考试试题，有些例题还给出了一题多解，以帮助读者扩大视野、开阔思路，许多例题在解题前进行了必要的分析，题后进行解题方法总结，以深化对高等数学概念和理论的理解，提高解题和证题的能力，掌握思考问题和处理问题的方法和技巧，做到举一反三．每章练习题分两部分，一是同步练习题，通过练习可以帮助读者对本章内容和例题起到复习和巩固作用，有些题是对例题的一种补充；二是自我测试题，仿照平时考试，题型齐全，可以作为模拟训练用，其中 A 套题较易，面对所有学生，B 套题较难，供对数学要求较高或准备考研、参加竞赛者选用．书后附有练习题和测试题的答案或提示．

全书思路清晰、逻辑严谨、概念准确、叙述详细，便于自学．本书在编选例题和习题时参考了有关资料，在此谨向有关同志致谢．

本书由陈晓龙、施庆生主编，由陈晓龙、施庆生、朱耀亮、刘彬、许志成、汤家凤编写，其中第一、二章由许志成编写，第三章由汤家凤编写，第四、五、六章由朱耀亮编写，第七、八、九章由陈晓龙编写，第十章由施庆生编写，第十一、十二章由刘彬编写．最后由陈晓龙负责全书的统稿．

限于编者水平，书中难免存在不妥之处，恳请同行专家和广大读者批评和指正．

编者

2006 年 6 月

目　录

第一章　函数与极限 …… 1
第一节　基本要求 …… 1
第二节　内容提要 …… 1
第三节　本章学习注意点 …… 4
第四节　典型方法与例题分析 …… 6
一、函数及其运算 …… 6
二、极限的运算 …… 9
三、函数的连续性与间断 …… 13
第五节　同步练习题 …… 15
第六节　自我测试题 …… 17
一、测试题 A …… 17
二、测试题 B …… 17
第七节　同步练习题答案 …… 18
第八节　自我测试题答案 …… 19
一、测试题 A 答案 …… 19
二、测试题 B 答案 …… 19
第二章　导数与微分 …… 20
第一节　基本要求 …… 20
第二节　内容提要 …… 20
第三节　本章学习注意点 …… 22
第四节　典型方法与例题分析 …… 23
一、导数定义的运用 …… 23
二、分段函数的导数 …… 24
三、利用运算法则求导数和微分 …… 25
四、导数与微分的应用 …… 30
第五节　同步练习题 …… 35
第六节　自我测试题 …… 37
一、测试题 A …… 37
二、测试题 B …… 38
第七节　同步练习题答案 …… 39
第八节　自我测试题答案 …… 40
一、测试题 A 答案 …… 40
二、测试题 B 答案 …… 40
第三章　中值定理与导数的应用 …… 41
第一节　基本要求 …… 41
第二节　内容提要 …… 41
第三节　本章学习注意点 …… 43
第四节　典型方法与例题分析 …… 44
一、中值定理、洛必达法则 …… 44
二、导数的应用 …… 50
第五节　同步练习题 …… 59
第六节　自我测试题 …… 61
一、自我测试题 A …… 61
二、自我测试题 B …… 62
第七节　同步练习题答案 …… 63
第八节　自我测试题答案 …… 64
一、自我测试题 A 答案 …… 64
二、自我测试题 B 答案 …… 65
第四章　不定积分 …… 66
第一节　基本要求 …… 66
第二节　内容提要 …… 66
第三节　本章学习注意点 …… 68
第四节　典型方法与例题分析 …… 69
一、利用基本积分公式和性质求不定积分 …… 69
二、换元积分法 …… 70
三、分部积分法 …… 73
四、几种特殊类型函数的积分 …… 77
五、综合类 …… 79
第五节　同步练习题 …… 84
第六节　自我测试题 …… 85
一、测试题 A …… 85
二、测试题 B …… 86
第七节　同步练习题答案 …… 87
第八节　自我测试题答案 …… 88
一、测试题 A 答案 …… 88
二、测试题 B 答案 …… 88
第五章　定积分 …… 89
第一节　基本要求 …… 89
第二节　内容提要 …… 89
一、定积分的概念与性质 …… 89
二、定积分的计算 …… 90
三、广义积分（或称反常积分） …… 90
第三节　本章学习注意点 …… 91
第四节　典型方法与例题分析 …… 92
一、与积分有关的极限计算 …… 92

