北京市海淀区学校信息中心 HAIDIAN XINXI 海淀

海淀信息白皮系列资料库

2006年高考

数学导数和微积分考点突破

高考白皮系列

《高考白皮系列》作为内部交流资料印行已经近10个年头，其间先后与全国16000所学校作过交流，受到使用学校师生的好评，一致认为：这是一套实用性强，信息量大，题型新颖的高考辅导资料。为了让更多考生受益，满足在备战高考一线拼搏的师生需求，《高考白皮系列》由开明出版社正式出版，面向全国师生公开发行。

开明出版社

总策划 王传业

本册主编 王子成 代夫珍
副 主 编 孙玉成 杨剑波
审 定 丁益祥

·北京市海淀区学校信息中心·HAIDIAN XINXI

海淀信息白皮系列资料库

2006年高考 导数与微分考点突破

高考白皮系列

开明出版社

责任编辑　吕志敏

图书在版编目(CIP)数据

高考数学导数和微分考点突破/王传业　主编.

北京：开明出版社，2005.6

(高考白皮系列)

ISBN 7－80205－187－8

Ⅰ.2... Ⅱ.王... Ⅲ.数学课—高中—升学参考资料　Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 061162 号

高考数学导数和微分考点突破

主编　王子成

*

开明出版社出版

(北京市海淀区西三环北路 19 号　邮编 100089)

三河市腾飞胶印厂

新华书店北京发行所经销

开本 889×1194　1/16　印张 8.25　字数 195 千字

2005 年 6 月北京第 1 版　2005 年 6 月北京第 1 次印刷

印数：00001—20000

ISBN7－80205－187－8　　　定价：10.00 元

听听丛书策划者、编写者是怎么说的

——致 2006 年高考应试考生

时钟一分一秒地移向 2006 年 6 月上旬那个令高考考生激动、焦灼，同时又充斥着热切期盼、满心希望的那一刻的到来。说真的，当考生步入考场的铃声响过，当分发试卷的哨声落下，那一时刻，场内场外、此心彼心、其情其景、其想其望，有谁人能说得出？又有哪个能道得明？

学生：我有夺得高考高分、满分的可能吗？指导教师：今年的高考试题是否尽在自己的把握之中？家长：孩子的心态如何，能否得到超常发挥？社会：一年一度……。一句话，每年的高考似乎都处在人们的飘渺未知之中。

高考是虚玄的吗？试题是不可预知的吗？高考高分、满分真的那么不可企求？

且慢。"高考白皮系列"丛书的策划者、编写者有话要说。

"高考白皮系列"丛书的策划者、编写者，其中有曾参与高考命题的大擘，有来自部分省地市历年站在高考"决战"指挥前沿的各学科教研员，也有深得高考送生"三昧"的领军教师。我们认为：几年来的高考命题，尤其是部分省市自主命题以来，其试卷内容表面看来似乎犹入山阴道上，但骨子里却没有一例超出该年《考试大纲》规定的考试内容及其能力层次；试卷题型虽然各展其姿，但也无非就那么几种形式，有的只不过略略换换角度、些许变变姿态而已。为此，我们几经"会诊"，为直接参与抑或间接参与高考决战的人们开出了一贴处方，这就是："高考白皮系列"丛书编写的指导思想和与之相应的编写体例；考生根据本系列丛书编写的指导思想、编写体例，将所给出的考点内容、试题类型、解题方法与技巧烂熟于心，就一定会一步一步地将赢得高分、满分的想望调整到志在必得之中。

为达此目的，"高考白皮系列"丛书各学科分册一律严格依据《考试大纲》规定的考试内容，精心盘察、审读、归纳、熔炼成若干个考点，进而指出认知该考点的内容方法、能力层次、角度变化及其测试手段与规律；这之后再给出测试该考点的已有试题类型、可能出现的变化形式；为调整考生对于高分、满分志在必得的平和心态，各学科分册又精心而周详地挑选、编制与考点相伍的练习，并配以简洁、精到的解析，以期最大限度地开启考生的认题、解题智力，增益高考夺魁信心。

俗云：饭是要一口一口吃的，碉堡是要一个一个攻破的；高考应试的决战也不例外。"高考白皮系列"丛书的策划者、设计者和编写者们十分看重"各个击破"的备考应试战略与战术。为了突出这一编写思想，大部分分册的书名还特意加上"考点突破"字样。我们认为，这样的备考应试战略战术及与之相适应的编写体例是科学的、可行的、从而也是最为强有实践活力的。

2006 用“高考白皮系列”丛书的编写思想与编写体例，是我们多年研究、总结各地备考应试实践的结晶；是在 2005 年“高考白皮系列”用书基础之上的又一次彻底改进与创新，从而更具科学的严密精神、指导的领先思想、实践的高效成果，并希望给 2006 年高招备考应试考生带来更为直接、更为有效的切实助益。

试想：当你根据“高考白皮系列”丛书指出的路子，把“高考白皮系列”丛书各学科分册所列考点，经过一番攻城略地的战斗，将其一个一个地打扫干净之后，到那时，考生一手提着识得的知识和解题能力串，一手提着习得的题型及其变化形式串，并以超乎寻常的平常心、不焦不躁地迈进考场……步出考场，高考决战的胜利者舍你其谁？

到那时，你会禁不住欢叫起来：“哇噻！我赢了耶！”

“哇噻！我赢了耶！”这是多么美妙、悦耳的声音啊！

“高考白皮系列”丛书的策划者、编写者热切地等待着分享你那高亢、中耳、从心底发出来的、胜利者的欢快声。……

高考最终赢家，必将是“高考白皮系列”丛书的忠实考生读者！

“高考白皮系列”丛书总策划　王传业

目　录

考点1　数学归纳法及其应用

知识要点

1. 数学归纳法

数学归纳法是证明与自然数有关的命题的一种数学方法. 如果我们设想：先证明当 n 取第一个值 n_0（例如 $n_0=1$ 时命题成立），然后假设当 $n=k(k\in N^*, k\geqslant n_0)$ 时命题成立，并证明当 $n=k+1$ 时命题也成立，那么就证明了这个命题成立. 因为证明了这一点，就可以断定这个命题对于 n 取第一个值后面的所有正整数也都成立. 这种证明方法叫做数学归纳法.

2. 用数学归纳法证明一个与正整数有关的命题的步骤是：

(1) 证明当 n 第一个值 n_0（例如 $n_0=1$ 或 2）时结论正确；

(2) 假设当 $n=k(k\in N^*$，且 $k\geqslant n_0)$ 结论正确，证明当 $n=k+1$ 时结论也正确.

在完成了这两个步骤以后，就可以断定命题从 n_0 开始的所有正整数 n 都正确.

用数学归纳法进行证明时，要分两个步骤，这两个步骤缺一不可，证明了第一步，就获得了递推的基础，但仅靠这一步还不能说明结论的普遍性. 在第一步中，考察使结论成立的最小正整数就足够了，没有必要再考察几个正整数，即使命题对这几个正整数都成立，也不能保证命题对其他正整数也成立；证明了第二步，就获得了递推的根据，但仅有这一步而没有第一步，就失去了递推的基础，只有把第一步的结论与第二步的结论结合在一起，才能得出普遍性结论. 因此，在完成一、二两步之后，还要做一个总的结论. 在第二步中，在推论之前，$n=k$ 时结论成立是不确定的，因此用“假设”二字，这一步的实质是证明命题对 $n=k$ 的正确性可以传递到 $n=k+1$ 时的情况，有了这一步，联系第一步的结论（命题对 $n=n_0$ 成立），就可以知道命题对 n_0+1 也成立，进而再由第二步可知 $n=(n_0+1)+1$，即 $n=n_0+2$ 也成立…这样递推下去，就可以知道命题对所有不小于 n_0 的正整数都成立. 在这一步中，$n=k$ 时命题成立，可以作为条件加以运用，而 $n=k+1$ 时的情况则有待利用归纳假设、已知的定义、公式、定理等加以证明，不能直接将 $n=k+1$ 代入命题.