二、变上限（下限）函数 ………… 94
三、定积分的计算 …………………… 97
四、积分等式与不等式的证明…… 100
五、广义积分的计算………………… 105
第五节 同步练习题………………… 106
第六节 自我测试题………………… 108
一、测试题 A …………………… 108
二、测试题 B …………………… 109
第七节 同步练习题答案…………… 110
第八节 自我测试题答案…………… 110
一、测试题 A 答案 ……………… 110
二、测试题 B 答案 ……………… 111
第六章 定积分的应用……………… 112
第一节 基本要求…………………… 112
第二节 内容提要…………………… 112
第三节 本章学习注意点…………… 113
第四节 典型方法与例题分析……… 114
一、平面图形的面积……………… 114
二、立体的体积…………………… 117
三、平面曲线的弧长……………… 119
四、功、液体的侧压力和引力…… 121
第五节 同步练习题………………… 124
第六节 自我测试题………………… 124
第七节 同步练习题答案…………… 125
第八节 自我测试题答案…………… 126
第七章 向量代数与空间解析几何…… 127
第一节 基本要求…………………… 127
第二节 内容提要…………………… 127
第三节 本章学习注意点…………… 132
第四节 典型方法与例题分析……… 133
一、空间直角坐标系与
向量代数…………………… 133
二、平面与直线…………………… 136
三、曲面与曲线…………………… 141
第五节 同步练习题………………… 144
第六节 自我测试题………………… 146
一、测试题 A …………………… 146
二、测试题 B …………………… 147
第七节 同步练习题答案…………… 148
第八节 自我测试题答案…………… 149
一、测试题 A 答案 ……………… 149
二、测试题 B 答案 ……………… 149
第八章 多元函数微分学…………… 150
第一节 基本要求…………………… 150
第二节 内容提要…………………… 150
第三节 本章学习注意点…………… 156
第四节 典型方法与例题分析……… 158
一、多元函数的概念、偏
导数与全微分……………… 158
二、多元复合函数及隐函
数微分法…………………… 160
三、多元函数微分法的应用……… 167
第五节 同步练习题………………… 173
第六节 自我测试题………………… 174
一、测试题 A …………………… 174
二、测试题 B …………………… 175
第七节 同步练习题答案…………… 177
第八节 自我测试题答案…………… 178
一、测试题 A 答案 ……………… 178
二、测试题 B 答案 ……………… 178
第九章 重积分……………………… 180
第一节 基本要求…………………… 180
第二节 内容提要…………………… 180
第三节 本章学习注意点…………… 185
第四节 典型方法与例题分析……… 185
一、二重积分的计算……………… 185
二、三重积分的计算……………… 192
三、重积分的应用………………… 196
第五节 同步练习题………………… 200
第六节 自我测试题………………… 201
一、测试题 A …………………… 201
二、测试题 B …………………… 203
第七节 同步练习题答案…………… 204
第八节 自我测试题答案…………… 205
一、测试题 A 答案 ……………… 205
二、测试题 B 答案 ……………… 205
第十章 曲线积分与曲面积分……… 206
第一节 基本要求…………………… 206
第二节 内容提要…………………… 206
第三节 本章学习注意点…………… 211
第四节 典型方法与例题分析……… 211
第五节 同步练习题………………… 222
第六节 自我测试题………………… 223
一、测试题 A …………………… 223
二、测试题 B …………………… 225
第七节 同步练习题答案…………… 226
第八节 自我测试题答案…………… 227

一、测试题 A 答案 …………………… 227
二、测试题 B 答案 …………………… 227
第十一章 无穷级数 …………………… 228
第一节 基本要求 …………………… 228
第二节 内容提要 …………………… 228
第三节 本章学习注意点 …………………… 233
第四节 典型方法与例题分析 …………………… 233
一、常数项级数 …………………… 233
二、幂级数 …………………… 238
三、傅里叶级数 …………………… 244
第五节 同步练习题 …………………… 246
第六节 自我测试题 …………………… 248
一、测试题 A …………………… 248
二、测试题 B …………………… 249
第七节 同步练习题答案 …………………… 250
第八节 自我测试题答案 …………………… 251
一、测试题 A 答案 …………………… 251
二、测试题 B 答案 …………………… 252
第十二章 微分方程 …………………… 253
第一节 基本要求 …………………… 253
第二节 内容提要 …………………… 253
第三节 本章学习注意点 …………………… 255
第四节 典型方法与例题分析 …………………… 256
一、一阶微分方程 …………………… 256
二、高阶微分方程、常系数线性微分方程 …………………… 261
三、微分方程的应用 …………………… 266
第五节 同步练习题 …………………… 270
第六节 自我测试题 …………………… 271
一、测试题 A …………………… 271
二、测试题 B …………………… 272
第七节 同步练习题答案 …………………… 274
第八节 自我测试题答案 …………………… 275
一、测试题 A 答案 …………………… 275
二、测试题 B 答案 …………………… 275

第一章　函数与极限

第一节　基 本 要 求

① 理解函数（反函数、复合函数、初等函数、分段函数等）的概念；了解函数的四种基本特性，掌握五个基本初等函数及其图形特征．

② 掌握极限的定义及其相关性质，掌握极限存在的“夹逼准则”和“单调有界准则”，并能熟练地运用极限运算法则计算数列和函数的极限．

③ 了解无穷小与无穷大的概念及其性质，掌握无穷小的运算法则．

④ 掌握函数连续性概念和连续函数的运算性质，了解函数的间断点及其类型，了解闭区间上连续函数的性质．

第二节　内 容 提 要

1. 函数

设有两个变量 x 和 y，D 是一个给定的数集，如果对于每一个数 $x\in D$，变量 y 按照一定法则总有确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$，数集 D 叫作这个函数的定义域，x 叫作自变量，y 叫作因变量．当 x 取值 $x_0\in D$ 时，与 x_0 对应的 y 的数值称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的函数值，记作 $y|_{x=x_0}$ 或 $f(x_0)$，当 x 遍历 D 的每个数值时，对应的函数值全体组成的数集：$W=\{y|y=f(x),\ x\in D\}$ 称为函数的值域．集合 $C=\{(x,y)|y=f(x),x\in D\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的图形．

2. 函数特性

① 有界性　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，$X(\subset D)$ 非空．若存在 $M>0$，对任意的 $x\in X$，都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界；否则，称函数 $f(x)$ 在 X 上无界，即对任意的 $M>0$，总存在 $x_0\in X$ 使 $|f(x_0)|>M$.

② 单调性　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$，如果对任意的 $x_1,x_2\in I$，$x_1<x_2$ 恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的；如果对任意 $x_1,x_2\in I$，$x_1<x_2$ 恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的．单调增加和单调减少函数统称为单调函数．

③ 奇偶性　设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称（即若 $x\in D$，则 $-x\in D$），如果对 $\forall x\in D$ 恒有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；如果 $\forall x\in D$ 恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数．偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于原点对称．

④ 周期性　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在常数 $l>0$，使得 $\forall x\in D$ 有 $x+l\in D$ 且 $f(x+l)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，l 称为 $f(x)$ 的周期．通常我们说周期函数的周期是指最小正周期．

3. 反函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 W，如果对 $\forall y\in W$，有确定的 $x\in D$，使 $y=f(x)$，则在 W 上确定了一个函数，这个函数称为 f 的反函数，记作 f^{-1}，即 $x=f^{-1}(y)$.相对于反函数 $x=f^{-1}(y)$ 来说，函数 $y=f(x)$ 称为直接函数．

4. 基本初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数称为基本初等函数．

5. 复合函数

若函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f，函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 D_φ，值域为 W_φ，且 $W_\varphi\subset D_f$，

则对任意的 $x\in D_f$，都存在确定的 $u\in W_\varphi$，因而也存在确定的 y 与之对应，因此可确定 y 是 x 的函数，这个函数称为由 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数，记作 $y=f[\varphi(x)]$，而 u 称为中间变量．

6. 数列极限

① 数列　数列是一无穷有序数组：$x_1,x_2,\cdots x_n,\cdots$，其第 n 项 x_n 称为一般项（或称通项），在数列 $\{x_n\}$ 中取无穷项且保持其原有次序而构成的数列称为数列 $\{x_n\}$ 的子数列．

② 数列极限　对于数列 $\{x_n\}$，若存在数 a 满足：$\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$（其中 N 为整数），当 $n>N$ 时，有 $|x_n-a|<\varepsilon$，则称数列 $\{x_n\}$ 极限存在（收敛），并将 a 称为数列 $\{x_n\}$ 的极限，记作 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，若数列 $\{x_n\}$ 极限不存在，则称其发散．

7. 函数极限

① 设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内有定义，若对常数 A，满足 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称 A 是函数 $y=f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

单侧极限　设函数 $y=f(x)$，若存在常数 A，满足 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<x_0-x<\delta(0<x-x_0<\delta)$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称 A 为函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点的左极限（右极限），记为

$$A=\lim_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0-0)\quad\left[A=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0+0)\right],$$

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A.$$

② 设函数 $y=f(x)$ 在 $|x|>X_0$（其中 $X_0>0$）内有定义，若存在常数 A，满足 $\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，当 $|x|>X(X>X_0)$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称 A 为函数 $y=f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

设函数 $y=f(x)$ 在 $x>X_0(x<X_0)$（其中 $X_0>0$）内有定义，若存在常数 A，满足 $\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0(X>X_0)$，当 $x>X(x<-X)$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称 A 为 $y=f(x)$ 当 $x\to+\infty(x\to-\infty)$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A\left[\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A\right]$.

注：由于数列 $\{x_n\}$ 可视作定义在自然数集 N 上的函数 $x_n=f(n)$，故而以下极限性质对函数极限和数列极限均满足．

8. 极限性质

① 唯一性　若极限存在，则极限必唯一．

② 有界性　若极限存在，则有界（对函数来说是局部有界，所谓函数的局部有界，是指在自变量的某个变化过程中的某邻域或某无穷区间内有界）.

③ 保号性　若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且 $A>0$（或 $A<0$），则存在 x_0 的某去心邻域，在此邻域内，有 $f(x)>0$ [或 $f(x)<0$]；若在 x_0 某去心邻域内 $f(x)\geqslant0$ [或 $f(x)\leqslant0$]，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则 $A\geqslant0$（或 $A\leqslant0$）.

④ 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则对任一数列 $\{x_n\}$：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$.

9. 极限运算法则

在①～③中假设在同一极限过程中 $\lim f(x)$、$\lim g(x)$ 均存在，则：

① $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)$；

② $\lim[f(x)g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)$；

③ $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$ [其中 $\lim g(x)\neq0$]；

④ $\lim f(x)=0$，$g(x)$ 有界，则 $\lim f(x)\cdot g(x)=0$；

⑤ 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$，且在 x_0 的某去心邻域内 $\varphi(x)\neq a$，令 $u=\varphi(x)$，$\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$，则

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=A.$$

10. 无穷小与无穷大

① 若 $\lim f(x)=0$，则称在此极限过程中 $f(x)$ 为无穷小；若 $\lim f(x)=\infty$，则称在此极限过程中 $f(x)$ 为无穷大.