高考样板题示例（一类）

示例一

某个命题与自然数 n 有关，若 $n=k(k\in N)$ 时该命题成立，那么可推得当 $n=k+1$ 时该命题也成立. 现已知当 $n=5$ 时，该命题不成立，那么可推得（　　）

A. 当 $n=6$ 时该命题不成立　B. 当 $n=6$ 时该命题成立
C. 当 $n=4$ 时该命题不成立　D. 当 $n=4$ 时该命题成立

（94年高考·上海卷）

【答案】 C

【解析】 因为当 $n=k$ 时，命题成立可推出 $n=k+1$ 时成立，所以 $n=5$ 时命题不成立，则 $n=4$ 时，命题也一定不成立，故应当选C.

示例二

用数学归纳证明 $(n+1)(n+2)\cdots(n+n)=2^n\cdot1\cdot3\cdots\cdot(2n-1)$ 时，从 $n=k$ 到 $n=k+1$ 等式两边添加的式子为（　　）

A. $2k+2$　B. $\frac{2k+1}{k+1}$　C. $\frac{(2k+1)(2k+2)}{k+1}$　D. $\frac{2k+3}{k+1}$

（04年模拟·济南）

【答案】 C

【解析】 当 $n=k$ 时，左式 $=(k+1)\cdot(k+2)\cdots(k+k)$，当 $n=k+1$ 时，

$$\begin{aligned}\text{左式}&=[(k+1)+1]\cdot[(k+1)+2]\cdots[(k+1)+(k-1)]\\&\quad\cdot[(k+1)+k]\cdot[(k+1)+(k+1)]\\&=(k+2)\cdot(k+3)\cdot(k+4)\cdots(k+k)(k+k+1)(k+k+2)\\&=\frac{(k+1)\cdot(k+2)\cdot(k+3)\cdots(k+k)}{k+1}\cdot(2k+1)(2k+2)\end{aligned}$$

∴ 两边添加的式子为 $\frac{(2k+1)(2k+2)}{k+1}$，故选C.

对应练习

练习1　用数学归纳法证明“$1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1(n\in N^*)$”过程中，第二步假设 $n=k$ 时等式成立，则当 $n=k+1$ 时应得到（　　）

A. $1+2+2^2+\cdots+2^{k-2}+2^{k-1}=2^{k+1}-1$
B. $1+2+2^2+\cdots+2^k+2^{k+1}=2^k-1+2^{k+1}$
C. $1+2+2^2+\cdots+2^{k-1}+2^k=2^{k+1}-1$
D. $1+2+2^2+\cdots+2^{k-1}+2^k=2^k-1+2^k$

练习2　用数学归纳法证明“$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots\frac{1}{n+n}\geqslant\frac{11}{24}(n\in N^*)$”时，由 $n=k$ 到 $n=k+1$ 时，不等式左边应添加的项是（　　）

A. $\frac{1}{2(k+1)}$　　B. $\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}$

能力要求

一、考试要求

《考试大纲》中要求理解数学归纳法的原理，能用数学归纳法证明一些简单的数学命题．

二、关于高考

高考试题，不但要求能用数学归纳法去证明现成的结论，而且加强了对于不完全归纳法应用的考查，既要求善于归纳发现结论，又要求能证明结论的正确性，因此，初步形成“观察——归纳——猜想——证明”的思维模式．

数学归纳法是一种数学方法(不会单独命题)，但它与数列的探索性问题结合在一起作为高考的热点来考查，预计今年仍以此为主，应引起注意．

利用归纳假设证明$n=k+1$时命题成立是关键一步．要证好这一步，首先要明确以下几点：一是要证什么？即$n=k+1$时的命题是什么？二是$n=k+1$时，命题与归纳假设的区别是什么？明确了这两点也就明确了这一步证明的方向和基本方法，在证明这一步时，特别应注意要把归纳假设当做已知条件使用，而且必须使用归纳假设，否则就不是数学归纳法．

在步骤(2)的证明过程中，突出了两个“凑”字，一“凑”假设，二“凑”结论，关键是明确$n=k+1$时证明的目标，充分考虑由$n=k$到$n=k+1$时命题形式之间的区别与联系．

因数学归纳法蕴含着数学创造的基本方法(不完全归纳和完全归纳)，是历年高考考查的对象之一，考察能力要求为掌握．其中2001年北京春季高考、2002年北京春季高考、2002年全国高考、2003年全国高考天津卷，2004年高考湖北卷均在最后的压轴题中考查了数学归纳法，分值均为14分，预计在今后的高考命题中将会继续得到高度重视，所以必须掌握这种解题方法．

纵观近几年的高考，从备考复习看，应着重以下几点：

(1) 以考纲要求为标准，立足于深刻理解定义和概念，掌握数学归纳法证明问题的基本步骤．

(2) 题目难度以低档为主，不超过中档题，要注意归纳法与其它知识的联系．

(3) 数学归纳法的应用通常与数学的其它方法联系在一起，如比较法、放缩法、配凑法、分析法和综合法等，要对上述方法会灵活运用．

(4) 数学归纳法是数学中的一种非常完美的证明方法，常以数列问题为背景，多以证明等式和不等式两种形式出现(其中用数列归纳法证明不等式已不作高考要求，教学中可作辅助方法处理)，突出“归纳—猜想—证明”这种由特殊到一般的思维方法．

C. $\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{k+1}$

D. $\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}$

练习3　对于不等式$\sqrt{n^2+n}\leqslant n+1(n\in \mathbf{N}^*)$，某学生的证明过程如下：

(1) 当$n=1$时，$\sqrt{1^2+1}\leqslant 1+1$，不等式成立．

(2) 假设$n=k(k\in \mathbf{N}^*)$时，不等式成立，即

$\sqrt{k^2+k}<k+1$，则$n=k+1$时，

$\sqrt{(k+1)^2+(k+1)}=\sqrt{k^2+3k+2}$

$<\sqrt{(k^2+3k+2)+(k+2)}=\sqrt{(k+2)^2}$

$=(k+1)+1$．

∴ 当$n=k+1$时，不等式成立．

上述证法(　　)

A. 过程全都正确　　B. $n=1$验得不正确

B. 归纳假设不正确　D. 从$n=k$到$n=k+1$的推理不正确

练习4　记凸k边形的内角和为$f(k)$，则凸$k+1$边形的内角和$f(k+1)=f(k)+$(　　)

A. $\frac{\pi}{2}$　　B. π　　C. $\frac{3}{2}\pi$　　D. 2π

练习5　用数学归纳法证明：“$1+a+a^2+\cdots+a^{n+1}=\frac{1-a^{n+2}}{1-a}(a\neq1)$，$n\in\mathbf{N}^*$，在验证$n=1$成立时，左边计算所得的结果是(　　)

A. 1　　B. $1+a$

C. $1+a+a^2$　　D. $1+a+a^2+a^3$

练习6　用数学归纳法证明“$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^n-1}<n$，$(n\in\mathbf{N}^*, n>1)$”时，由$n=k(k>1)$不等式成立，推证$n=k+1$时，左边应增加的项数是(　　)

A. 2^{k-1}　　B. 2^k-1　C. 2^k　　D. 2^k+1

高考样板题示例(二类)

示例一

若数列$\{a_n\}$中，$a_1=3$，且$a_{n+1}=a_n^2$(n为正整数)，则数列的通项$a_n=$________．

(02年高考·上海卷)

【答案】. $3^{2^{n-1}}$

【解析】　由$a_1=3$，$a_{n+1}=a_n^2$，得$a_2=3^2$，同理得$a_3=3^4$，$a_4=3^8$，猜测$a_n=3^{2^{n-1}}$．

用数学归纳法证明如下：

(1) 当$n=1$时，$a_1=3^{2^0}=3$，命题显然成立．(2) 假设当$n=k$时成立，即$a_k=3^{2^{k-1}}$．

当$n-k+1$时，$a_{k+1}=a_k^2=(3^{2^{k-1}})^2-a^{2\cdot2^{k-1}}-a^{2^k}=a^{2^{(k+1)-1}}$ ∴ 当$n=k+1$时，成立．

根据(1)(2)可知　$a_n=3^{2n-1}$．

示例二

设$\{a_n\}$是首项为1的正项数列，且$(n+1)a_{n+1}^2-na_n^2+a_{n+1}$

$\cdot a_n = 0(n=1,2,3,\cdots)$，则它的通项公式是 $a_n=$ ________.