② 无穷小与无穷大的关系　在同一极限过程中，若 $f(x)$ 是无穷小，且 $f(x)\neq 0$，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大；若 $f(x)$ 是无穷大，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小.

③ 无穷小与函数极限的关系　在某极限过程中，$\lim f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha$，其中 α 是同一极限过程中的无穷小.

④ 无穷小的比较　设在同一极限过程中 α,β 均为无穷小：

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$ $(\alpha\neq 0)$ 或 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\infty$ $(\beta\neq 0)$，则称 β 是 α 的高阶无穷小，记为 $\beta=o(\alpha)$；

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=c\neq 0$，则称 β 和 α 是同阶无穷小，特别当 $c=1$ 时，称 β 与 α 是等价无穷小，记为 $\beta\sim\alpha$；

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha^k}=c\neq 0$ $(k>0)$，则称 β 是 α 的 k 阶无穷小，记为 $\beta=o(\alpha^k)$.

⑤ 无穷小运算法则　在同一极限过程中，有限多个无穷小的和与积仍为无穷小；有界量与无穷小的乘积仍为无穷小.

⑥ 等价无穷小的替代定理　设在同一极限过程中 α 与 β 均为无穷小，且 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，$\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}(\alpha\neq 0,\ \alpha'\neq 0)$ 存在，则 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$.

11. 极限存在准则和两个重要极限

(1) 两个存在准则

准则Ⅰ　如果数列 $\{x_n\},\{y_n\}$ 及 $\{z_n\}$ 满足：① $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$；② $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

准则Ⅰ′　如果：① 当 $x\in\overset{0}{U}(x_0,\delta)$ (或 $|x|>M$) 时有 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$；② $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)=a$，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}h(x)=a$，则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=a$.

(2) 两个重要极限

① $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$；　　② $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 或 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$.

(3) 常见的等价无穷小　当 $x\to 0$ 时，$\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，$\arcsin x\sim x$，$\arctan x\sim x$，$\ln(1+x)\sim x$，$\mathrm{e}^x-1\sim x$，$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$，$(1+x)^\alpha\sim\alpha x$，$a^x-1\sim x\ln a(a>0,\ a\neq 1)$.

12. 函数的连续性

① 函数在 x_0 点连续的定义　设函数 $f(x)$ 在 x_0 点某邻域内有定义，则 $f(x)$ 在 x_0 点连续是指：

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)&\Leftrightarrow\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0\\&\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)\\&\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\text{当}|x-x_0|<\delta\text{时，恒有}|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.\end{aligned}$$

② 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续，则称 x_0 是函数的间断点．如果函数 $f(x)$ 在 x_0 点的左极限和右极限均存在，则称 x_0 为函数的第一类间断点；特别地，当在 x_0 点的左极限和右极限相等时，称 x_0 为函数的可去间断点，左极限和右极限不相等时，称 x_0 为函数的跳跃间断点．不属于第一类的间断点称为第二类间断点．

13. 连续函数的代数运算

① 若函数 $f(x)$、$g(x)$ 均在点 x_0 处连续，则函数 $f(x)\pm g(x)$，$f(x)g(x)$ 均在点 x_0 处连续，且当 $g(x_0)\neq 0$ 时，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 也在点 x_0 处连续．

② 函数 $y=f(x)$ 在区间 I_x 上单调增加（或单调减少）且连续，则其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 也在区间 $I_y=\{y|y=f(x),x\in I_x\}$ 上单调增加（或单调减少）且连续．

③ 函数 $y=f(u)$ 在点 $u=u_0$ 处连续，函数 $u=\varphi(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续，且 $u_0=\varphi(x_0)$，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 $x=x_0$ 处连续．

④ 所有初等函数（即由常数函数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合运算，并能用一个式子表示的函数）均在其定义区间内连续．

14. 闭区间上连续函数的性质

① 最大最小值定理　闭区间上连续函数在该区间上一定存在最大值和最小值．具体地说，如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $\exists\xi_1\in[a,b]$，使 $f(\xi_1)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值；又 $\exists\xi_1\in[a,b]$，使 $f(\xi_2)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 最小值．

② 有界性定理　闭区间上连续函数在该区间上有界．

③ 零点定理和介值定理　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，(i) 若 $f(a)f(b)<0$ 时，则在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $f(\xi)=0$（零点定理）；(ii) 若 $f(a)\neq f(b)$，则对介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的任何值 C，在开区间 (a,b) 内都存在点 ξ，使 $f(\xi)=C$（介值定理）.

推论　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且不恒为常数，则对 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值 m 和最大者 M 之间的任一个数 C，都存在 $\xi\in[a,b]$ 使 $f(\xi)=C$.

第三节　本章学习注意点

在本章的学习中应当注意以下几个问题．

1. 函数的定义域和对应规律

学习函数概念要把握其核心，即函数的定义域和对应规律，将其称为函数的两个要素．对于函数的定义域，主要是会求用解析式表示的函数的定义域；对于函数的对应规律，主要是能正确理解函数符号并能熟练运用．应该特别注意，对于两个用不同表达式表示的函数而言，只要其定义域和对应规律相同，就是同一个函数．

2. 求函数值和定义域

求函数值和定义域是函数计算的主要问题，非常重要，它要求对函数的概念有清晰的认识，特别是在求分段函数的函数值时，必须搞清楚什么时候该用什么表达式求值．而求函数的定义域通常可以归结为求解不等式或不等式组，在求由实际问题所确定的函数的定义域时，还需要考虑自变量的实际意义．

求用解析式表示的函数的定义域应注意以下几点．

① 函数的值域不能超出实数域．例如，对数的真数必须大于零；偶数次根式内的数必须非负．

② 使函数值不存在或无法确定的点不属于函数的定义域．例如，分式函数的分母不能为零；正切函数 $y=\tan x$ 在 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 处没有意义；反余弦函数 $y=$

$\arccos x$ 必须满足 $|x|\leqslant 1$ 等．

③ 由有限个函数进行四则运算后构成的新函数的定义域是每个参加运算函数定义域的公共部分．

④ 单调函数之反函数的定义域是该函数的值域．

⑤ 分段函数的定义域是自变量在每一段取值集合的并集．

3. 极限的定义

对于函数极限应该着重理解为什么"当 x 无限趋近于 x_0（或 x 趋近于无穷大）时，对应的函数值 $f(x)$ 无限趋近于常数 A"这一事实．至于用定义来证明函数的极限，只要求能证明一些简单的极限．尽管如此，学习中还是应该正确书写出用定义证明极限的过程．

用极限定义证明数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的关键是：对任意给定的无论多么小的正数 ε，由不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 去找到满足条件 $n>N$ 的正整数 N.

用极限定义证明函数极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的关键是：对任意给定的无论多么小的正数 ε，由不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 去找到满足条件 $|x-x_0|<\delta$ 的小正数 δ.

用极限定义证明函数极限 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的关键是：对任意给定的无论多么小的正数 ε，由不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 去找到满足条件 $|x|>X$ 的正实数 X.

4. 求极限的基本方法

（1）利用极限定义验证极限　对于一些抽象形式的极限（比如一些用递推式给出的数列极限），当其极限的存在性不是很显然时，可以假设其极限存在先形式地求出极限，然后再运用极限定义进行验证．

（2）利用极限的两个存在准则求极限　极限存在准则不仅可以证明数列和函数极限的存在性，同时也是求极限的有效方法．

① 利用夹逼准则求极限，关键在于对所求极限的函数或数列的通项进行放大和缩小为两个形式尽量简单的函数或数列，从两侧无限逼近相同的极限值．这种方法常用于求"n 项和式极限"和"n 项乘积极限"．

② 利用单调有界准则求极限，通常用于求由递推式给出的数列极限．关键要证明数列的单调性和有界性．在证明中常常还需要运用数学归纳法．

（3）利用极限运算法则和函数的连续性求确定型极限　对于一些比较简单的确定型极限式，可以利用极限的四则运算法则直接计算极限，但是必须注意法则运算的前提条件，即参加运算的函数或数列的极限必须存在．而连续函数在其连续点处的极限值就是它在该点处的函数值．

（4）利用变量代换求极限　在求一些比较复杂的函数极限时，常常可以通过变量代换使极限运算简化．例如，为求复合函数的极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]$，可令 $u=\varphi(x)$，若 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$，则有 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=\lim\limits_{u\to a}f(u)$.

（5）利用等价无穷小的替代性质求极限　在求"$\frac{0}{0}$不定型"极限时，如能灵活应用等价无穷小替换所求极限运算式中较为复杂的函数可简化其极限运算，因而记住一些常用的等价无穷小是极为有用的．但是应该注意，对乘除运算，可尽量用表达式简单的等价无穷小替代复杂函数；对加减运算时，不能轻易用等价等价无穷小替代（此时情况比较复杂）.

（6）利用两个重要极限公式求极限　公式 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ 的运算特征是：$\lim\limits_{(*)\to 0}\frac{\sin(*)}{(*)}=1$，运算中只要三个括号中变量形式相同，且均为无穷小则结论成立．通常含有三角函数或反三角函数的$\frac{0}{0}$型极限式，可以考虑用这个极限公式．

公式$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$或$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$的运算特征是

$$\lim_{(*)\to\infty}\left[1+\frac{1}{(*)}\right]^{(*)}=\mathrm{e}\text{ 或 }\lim_{(*)\to 0}[1+(*)]^{\frac{1}{(*)}}=\mathrm{e},$$

运算中只要三个括号中变量形式相同且趋向一致则结论成立．通常对1^{∞}型的幂指函数极限式，可以考虑用这两个极限公式．

5. 函数的连续性

函数的连续性概念包括函数在一点处的连续性和区间上的连续性，而后者是以前者为基础．应准确理解定义中的极限式$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$包含了三层含义，即①函数$f(x)$在$x_0$点有意义；②极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在；③函数在$x_0$点的极限值等于其函数值$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$．上述是函数在一点连续的三个要素，如果三者之一不成立，则函数在x_0点间断．同时，对于讨论分段函数在分界点处的连续性时，应分别讨论分段函数在分点处的左连续和右连续．