(04年模拟·福州)

【答案】 $\frac{1}{n}$

【解析】 由 $(n+1)a_{n+1}^2 - na_n^2 + a_{n+1}\cdot a_n = 0$，得：$[(n+1)a_{n+1}-na_n](a_{n+1}+a_n)=0$

又 $\{a_n\}$ 是正项数列，所以 $a_{n+1}+a_n \neq 0$

故 $(n+1)a_{n+1}-na_n = 0 \Rightarrow a_{n+1}=\frac{n}{n+1}a_n$

$\therefore a_2=\frac{1}{2}\cdot a_1=\frac{1}{2}, a_3=\frac{2}{3}a_2, a_4=\frac{3}{4}a_3=\frac{1}{4}$

由此猜想：$a_n=\frac{1}{n}$.

对应练习

练习1 用数学归纳法证明：设 $f(n)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\frac{1}{n}$，则 $n+f(1)+f(2)+\cdots+f(n-1)=nf(n)(n\in \mathbf{N}^*$ 且 $n\geqslant 2)$，第一步要证的等式是________.

练习2 用数学归纳法证明：$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^2}>\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}$，假设 $n=k$ 时，不等式成立. 当 $n=k+1$ 时，应推证的目标是________.

练习3 观察下式：$1=1^2, 2+3+4=3^2; 3+4+5+6+7=5^2; 4+5+6+7+8+9+10=7^2\cdots$，则得出结论：________.

练习4 若不等式 $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{m}{24}$ 对于一切 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立，则正整数 m 的最大值为________.

高考样板示例(三类)

示例一

已知 $a>0$，数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=a, a_{n+1}=a+\frac{1}{a_n}, n=1,2,\cdots$.

(Ⅰ) 已知数列 $\{a_n\}$ 极限存在且大于零，求 $A=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$(将 A 用 a 表示)

(Ⅱ) 设 $b_n=a_n-A, n=1,2,\cdots$，证明 $b_{n+1}=-\frac{b_n}{A(b_n+A)}$；

(Ⅲ) 若 $|b_n|\leqslant\frac{1}{2^n}$ 对 $n=1,2,\cdots$ 都成立，求 a 的取值范围.

(04年高考·湖北卷)

【答案】 (Ⅰ) $A=\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}$ (Ⅱ) 见解析

(Ⅲ) $\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$

【解析】 (Ⅰ) 由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在，且 $A=\lim\limits_{n\to\infty}a_n(A>0)$，对 $a_{n+1}=a+\frac{1}{a_n}$ 两边取极限得 $A=a+\frac{1}{A}$ 解得 $A=\frac{a\pm\sqrt{a^2+4}}{2}$. 又 $A>0$，$\therefore A=\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}$.

(Ⅱ) 由 $a_n=b_n+A, a_{n+1}=a+\frac{1}{a_n}$ 得 $b_{n+1}+A=a+\frac{1}{b_n+A}$ $\therefore b_{n+1}=a-A+\frac{1}{b_n+A}=-\frac{1}{A}+\frac{1}{b_n+A}=-\frac{b_n}{A(b_n+A)}$.

即 $b_{n+1}=-\frac{b_n}{A(b_n+A)}$ 对 $n=1,2,\cdots$ 都成立.

(Ⅲ) 令 $|b_1|\leqslant\frac{1}{2}$，得 $\left|a-\frac{1}{2}(a+\sqrt{a^2+4})\right|\leqslant\frac{1}{2}$

$\therefore \left|\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+4}-a)\right|\leqslant\frac{1}{2}$,

$\therefore \sqrt{a^2+4}-a\leqslant 1$，解得 $a\geqslant\frac{3}{2}$.

现证明当 $a\geqslant\frac{3}{2}$ 时，$|b_n|\leqslant\frac{1}{2^n}$ 对 $n=1,2,\cdots$ 都成立.

(ⅰ) 当 $n=1$ 时结论成立(已验证).

(ⅱ) 假设当 $n=k(k\geqslant 1)$ 时结论成立，即 $|b_k|\leqslant\frac{1}{2^k}$，那么 $|b_{k+1}|=\frac{|b_k|}{|A(b_k+A)|}\leqslant\frac{1}{A|b_k+A|}\times\frac{1}{2^k}$ 故只须证明 $\frac{1}{A|b_k+A|}\leqslant\frac{1}{2}$，即证 $A|b_k+A|\geqslant 2$ 对 $a\geqslant\frac{3}{2}$ 成立.

由于 $A=\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}=\frac{2}{\sqrt{a^2+4}-a}$，而当 $a\geqslant\frac{3}{2}$ 时，$\sqrt{a^2+4}-a\leqslant 1$，$\therefore A\geqslant 2$.

$\therefore |b_k+A|\geqslant A-|b_k|\geqslant 2-\frac{1}{2^k}\geqslant 1$，即 $A|b_k+A|\geqslant 2$.

故当 $a\geqslant\frac{3}{2}$ 时，$|b_{k+1}|\leqslant\frac{1}{2}\times\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2^{k+1}}$，即 $n=k+1$ 时结论成立.

根据(ⅰ)和(ⅱ)可知结论对一切正整数都成立.

故 $|b_n|\leqslant\frac{1}{2^n}$，对 $n=1,2,\cdots$ 都成立的 a 的取值范围是 $\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$

本题主要考查数列、极限的概念和数学归纳法，考查灵活运用数学知识、分析问题和解决问题的能力. 同时，对学生的个性品质也有较高要求的考查. 本大题可考虑分步解决，逐一突破.

示例二

已知 $\{a_n\}$ 是由非负整数组成的数列，满足 $a_1=0, a_2=3$，$a_{n+1}a_n=(a_{n-1}+2)(a_{n-2}+2), n=3,4,5,\cdots\cdots$.

(1) 求 a_3；

(2) 证明 $a_n=a_{n-2}+2, n=3,4,5,\cdots$；

(3) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式及其前 n 项和 S_n

(02年高考·新课程)

【答案】 (1) $a_3=2$ (2) 见解析 (3) $a_n=n+(-1)^n$

$$S_n=\begin{cases}\frac{1}{2}n(n+1), \text{当 } n \text{ 为偶数时}\\ \frac{1}{2}n(n+1)-2, \text{当 } n \text{ 为奇数时.}\end{cases}$$

【解析】 (1) 由题设得 $a_3a_4=10$，且 a_3、a_4 均为非负整数，

所以 a_3 的可能的值为 1,2,5,10.

若 $a_3=1$,则 $a_4=10,a_5=\frac{3}{2}$,与题设矛盾,若 $a_3=5$,则 $a_4=2,a_5=\frac{35}{2}$,与题设矛盾.

若 $a_3=10$,则 $a_4=1,a_5=60,a_6=\frac{3}{5}$,与题设矛盾,所以 $a_3=2$.

(2) 用数学归纳法证明:

① 当 $n=3,a_3=a_1+2$ 时等式成立.

② 假设当 $n=k(k\geqslant3)$ 时等式成立.即 $a_k=a_{k-2}+2$,由题设 $a_{k+1}a_k=(a_{k-1}+2)(a_{k-2}+2)$,$\because a_k=a_{k-2}+2\neq0$,$\therefore a_{k+1}=a_{k-1}+2$,也就是说,当 $n=k+1$ 时,等式 $a_{k+1}=a_{k-1}+2$ 成立.