在闭区间上连续的函数有一些很好的性质，在讨论方程的根和最值的存在性等理论证明题中有着重要的应用，必须正确理解每个定理的条件和结论．

6. 函数的间断点

如果函数$f(x)$在x_0点连续的三个要素之一不成立则函数在x_0点为间断．当$f(x_0-0)$和$f(x_0+0)$都存在时，称x_0为$f(x)$的第一类间断点；不是第一类的间断点称为函数$f(x)$的第二类间断点，此时$f(x_0-0)$和$f(x_0+0)$至少有一个不存在．

当x_0是第一类间断点时，如果$f(x_0-0)=f(x_0+0)$，则称x_0为$f(x)$的可去间断点；如果$f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$，则称x_0为跳跃间断点．

当x_0是函数的第二类间断点时，如果$f(x_0-0)$和$f(x_0+0)$中至少有一个是无穷大，则称x_0是函数的无穷间断点．

第四节　典型方法与例题分析

一、函数及其运算

【例 1】 求下列函数的定义域

(1) $y=\dfrac{x-1}{\ln(x-1)}+\sqrt{3x-4}$；　　(2) $y=\begin{cases}\dfrac{1}{x-2}, & x>2,\\ \ln x, & x\leqslant 2.\end{cases}$

【解】 (1) 要使函数有意义，则需且只需

$$\begin{cases}x-1>0,\\ \ln(x-1)\neq 0,\\ 3x-4\geqslant 0,\end{cases}\quad\text{解得}\quad\begin{cases}x>1,\\ x\neq 2,\\ x\geqslant\dfrac{4}{3},\end{cases}$$

即函数的定义域是$x\geqslant\frac{4}{3}$，且$x\neq 2$.

(2) 分段函数的定义域是所有定义区间的并集，此分段函数的定义域是$x>2$或$x\leqslant 2$，但$\ln x$的定义域是$x>0$，故综合起来可知所求函数的定义域是$x>0$.

【例 2】 设函数$f(x)=\arccos(2x-3)+\ln(1+x)$，求：(1) $f(x)$的定义域；(2) $f(x+k)$的定义域；(3) $f(x^2)$的定义域．

分析：求复合函数$f(x+k)$和$f(x^2)$的定义域需要利用函数$f(x)$的定义域，如果函

数 $f(x)$ 的定义域为 $a\leqslant x\leqslant b$，则 $f(x+k)$ 和 $f(x^2)$ 的定义域可以通过解不等式 $a\leqslant x+k\leqslant b$ 和不等式 $a\leqslant x^2\leqslant b$ 来确定．

【解】 (1) 欲使函数 $f(x)$ 有意义，可由下列不等式

$$\begin{cases}|2x-3|\leqslant 1,\\ 1+x>0,\end{cases}\quad \text{解得}\quad \begin{cases}1\leqslant x\leqslant 2,\\ x>-1,\end{cases}$$

即 $1\leqslant x\leqslant 2$，故函数 $f(x)$ 的定义域为 $[1,2]$.

(2) 由 $1\leqslant x+k\leqslant 2$，解得 $1-k\leqslant x\leqslant 2-k$，故函数 $f(x+k)$ 的定义域为 $[1-k,2-k]$.

(3) 由 $1\leqslant x^2\leqslant 2$，可解得$\begin{cases}x\leqslant -1,\ x\geqslant 1,\\ -\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2},\end{cases}$ 故函数 $f(x^2)$ 的定义域为$[-\sqrt{2},-1]\cup[1,\sqrt{2}]$.

【例 3】 设 $f(\ln x)=x^3\ln(a+\sqrt{a+x^2})$ $(a>0)$，求 $f(x)$ 及 $f(\cos x)$.

分析：对已知 $f[\varphi(x)]$求 $f(x)$ 及 $f[\psi(x)]$的题型，通常采用两种方法：①凑变量法，这种方法适合于一些简单问题；②变量代换法，即令 $u=\varphi(x)$，解出 $x=\varphi^{-1}(u)$代入求得 $f(u)$ 的表达式，然后再将 u 改写为 x 得到所求 $f(x)$ 的表达式．至于求 $f[\psi(x)]$ 则比较简单，只要把 $f(x)$ 中的 x 换为 $\psi(x)$ 即得．

【解】 解法一　凑变量法．

因为 $f(\ln x)=\mathrm{e}^{3\ln x}\ln(a+\sqrt{a+\mathrm{e}^{2\ln x}})$，可得

$$f(x)=\mathrm{e}^{3x}\ln(a+\sqrt{a+\mathrm{e}^{2x}}),$$

则

$$f(\cos x)=\mathrm{e}^{3\cos x}\ln(a+\sqrt{a+\mathrm{e}^{2\cos x}}).$$

解法二　变量代换法．

令 $u=\ln x$，则 $x=\mathrm{e}^u$，代入得

$$f(u)=\mathrm{e}^{3u}\ln(a+\sqrt{a+\mathrm{e}^{2u}}),$$

从而 $f(x)=\mathrm{e}^{3x}\ln(a+\sqrt{a+\mathrm{e}^{3x}})$，则

$$f(\cos x)=\mathrm{e}^{3\cos x}\ln(a+\sqrt{a+\mathrm{e}^{3\cos x}}).$$

【例 4】 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{k-1},&1<x<k,\\ 0,&\text{其他},\end{cases}$ $g(x)=3x-2$，求 $f[g(x)]$和 $g[f(x)]$.

分析：分段函数进行复合运算，应该根据中间变量的取值来确定自变量在不同范围内的函数表达式．

【解】 由复合函数的概念有

$$f[g(x)]=\begin{cases}\dfrac{1}{k-1},&1<g(x)<k,\\ 0,&\text{其他},\end{cases}$$

由于 $g(x)=3x-2$，则由 $1<3x-2<k$，可解得 $1<x<\dfrac{k+2}{3}$，从而得

$$f[g(x)]=\begin{cases}\dfrac{1}{k-1},&1<x<\dfrac{k+2}{3},\\ 0,&\text{其他}.\end{cases}$$

同理可得

$$g[f(x)]=\begin{cases}\dfrac{3}{k-1}-2,&1<x<k,\\ -2,&\text{其他}.\end{cases}$$

【例 5】 证明定义在对称区间 $(-l,l)$ 上的任意函数 $f(x)$，可以表示为一个偶函数与一个奇函数之和．

分析：据题意不妨假定 $f(x)$ 可以表示为偶函数 $g(x)$ 与奇函数 $h(x)$ 之和，即

$$f(x)=g(x)+h(x),$$

则 $f(-x)=g(-x)+h(-x)=g(x)-h(x)$，联立两式可解得

$$g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2},\quad h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

由此启发下面证明．

【证明】 由题设，令

$$g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2},\quad h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

不难验证 $g(-x)=g(x)$，$h(-x)=-h(x)$，

即 $g(x)$ 是偶函数，$h(x)$ 是奇函数，且满足 $f(x)=g(x)+h(x)$，结论成立．

【例 6】 求 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 的反函数（其中 $ad-bc\neq 0$），并讨论 a,b,c,d 满足什么条件时，该反函数与直接函数相同．

分析：由函数表达式可知 c 和 d 不能同时为零，不妨设 $c\neq 0$，且由条件又知 $ad\neq bc$，故有

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{acx+bc}{c^2x+cd}\neq\frac{acx+ad}{c^2x+cd}=\frac{a}{c}.$$

上式表明 $y\neq\dfrac{a}{c}$，这也是 y 有反函数的条件之一．

【证明】 由 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$，变形为 $(cy-a)x=b-dy$，分析中已知 $y\neq\dfrac{a}{c}$，故由上式解得

$$x=\frac{b-dy}{cy-a},$$

从而得到所求反函数为

$$y=\frac{b-dx}{cx-a}.$$

据题意反函数与直接函数相同，则有

$$\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{b-dx}{cx-a},$$

变形为

$$c(a+d)x^2+(d^2-a^2)x-b(a+d)=0,$$

从而欲使直接函数与反函数相同，必须

$$\begin{cases}c(a+d)=0,\\(a-d)(a+d)=0,\\b(a+d)=0.\end{cases}$$

即

$$a+d=0\quad 或\quad \begin{cases}b=c=0,\\a=d\neq 0.\end{cases}$$

【例 7】 设 $f(0)=0$ 且 $x\neq 0$ 时有 $af(x)+bf\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{c}{x}$，其中 a,b,c 为常数，且 $|a|\neq|b|$，证明 $f(x)$ 为奇函数．

分析：具有奇偶性的函数其定义域必为对称区间．本例中函数 $f(x)$ 的表达式为未知，但是，如果注意到只要互换式中的变量 x 和 $\dfrac{1}{x}$ 的位置，就可以得到以 $f(x)$ 和 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 为未知量的二元一次代数方程组，从而可以解得函数 $f(x)$．

【证明】 先求函数 $f(x)$，在已知表达式中通过变量代换互换 x 与 $\dfrac{1}{x}$ 的位置，得

$$af\left(\frac{1}{x}\right)+bf(x)=cx,$$

与原有等式联立

$$\begin{cases}af(x)+bf\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{c}{x},\\[2mm]af\left(\dfrac{1}{x}\right)+bf(x)=cx,\end{cases}$$

从中消去 $f\left(\frac{1}{x}\right)$，解得函数

$$f(x)=\frac{c}{b^2-a^2}\left(bx-\frac{a}{x}\right)\quad(x\neq 0),$$

据条件知 $f(0)=0$，且由上式不难验证 $f(-x)=-f(x)$，所以 $f(x)$ 为奇函数．

【例 8】 设函数 $f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$，证明：(1) 对于任意数实 k $(0<k<1)$，函数 $f(x)$ 在 $[k,1]$ 上有界；(2) 函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上无界．

分析：通常证明函数 $f(x)$ 在某区间 I 上有界，只要能找到一个充分大的正数 M，使对 $\forall x\in I$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$；或者找到两个数 M_1，M_2，使对 $\forall x\in I$，恒有 $M_1\leqslant x\leqslant M_2$ 即可．而证明函数 $f(x)$ 在某区间 I 上无界，则与上述方法相反，即对无论多么大的正数 M，总有属于区间 I 的点 x_k，使得 $|f(x_k)|>M$.