根据 ① 和 ②,对于所有 $n\geqslant3$,有 $a_{n+1}=a_{n-1}+2$.

(3) 由 $a_{2k-1}=a_{2(k-1)-1}+2,a_1=0$,及 $a_{2k}=a_{2(k-1)}+2,a_2=3$ 得 $a_{2k-1}=2(k-1),a_{2k}=2k+1,k=1,2,3,\cdots$.

即 $a_n=n+(-1)^n,n=1,2,3,\cdots$.所以

$$S_n=\begin{cases}\frac{1}{2}n(n+1),\text{当 } n \text{ 为偶数},\\ \frac{1}{2}n(n+1)-2,\text{当 } n \text{ 为奇数}.\end{cases}$$

【点评】 本题主要考查归纳、猜想、证明的数学思想.

示例三

设 a_0 为常数,且 $a_n=3^{n-1}-2a_{n-1}(n\in\mathbf{N})$

(1) 证明对任意 $n\geqslant1$,$a_n=\frac{1}{5}[3^n+(-1)^{n-1}\cdot2^n]+(-1)^n\cdot2^na_0$;

(2) 假设对任意 $n\geqslant1$,有 $a_n>a_{n-1}$,求 a_0 的取值范围.

(03 年高考·天津卷)

【答案】 (1) 见解析 (2)a_0 的取值范围为 $\left(0,\frac{1}{3}\right)$

【解析】 (1) 证法 1 ① 当 $n=1$ 时,由已知 $a_1=1-2a_0$,等式成立;

② 假设当 $n=k(k\geqslant1)$ 等式成立,则 $a_k=\frac{1}{5}[3^k+(-1)^{k-1}2^k]-(-1)^k2a_0$,

那么 $a_{k+1}=3^k-2a_k=3^k-\frac{2}{5}[3^k+(-1)^{k-1}2^k]-(-1)^k2^{k+1}a_0=\frac{1}{5}[3^{k+1}+(-1)^k2^{k+1}]+(-1)^{k+1}2^{k+1}a_0$,

也就是说,当 $n=k+1$ 时,等式成立.根据 ① 和 ②,可知等式对任何 $n\in\mathbf{N}$,成立.

证法 2 如果设 $a_n=3^{n-1}-2(a_{n-1}-a\cdot3^{n-1})$,用 $a_n=3^{n-1}-2a_{n-1}$ 代入,可解出 $a=\frac{1}{5}$.

所以 $\{a_n-\frac{3^n}{5}\}$ 是公比为 -2,首项为 $a_1-\frac{3}{5}$ 的等比数列.

所以 $a_n-\frac{3^n}{5}=\left(1-2a_0-\frac{3}{5}\right)(-2)^{n-1}(n\in\mathbf{N})$.即 $a_n=\frac{3^n+(-1)^{n-1}2^n}{5}+(-1)^n2^na_0$.

(2) 解法一 由 a_n 通项公式

$$a_n-a_{n-1}=\frac{2\times3^{n-1}+(-1)^{n-1}3\times2^{n-1}}{5}+(-1)^n3\times2^{n-1}a_0.$$

所以 $a_n>a_{n-1}(n\in\mathbf{N})$ 等价于

$$(-1)^{n-1}(5a_0-1)<\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}(n\in\mathbf{N}).\quad ①$$

1) 当 $n=2k-1,k=1,2,\cdots$ 时,① 即为 $(-1)^{2k-2}(5a_0-1)<\left(\frac{3}{2}\right)^{2k-3}$.

即为 $a_0<\frac{1}{5}\left(\frac{3}{2}\right)^{2k-3}+\frac{1}{5}$. ②

② 式对 $k=1,2,\cdots$ 都成立,有 $a_0<\frac{1}{5}\times\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}+\frac{1}{5}=\frac{1}{3}$.

2) 当 $n=2k,k=1,2,\cdots$ 时,① 式即为 $(-1)^{2k-1}(5a_0-1)<\left(\frac{3}{2}\right)^{2k-2}$.

即为 $a_0>-\frac{1}{5}\times\left(\frac{3}{2}\right)^{2k-2}+\frac{1}{5}$. ③

③ 式对 $k=1,2,\cdots$ 都成立,有 $a_0>-\frac{1}{5}\times\left(\frac{3}{2}\right)^{2\times1-2}+\frac{1}{5}=0$,综上,① 式对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 成立,有 $0<a_0<\frac{1}{3}$.

故 a_0 的取值范围为 $\left(0,\frac{1}{3}\right)$.

解法二 如果 $a_n>a_{n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$ 成立,特别取 $n=1,2$ 有 $a_1-a_0=1-3a_0>0$.

$a_2-a_1=6a_0>0$.因此 $0<a_0<\frac{1}{3}$.下面证明当 $0<a_0<\frac{1}{3}$ 时,对任意 $n\in\mathbf{N}^*$,$a_n-a_{n-1}>0$,由 a_n 的通项公式 $5(a_n-a_{n-1})=2\times3^{n-1}+(-1)^{n-1}3\times2^{n-1}+(-1)^n5\times3\times2^{n-1}a_0$.

① 当 $n=2k-1,k=1,2,\cdots$ 时,$5(a_n-a_{n-1})=2\times3^{n-1}+3\times2^{n-1}-5\times3\times2^{n-1}a_0>2\times2^{n-1}+3\times2^{n-1}-5\times3\times2^{n-1}=0$

② 当 $n=2k,k=1,2,\cdots$ 时,$5(a_n-a_{n-1})=2\times3^{n-1}-3\times2^{n-1}+5\times3\times2^{n-1}a_0>2\times3^{n-1}-3\times2^{n-1}\geqslant0$.

与正整数 n 有关的数学命题可考虑用数学归纳法证明,但必须用到归纳假设,即在证当 $n=k+1$ 时需运用 $n=k$ 时的结论,而不能直接将 $n=k+1$ 代入要证的结论.本题第(2)小题转化为关于 n 的恒成立问题,由于正、负符号的影响,应对 n 进行分类讨论,否则难以求解.

示例四

设数列$\{a_n\}$满足 $a_{n+1}=a_n^2-na_n+1,n=1,2,3,\cdots$

(1) 当 $a_1=2$ 时,求 a_2,a_3,a_4,并由此猜想出 a_n 的一个通项公式;

(2) 当 $a_1\geqslant3$ 时,证明对所有 $n\geqslant1$,有

①$a_n\geqslant n+2$;② $\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+\cdots\frac{1}{1+a_n}\leqslant\frac{1}{2}$.

(02 年高考·全国卷)

【答案】 (1)$a_n=n+1(n\in\mathbf{N}^*)$ (2) 见解析

【解析】 (1) 由 $a_1=2$,得 $a_2=a_1^2-a_1+1=3$;由 $a_2=3$,得 $a_3=a_2^2-2a_2+1=4$;由 $a_3=4$,得 $a_4=a_3^2-3a_3+1=5$,由此猜想 a_n 的一个通项公式:$a_n=n+1(n\in\mathbf{N}^*)$

(2) 1) 用数学归纳法证明:

① 当 $n=1$ 时，$a_1 \geqslant 3 = 1+2$，不等式成立；

② 假设当 $n=k$ 时不等式成立，即 $a_k \geqslant k+2$，那么，$a_{k+1} = a_k^2 - ka_k + 1 = a_k(a_k-k)+1 \geqslant (k+2)(k+2-k)+1 \geqslant k+3$，即当 $n=k+1$ 时，$a_{k+1} \geqslant (k+1)+2$，

根据①和②，对于所有 $n \geqslant 1$，有 $a_n \geqslant n+2$；

2) 由 $a_{n+1} = a_n(a_n-n)+1$ 及 1)，对 $k \geqslant 2$，有 $a_k = a_{k-1}(a_{k-1}-k+1) \geqslant a_{k-1}(k-1+2-k+1)+1 = 2a_{k-1}+1$，…，所以 $a_k \geqslant 2^{k-1}a_1 + 2^{k-2} + \cdots + 2 + 1 = 2^{k-1}(a_1+1)-1$，于是 $\frac{1}{1+a_k} \leqslant \frac{1}{1+a_1} \cdot \frac{1}{2^{k-1}}, k \geqslant 2$，所以 $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{1+a_k} \leqslant \frac{1}{1+a_1} \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1}{1+a_1} \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} \leqslant \frac{2}{1+a_1} \leqslant \frac{2}{1+3} = \frac{1}{2}$.