【证明】 (1) 据题意任取 k $(0<k<1)$，当 $x\in[k,1]$时，有

$$|f(x)|=\left|\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant\left|\frac{1}{x}\right|\leqslant\frac{1}{k},$$

若取 $M=\frac{1}{k}$，则对 $\forall x\in[k,1]$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，故函数 $f(x)$ 在 $[k,1]$ 上有界．

(2) 对任意正数 M，可取正整数 $K=\left[\frac{M}{2\pi}\right]+1$，显然 $x_K=\frac{1}{2K\pi+\frac{\pi}{2}}\in(0,1)$，有

$$|f(x_K)|=\left|\left(2K\pi+\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(2K\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right|=2K\pi+\frac{\pi}{2}>M+\frac{\pi}{2}>M.$$

所以 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 无界．

二、极限的运算

【例 9】 用极限定义证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+4}}{n}=1$.

分析：用定义验证极限，就是对 $\forall\varepsilon>0$，通过分析不等式 $\left|\frac{\sqrt{n^2+4}}{n}-1\right|<\varepsilon$，找出正数 N.

【证明】 令 $x_n=\frac{\sqrt{n^2+4}}{n}$，则 $\forall\varepsilon>0$，由于 $0\leqslant x_n-1=\frac{4}{n(\sqrt{n^2+4}+n)}<\frac{4}{n}$，故欲使

$$\left|\frac{\sqrt{n^2+4}}{n}-1\right|<\varepsilon,$$

只要 $\frac{4}{n}<\varepsilon$，即只要 $n>\frac{4}{\varepsilon}$，因此，可取 $N=\left[\frac{4}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，恒有 $\left|\frac{\sqrt{n^2+4}}{n}-1\right|<\varepsilon$，

即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+4}}{n}=1.$$

【例 10】 用极限定义证明：$\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^3-3x^2}{x^2-9}=\frac{3}{2}$.

分析：本例方法与前例类似，即 $\forall\varepsilon>0$，通过分析不等式 $\left|\frac{x^3-3x^2}{x^2-9}-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon$，去找满足条件 $|x-3|<\delta$ 的正数 δ.

【证明】 $\forall\varepsilon>0$，欲使

$$\left|\frac{x^3-3x^2}{x^2-9}-\frac{3}{2}\right|=\left|\frac{2x^2-3x-9}{2(x+3)}\right|=\left|\frac{2x+3}{2(x+3)}\right||x-3|<\varepsilon,$$

当 $x\to 3$ 时，不妨设 $|x-3|<1$，即 $2<x<4$，则 $\left|\frac{2x+3}{2(x+3)}\right|<\frac{11}{10}$，此时，只要 $\frac{11}{10}|x-3|<\varepsilon$，即 $|x-3|<\frac{10}{11}\varepsilon$，故只要取 $\delta=\min\left\{1,\frac{10}{11}\varepsilon\right\}$，当 $0<|x-3|<\delta$ 时，就恒有

$$\left|\frac{x^3-3x^2}{x^2-9}-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon,$$

所以

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-3x^2}{x^2-9}=\frac{3}{2}.$$

【例 11】 证明对于数列 $\{x_n\}$，若 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k-1}=a$ 及 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k}=a$ 同时成立，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

【证明】 据题示条件，$\forall\varepsilon>0$，由 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k-1}=a$，$\exists K_1\in N$（自然数集），当 $k>K_1$ 时，有 $|x_{2k-1}-a|<\varepsilon$；又由 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k}=a$，$\exists K_2\in N$，当 $k>K_2$ 时，有 $|x_{2k}-a|<\varepsilon$，只要取 $N=\max\{2K_1-1,2K_2\}$. 此时，若 n 为奇数，设 $n=2k-1$，当 $2k-1>N\geqslant 2K_1-1$ 时，则 $k>K_1$，有 $|x_{2k-1}-a|<\varepsilon$；若 n 为偶数，设 $n=2k$，当 $2k>N\geqslant 2K_2$ 时，则 $k>K_2$，有 $|x_{2k1}-a|<\varepsilon$，从而，当 $n>N$ 时，恒有

$$|x_n-a|<\varepsilon,\text{即}\quad \lim_{n\to\infty}x_n=a.$$

注：事实上，$\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k-1}=a$ 及 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k}=a$ 同时成立是 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 成立的充要条件，请读者自行证明．

【例 12】 求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$；(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)$；(3) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$；

(4) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})}{(1-x)^2}$；(5) $\lim\limits_{x\to 0}\tan x\sin\frac{1}{x^2}$；(6) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$.

【解】 (1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})=\lim\limits_{x\to+\infty}2\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}$

$$=2\lim_{x\to+\infty}\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}=0;$$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}=2$；

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1+x+x^2-3}{(1-x)(1+x+x^2)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-(x+2)}{1+x+x^2}=-1;$$

(4) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})}{(1-x)^2}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(1-x)(1-x)}{(1-x)^2(1+\sqrt{x})(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{(1+\sqrt{x})(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}$$

$$=\left.\frac{1}{(1+\sqrt{x})(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}\right|_{x=1}=\frac{1}{6};$$

(5) 由于 $\lim\limits_{x\to 0}\tan x=0$ 为无穷小，而 $\left|\sin\frac{1}{x^2}\right|\leqslant 1$ 有界，故 $\lim\limits_{x\to 0}\tan x\sin\frac{1}{x^2}=0$；

(6) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{2}$.