【点评】 在用数学归纳法证明不等式中，往往对不等式的一边进行放缩，以利于达到目标.

示例五

在 1 与 2 之间插入 n 个正数 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$，使这 $n+2$ 个数成等比数列；又在 1 与 2 之间插入 n 个正数 $b_1, b_2, b_3, \cdots b_n$，使这 $n+2$ 个数成等差数列，记 $A_n = a_1a_2\cdots a_n$，$B_n = b_1+b_2+\cdots+b_n$

(1) 求数列 $\{A_n\}$ 和 $\{B_n\}$ 的通项；

(2) 当 $n \geqslant 7$ 时，比较 A_n 与 B_n 的大小.

（01 年高考·北京）

【答案】 (1) $\{A_n\}$ 的通项 $A_n = 2^{\frac{n}{2}}$　$\{B_n\}$ 的通项 $B_n = \frac{3}{2}n$　(2) 当 $n \geqslant 7$ 时，$A_n > B_n$

【解析】 (1) 因为 $1, a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, 2$ 成等比数列，所以 $a_1a_n = a_2a_{n-1} = a_3a_{n-2} = \cdots = a_ka_{n-k} = \cdots = 1 \times 2 = 2$，所以 $A_n^2 = (a_1a_n)(a_2a_{n-1})\cdots(a_{n-1}a_2)(a_na_1) = (1\times 2)^n = 2^n$，所以 $A_n = 2^{\frac{n}{2}}$，又因为 $1, b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n, 2$ 成等差数列，所以 $b_1+b_n = b_2+b_{n-1} = \cdots = 1+2 = 3$，所以 $B_n = \frac{(b_1+b_n)n}{2} = \frac{3}{2}n$.

所以，数列 $\{A_n\}$ 的通项 $A_n = 2^{\frac{n}{2}}$，数列 $\{B_n\}$ 的通项 $B_n = \frac{3}{2}n$.

(2) 因为 $A_n = 2^{\frac{n}{2}}, B_n = \frac{3}{2}n$，所以 $A_n^2 = 2^n, B_n^2 = \frac{9}{4}n^2$，要比较 A_n 与 B_n 的大小，只需比较 A_n^2 与 B_n^2 的大小，即比较当 $n \geqslant 7$ 时，2^n 与 $\frac{9}{4}n^2$ 的大小，当 $n=7$ 时，$2^n = 128$，$\frac{9}{4}n^2 = \frac{9}{4} \cdot 49$，知 $2^n > \frac{9}{4}n^2$.

经验证 $n=7, n=9$ 时均有命题 $2^n > \frac{9}{4}n^2$ 成立，于是猜想当 $n \geqslant 7$ 时，$2^n > \frac{9}{4}n^2$ 成立. 下面证明它的正确性：

① 当 $n=7$ 时，已验证 $2^n > \frac{9}{4}n^2$，命题成立.

② 假设当 $n=k(k \geqslant 7)$ 时，命题成立，即 $2^k > \frac{9}{4}k^2$，那么 $2^{k+1} > 2 \cdot \frac{9}{4}k^2$，又当 $k \geqslant 7$ 时，有 $k^2 > 2k+1$，所以 $2^{k+1} > \frac{9}{4} \times (k^2+2k+1) = \frac{9}{4}(k+1)^2$，这就是说，当 $n=k+1$ 时，命题 $2^n > \frac{9}{4}n^2$ 成立.

根据①、②可知命题对于 $n \geqslant 7$ 都成立，从而当 $n \geqslant 7$ 时 $A_n > B_n$.

用数学归纳法证明不等式时，可先等价变形，再用数学归纳法. 在第二步的证明中，要用到归纳假设，这是注意到 $2k^2 = k^2 + k^2 > k^2 + 2k + 1$ 的应用.

示例六

已知　数列 $\{b_n\}$ 是等差数列，$b_1 = 1, b_1+b_2+\cdots+b_n = 145$，(1) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项 b_n；(2) 设数列 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n = \log_a\left(1+\frac{1}{b_n}\right)$（其中 $a>0$，且 $a \neq 1$），且记 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，比较 S_n 与 $\frac{1}{3}\log_a b_{n+1}$ 的大小，并证明你的结论.

（98 年高考·全国理）

【答案】 (1) 数列 $\{b_n\}$ 的通项 $b_n = 3n-2$　(2) $0<a<1$ 时，$S_n < \frac{1}{3}\log_a b_{n+1}$

【解析】 (1) 设数列 $\{b_n\}$ 的公差为 d，则有 $b_1 = 1, 10b_1 + \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 9d = 145$，解得 $d = 3$，故 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n = 3n-2$.

(2) 由 $b_n = 3n-2$ 知，$S_n = \log_a\left(1+\frac{1}{1}\right) + \log_a\left(1+\frac{1}{4}\right) + \cdots + \log_a\left(1+\frac{1}{3n-2}\right) = \log\left[\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{3n-2}\right)\right]$，又 $\frac{1}{3}\log_a b_{n+1} = \log_a \sqrt[3]{3n+1}$，要比较 S_n 与 $\frac{1}{3}\log_a b_{n+1}$ 的大小可先比较 $\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{3n-2}\right)$ 与 $\sqrt[3]{3n+1}$ 的大小.

当 $n=1$ 时，有 $\left(1+\frac{1}{1}\right) > \sqrt[3]{3\cdot 1+1}$；

当 $n=2$ 时，有 $\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right) = \frac{5}{2} > \sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{3\cdot 2+1}$；

由此推测

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{3n-2}\right) > \sqrt[3]{3n+1} \qquad (*)$$

下面证明这一结论：

① 当 $n=1,2$ 时（*）式显然成立；② 假设当 $n=k(k \geqslant 1)$ 时（*）式成立，即 $\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{3k-2}\right) > \sqrt[3]{3k+1}$.

则当 $n=k+1$ 时，$\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{3n-2}\right)\left(1+\frac{1}{3(k+1)-2}\right) > \sqrt[3]{3k+1}\left(1+\frac{1}{3(k+1)-2}\right)$

$$= \sqrt[3]{3k+1}\left(1+\frac{1}{3k+1}\right) = \frac{\sqrt[3]{3k+1}}{3k+1}(3k+2),$$

由于 $\left[\frac{\sqrt[3]{3k+1}}{3k+1}(3k+2)\right]^3 - [\sqrt[3]{3(k+1)+1}]^3$

$$= \frac{(3k+2)^3 - (3k+4)(3k+1)^2}{(3k+1)^2} = \frac{9k+4}{(3k+1)^2} > 0,$$

所以有 $\frac{\sqrt[3]{3k+1}}{3k+1}(3k+2) > \sqrt[3]{3(k+1)+1}$，

从而 $\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{3k-2}\right)\left(1+\frac{1}{3k+1}\right) > \sqrt[3]{3(k+1)+1}$，

即当 $n=k+1$ 时（*）式也成立.

根据①、②，对任意正整数 n，（*）式都成立.

所以，当 $a>1$ 时，$S_n > \frac{1}{3}\log_a b_{n+1}$；当 $0<a<1$ 时，$S_n < \frac{1}{3}\log_a b_{n+1}$.

为了解决 S_n 与 $\frac{1}{3}\log_a b_{n+1}$ 的大小比较问题，实际上可采用"以退为进"的策略. 首先退到真数的比较，即比较 A_n 与 $\sqrt[3]{3n+1}$，这两个式子初看起来还一时不能判断哪个更大一些，所以再退，退到原始的 $n=1,2$ 的情况，从而获得一些相关信息，而正是这些信息，使我们猜测（*）成立，再进一步设法证明其正确性，所以在情况混浊不清时，退到最原始、最简单的情况以获取必要的信息，是解决问题的重要且行之有效的方法.

对应练习

练习1 已知函数 $f(x)=\ln(2-x)+ax$ 在开区间 $(0,1)$ 内是增函数.

(1) 求实数 a 的取值范围；

(2) 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1\in(0,1)$，$a_{n+1}=\ln(2-a_n)+a_n$ $(n\in\mathbf{N}^*)$，证明 $0<a_n<a_{n+1}<1$.

练习2 已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_2=a+2$（a 为常数），S_n 是 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，且 S_n 是 na_n 与 na 的等差中项.

(1) 求 a_1，a_3；

(2) 猜想 a_n 的表达式，并用数学归纳法加以证明；

(3) 求证以 $\left(a_n,\frac{S_n}{n}-1\right)$ 为坐标的点，$P_n(n=1,2,\cdots)$ 都落在同一直线上.

练习3 数列 $\{a_n\}$ 各项均为正数，S_n 为其前 n 项的和，对于 $n\in\mathbf{N}^*$，总有 a_n,S_n,a_n^2 成等差数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项 a_n；

(2) 设数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 的前 n 项和为 T_n，数列 $\{T_n\}$ 的前 n 项和为 R_n，求证：当 $n\geqslant 2$，$n\in\mathbf{N}^*$ 时，$R_{n-1}=n(T_n-1)$；

(3) 若函数 $f(x)=\frac{1}{(p-1)\cdot 3^{qx}+1}$ 的定义域为 R，并且 $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=0(n\in\mathbf{N}^*)$，求证：$p+q>1$.

练习4 (1) 已知数列 $\{a_n\}$，其通项 $a_n=n(n+1)^2$，问：是否存在这样的等差数列 $\{b_n\}$，使 $a_n=1\cdot b_1+2\cdot b_2+3\cdot b_3+\cdots+n\cdot b_n$，对一切 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立，并证明你的结论；

(2) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $0<a_n<1(n\in\mathbf{N}^*)$，试比较 $(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n)$ 与 $1-(a_1+a_2+\cdots+a_n)$ 的大小.

练习5 已知数列 $\{b_n\}$ 是等差数列，$b_1=1$，$b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{10}=100$.

(1) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项 b_n；

(2) 设数 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n=\lg\left(1+\frac{1}{b_n}\right)$，记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 试比较 S_n 与 $\frac{1}{2}\lg b_{n+1}$ 的大小，并证明你的结论.

练习6 设 $a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}(n\in\mathbf{N}^*)$，是否存在 n 的整式 $g(n)$，使得等式 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}=g(n)(a_n-1)$ 对大于1的一切自然数 n 都成立？证明你的结论.

练习7 已知 $y=f(x)$ 满足 $f(n-1)=f(n)-\lg a^{n-1}$ $(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$，且 $f(1)=-\lg a$，是否存在实数 α、β，使 $f(n)=(\alpha n^2+\beta n-1)\lg a$，对任何 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立？证明你的结论.

练习8 已知数列 $\{a_n\}$，$a_n>0$ 前 n 项和 $S_n=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)$.

(1) 求 a_1，a_2，a_3 的值；(2) 猜想出通项 a_n，并证明.

练习9 数列 $a_n=\frac{1}{(n+1)^2}(n\in\mathbf{N}^*)$，

设 $f(n)=(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n)$

试求：$f(1)$，$f(2)$，$f(3)$，$f(4)$ 并推算出 $f(n)$ 的公式，并证明.

练习10 设 a_0 为常数，且 $a_n=3^{n-1}-2a_{n-1}(n\in\mathbf{N}_+)$.

(1) 证明：对任意 $n\geqslant 1$，$a_n=\frac{1}{5}[3^n+(-1)^{n-1}\cdot 2^n]+(-1)^n\cdot 2^n a_0$；

(2) 假设对任意 $n\geqslant 1$ 时有 $a_n>a_{n-1}$，求 a_0 取值范围.

考点2　数列的极限

知识要点

1.数列极限的定义

一般地说,如果当项数 n 无限增大时,无穷数列 $\{a_n\}$ 的项 a_n 无限地趋近于某个常数 a(即 $|a_n-a|$ 无限地接近于0),那么就说数列 $\{a_n\}$ 以 a 为极限,或者说 a 是数列 $\{a_n\}$ 的极限.

注:① 若数列 $\{a_n\}$ 的极限是 A,a_n 可能比 A 小,无限趋近于 A,a_n 也可能比 A 大,无限趋近于 A,a_n 也可时而小于 A,时而大于 A,无限趋近于 A,因而可统一用 a_n 与 A 的差的绝对值趋向于0来表示数列 a_n 无限趋近于 A.

② 对于有限数列,当然不发生项数无限增大的情况,因此数列极限是指无穷数列的极限,也不是所有的无穷数列都有极限,但如果有极限,则极限是唯一的.

2.数列极限的四则运算法则

如果 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$,$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$,那么 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=A\pm B$;$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=A\cdot B$;$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{A}{B}(B\neq 0)$;$\lim\limits_{n\to\infty}(C\cdot a_n)=C\cdot A$($C$ 是常数).

运用上述的运算法则应注意以下两个问题:

① $\{a_n\}$,$\{b_n\}$ 都有极限是运算法则的前提条件,忽略这个前提容易造成错误.

② 只有当有限个数列的项相加减时,才能使用运算法则.

几个特殊数列的极限:

① $\lim\limits_{n\to\infty}C=C$($C$ 为常数)

② $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=\begin{cases}0 & (|q|<1)\\ 1 & q=1\\ \text{不存在} & (|q|>1\text{ 或 }q=-1)\end{cases}$

③ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{C}{n^a}=0$($a>0$,$a$ 是常数,C 是常数)

④ $$\lim_{n\to\infty}\frac{a_kn^k+a_{k-1}n^{k-1}+\cdots+a_0}{b_mn^m+b_{m-1}n^{m-1}+\cdots+b_0}=\begin{cases}0 & (k<m)\\ \dfrac{a_k}{b_m} & (k=m)\\ \text{不存在} & (k>m)\end{cases}$$

如果无穷数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和构成一个数列 $\{S_n\}$:$S_1,S_2,S_3,\cdots$,当这个前 n 项和的数列 $\{S_n\}$ 存在极限,则 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$ 称为无穷数列 $\{a_n\}$ 的各项和,特别地,若 $\{a_n\}$ 是等比数列 $\{a_1q^{n-1}\}$ 且 $0<|q|<1$,则 $S=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\dfrac{a_1}{1-q}$.

高考样板题示例(一类)

示例一

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{2}{n+1}+\dfrac{3}{n+1}-\cdots+\dfrac{2n-1}{n+1}-\dfrac{2n}{n+1}\right)$ 的值为(　　)

A. -1　　B. 0　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. 1

(04年高考·广东卷)

【答案】 A

【解析】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{2}{n+1}+\dfrac{3}{n+1}-\dfrac{4}{n+1}+\cdots+\dfrac{2n-1}{n+1}-\dfrac{2n}{n+1}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\dfrac{n}{n+1}\right)=-1$,故选 A.

示例二

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-2)^2(2+3n)^3}{(1-n)^5}$ 等于(　　)

A. 0　　B. 32　　C. -27　　D. 27

(04年春季高考·安徽)

【答案】 C

【解析】
$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n-2)^2(2+3n)^3}{(1-n)^5}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(n-2)^2\cdot(2+3n)^3}{n^5}}{\dfrac{(1-n)^5}{n^5}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\dfrac{2}{n}\right)^2\cdot\left(\dfrac{2}{n}+3\right)^3}{\left(\dfrac{1}{n}-1\right)^5}=\frac{1^2\cdot3^3}{(-1)^5}=-27$$

示例三

数列 $\{a_n\}$ 中,$a_1=\dfrac{1}{5}$,$a_n+a_{n+1}=\dfrac{6}{5^{n+1}}$,$n\in\mathbf{N}^*$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=$(　　)

A. $\dfrac{2}{5}$　　B. $\dfrac{2}{7}$　　C. $\dfrac{1}{4}$　　D. $\dfrac{4}{25}$

(04年高考·湖南卷)

【答案】 C

【解析】 由已知 $a_1=\dfrac{1}{5}$,可求得 $a_2=\dfrac{1}{5^2}$,$a_3=\dfrac{1}{5^3}$,$\cdots$,$a_n=\dfrac{1}{5^n}$.

$\because\{a_n\}$ 是以 $\dfrac{1}{5}$ 为首项,$\dfrac{1}{5}$ 为公比的等比数列,

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=\dfrac{a_1}{1-q}=\dfrac{\dfrac{1}{5}}{1-\dfrac{1}{5}}=\dfrac{1}{4}$.

能力要求

一、考试要求

1. 从数列的变化趋势理解数列的极限概念.
2. 掌握数列极限的四则运算法则.
3. 掌握几个重要的数列极限,如 $\lim\limits_{n\to\infty}C=C$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a}{n}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0(|q|<1)$.
4. 会求某些数列的极限.
5. 注意无穷递缩等比数列各项和这一极限的应用.

二、关于高考

数列极限在高考中的考察形式以选择题或填空题为主,若在解答题中出现,常出现在最后一问.在以上考查形式中主要以考查公比的绝对值小于1的无穷等比数列各项和公式的应用为主.

例如 在一系列球中,第一球的半径为1,第2个球的直径等于第1个球的半径,第3个球的直径等于第2个球的半径,依次类推,求所有这些球的表面积之和与体积之和.

【解析】 设球的半径组成的数列为 $\{r_n\}$,则 $r_1=1,r_2=\frac{1}{2}$,即 $\frac{r_n}{r_{n-1}}=\frac{1}{2}$,则这些球的表面积,体积都组成等比数列,且它们的面积和为

$$S=4\pi(r_1^2+r_2^2+\cdots)=4\pi\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{16}{3}\pi,$$

体积之和为

$$V=\frac{4}{3}\pi(r_1^3+r_2^3+\cdots)=\frac{4}{3}\pi\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{8}}=\frac{32}{21}\pi.$$

另外,逆向极限问题,也是高考的考查点之一,解决此类问题,一般还是从求极限入手.

例如(1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n}{3^{n+1}+(a+1)^n}=\frac{1}{3}$,求 a 的取值范围.

【答案】 a 的取值范围为 $-4<a<2$.

【解析】 由已知得:$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a+1}{3}\right)^n=0$

$\therefore\left|\frac{a+1}{3}\right|<1$,解得 $-4<a<2$.

(2) 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{an^2+cn}{bn^2+c}=2$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{bn+c}{cn+a}=3$,求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{an^2+bn+c}{cn^2+an+n}$.

【答案】 $\lim\limits_{n\to\infty}=\frac{an^2+bn+c}{cn^2+an+n}=6$

【解析】 $\because\lim\limits_{n\to\infty}\frac{an^2+cn}{bn^2+c}=\frac{a}{b}=2$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{bn+c}{cn+a}=\frac{b}{c}=3$, $\therefore\frac{a}{c}=\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}=6$,故 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{an^2+bn+c}{cn^2+an+n}=\frac{a}{c}=6$.

示例四

若数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是

$$a_n=\frac{3^{-n}+2^{-n}+(-1)^n(3^{-n}-2^{-n})}{2},n=1,2,\cdots,$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$ 等于(　　)

A. $\frac{11}{24}$　　B. $\frac{17}{24}$　　C. $\frac{19}{24}$　　D. $\frac{25}{24}$

(03年高考·北京卷)

【答案】 C

【解析】 $\because a_n=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(-\frac{1}{3}\right)^n-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]$

$\therefore\{a_n\}$ 的前 n 项和可分四组来求,而每组的极限都存在,

$$\therefore\text{原式}=\frac{1}{2}\left[\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}+\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\left(-\frac{1}{3}\right)}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}-\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}+1-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right]=\frac{19}{24}$$

$\therefore$ 选 C.

示例五

在等比数列 $\{a_n\}$ 中,$a_1>1$,且前 n 项和 S_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{a_1}$,那么 a_1 的取值范围是(　　)

A. $(1,+\infty)$　　B. $(1,4)$

C. $(1,2)$　　D. $(1,\sqrt{2})$

(98年高考·全国卷)

【答案】 D

【解析】 由题意得:$\frac{a_1}{1-q}=\frac{1}{a_1}$,且 $0<|q|<1$,

$\therefore -q=a_1^2-1$, $\therefore 0<|a_1^2-1|<1$.

又 $\because a_1>1$, $\therefore 1<a_1<\sqrt{2}$,故选 D.

对应练习

练习1 等比数列首项 $a_1=-1$,前 n 项和为 S_n,若 $\frac{S_{10}}{S_5}=\frac{31}{32}$.则 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 等于　　(　　)

A. $\frac{2}{3}$　　B. $-\frac{2}{3}$

C. 2　　D. -2

练习2 设等差数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 均不是常数列,若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{3}{4}$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{(2n-1)a_{2n}}$ 等于　　(　　)

A. $\frac{9}{2}$　　B. $\frac{3}{2}$

C. $\frac{27}{32}$　　D. $\frac{9}{4}$

练习 3 已知数列$\{a_n\}$是由正数组成的数列，$a_1=4$且满足$\lg a_n=\lg a_{n-1}+\lg b$，其中$b>3, n>1$，且$n\in \mathbf{N}^*$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{n-1}-a_n}{3^{n-1}+a_n}$等于(　　)

A. -1　　B. 1

C. $\dfrac{1}{4}$　　D. $\dfrac{1}{b}$

练习 4 设$\{a_n\}$、$\{b_n\}$都是公差不为零的等差数列，S_n是数列$\{b_n\}$的前n项和，若$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{1}{2}$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{na_n}{S_n}$等于(　　)

A. 4　　B. 2

C. 1　　D. $\dfrac{1}{2}$

练习 5 已知数列$\{a_n\}$满足$S_n=\dfrac{1}{3}a_n-1$，那么$\lim\limits_{n\to\infty}(a_2+a_4+\cdots+a_{2n})$的值为(　　)

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. $\dfrac{2}{3}$

C. -2　　D. 1

练习 6 一个无穷等比数列的公比q满足$0<q<1$，其前n项和为S_n，且它的第4项与第8项之和等于$\dfrac{17}{8}$，第5项与第7项之积等于$\dfrac{1}{4}$，则$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=$(　　)

A. 64　　B. 32　　C. 16　　D. 8

高考样板题示例(二)

示例一

在数列$\{a_n\}$中，$a_1=3$，且对任意大于1的正整数n，点$(\sqrt{a_n},\sqrt{a_{n-1}})$在直线$x-y-\sqrt{3}=0$上，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{(n+1)^2}=$________.

(04年春季高考·上海卷)

【答案】 3

【解析】 由题意有$\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-1}}-\sqrt{3}=0$，即$\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-1}}=\sqrt{3}$，$\therefore\{\sqrt{a_n}\}$为等差数列，$\therefore\sqrt{a_n}=\sqrt{3}+(n-1)\sqrt{3}=\sqrt{3}n$. $\therefore\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{(n+1)^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2}{(n+1)^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}=3$.

示例二

如图，P_1是一块半径为1的半圆形纸板，在P_1的左下端剪去一个半径为$\dfrac{1}{2}$的半圆后得图形P_2，然后依次剪去更小半圆(其直径为前一被剪掉半圆的半径)得图形$P_3,P_4,\cdots,P_n,\cdots$. 记纸板$P_n$的面积为$S_n$，则$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=$________.

(04年高考·重庆卷)

P_1　　P_2　　P_3　　P_4

【答案】 $\dfrac{\pi}{3}$

【解析】 原题可设想为在半径为1的圆上分别剪去半径为1的半圆，剪去半径为$\dfrac{1}{2}$的半圆，半径为$\dfrac{1}{2^2}$的半圆，……，半径为$\dfrac{1}{2^n}$的半圆后，纸板P_n所余的面积为S_n，设在半径为1的圆上剪去半圆的面积分别为a_n，那么纸板余下的面积$S_n=\pi-(a_1+a_2+\cdots+a_n)$.

$a_1=\dfrac{1}{2}\cdot\pi\cdot1^2=\dfrac{1}{2}\pi=\left(\dfrac{1}{2}\right)^1\pi$，$a_2=\dfrac{1}{2}\pi\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2^3}\pi=\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\pi$，$a_3=\dfrac{1}{2}\pi\cdot\left(\dfrac{1}{2^2}\right)^2=\left(\dfrac{1}{2}\right)^5\pi,\cdots,a_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n-1}\pi$，$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\pi-\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots a_n)=\pi-\dfrac{\frac{\pi}{2}}{1-\frac{1}{4}}$

$$=\pi-\frac{2}{3}\pi=\frac{\pi}{3}.$$

示例三

设等比数列$\{a_n\}(n\in\mathbf{N}^*)$的公比$q=-\dfrac{1}{2}$，且$\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n-1})=\dfrac{8}{3}$，则$a_1=$________.

(04年高考·上海卷)

【答案】 2

【解析】 由题意有$\dfrac{a_1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{8}{3}$，$\therefore a_1=2$.

示例四

若首项为a，公比为q的等比数列$\{a_n\}$的前n项和总小于这个数列的各项和，则首项a_1，公比q的一组取值可以是$(a_1,q)=$________.

(03年高考·上海卷)

【答案】 $\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$

【解析】 设$S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$，$S=\dfrac{a_1}{1-q}$，其中$q\neq0$，$|q|<1$，依题意有$\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}<\dfrac{a_1}{1-q}$，$\therefore a_1(1-q^n)<a_1$，$\therefore a_1q^n>0$，$\therefore a_1(1-q^n)<a_1$，$\therefore a_1q^n>0$，$\therefore a_1>0$且$0<q<1$或$a_1<0$且$-1<q<0$. 根据题目要求，可以取$a_1=1$，$q=\dfrac{1}{2}$.

示例五

设数列$\{a_n\}$是公比$q>0$的等比数列，S_n是它的前n项和，若$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=7$，则此数列的首项$a_1$的取值范围是________.

(01年高考·上海卷)

【答案】 $0<a_1<7$

【解析】 $\because\lim\limits_{n\to\infty}S_n=7$，$\therefore\{a_n\}$是一个无穷递缩等比数列，

$0<q<1$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{a_1}{1-q}=7$，$\therefore a_1=7(1-q)$，又 $\because 0<q<1$，$\therefore 1>1-q>0$，$\therefore 0<7(1-q)<7$，即 $7>a_1>0$.

示例六

若数列 $\{a_n\}$ 的通项为 $\frac{1}{n(n+1)}(n\in\mathbf{N}^*)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+n^2a_n)=$ ________.

（00 年高考·上海卷）

【答案】 $\frac{3}{2}$

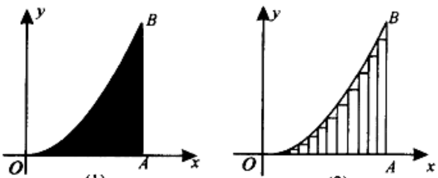
【解析】 $\because a_n=\frac{1}{n(n+1)}$，$\therefore a_1=\frac{1}{2}$，

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}+n^2\cdot\frac{1}{n(n+1)}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right]$$

$$=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}.$$

对应练习

练习 1 抛物线 $y=b\left(\frac{x}{a}\right)^2$，$x$ 轴及直线 $AB:x=a$ 围成



了如图(1)所示的阴影部分，AB 与 x 轴交于 A，把线段 OA 分成 n 等分，作以 $\frac{a}{n}$ 为底的内接矩形如图(2)，阴影部分的面积 S 等于这些内接矩形面积之和当 $n\to\infty$ 时的极限值. 则 $S=$ ________.

练习 2 设无穷等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项为 s_n，而 $S=\lim\limits_{n\to\infty}s_n$，且 $S=a_n+s_n$，则数列 $\{a_n\}$ 的公比 q 是________.

练习 3 在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=\frac{a_{n-1}}{1+a_{n-1}}$，且已知此数列有极限，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=$ ________.

练习 4 若数列 $\{a_n\}$ 是公比的绝对值小于 1 的无穷等比数列，且 $a_1+a_2+a_3=\frac{7}{8}$，$a_1\cdot a_2\cdot a_3=\frac{1}{64}$，则此数列所有项之和为________.

练习 5 在数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 中，$a_1=2$，且对任意自然数 n，$3a_{n+1}-a_n=0$，b_n 是 a_n 与 a_{n+1} 的等差中项，则 $\{b_n\}$ 的各项和是________.

练习 6 设 $0<a<b$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4b^n}{a^n-b^n}=$ ________.

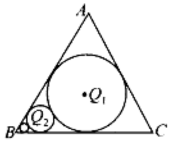
练习 7 已知 $a_n=\begin{cases}2^n-1 & (n\text{ 为奇数})\\ 2^n & (n\text{ 为偶数})\end{cases}$，则数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=$ ______.

练习 8 已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 都是公差不为 0 的等差数列，且 $\frac{a_n}{b_n}=2$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{nb_n}=$ ______.

高考样板题示例(三类)

示例一

如图所示，在边长为 l 的等边 $\triangle ABC$ 中，圆 O_1 为 $\triangle ABC$ 的内切圆，圆 O_2 与圆 O_1 外切，且与 AB、BC 相切，…，圆 O_{n+1} 与圆 O_n 外切，且与 AB、BC 相切，如此无限继续下去，记圆 O_n 的面积为 a_n，$(a\in\mathbf{N})$.



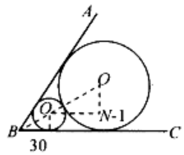
(1) 证明 $\{a_n\}$ 是等比数列

(2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$ 的值.

（03 年春季高考·北京卷）

【答案】 (1) 见解析 (2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=\frac{3\pi l^2}{32}$

【解析】 (1) 记 r_n 为圆 O_n 的半径，



则 $r_1=\frac{l}{2}\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{6}l$.

$\frac{r_{n-1}-r_n}{r_{n-1}+r_n}=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$，

所以 $r_n=\frac{1}{3}r_{n-1}(n\geqslant 2)$.

于是 $a_1=\pi r_1^2=\frac{\pi l^2}{12}$，$\frac{a^n}{a_{n-1}}=\left(\frac{r_n}{r_{n-1}}\right)^2=\frac{1}{9}$，故 $\{a_n\}$ 成等比数列.

(2) 因为 $a_n=\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}a_1(n\in\mathbf{N})$，

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=\frac{a_1}{1-\frac{1}{9}}=\frac{3\pi l^2}{32}$.

本题主要考查 $|q|<1$ 的无穷等比数列前 n 项和的极限公式的应用.

示例二

已知 $a>0$，数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=a$，$a_{n+1}=a+\frac{1}{a_n}$，$n=1,2,\cdots$

(1) 已知数列 $\{a_n\}$ 极限存在且大于零，求 $A=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$（将 A 用 a 表示）

(2) 设 $b_n=a_n-A$，$n=1,2,\cdots$，证明：$b_{n+1}=-\frac{b_n}{A(b_n+A)}$；

(3) 若 $|b_n|\leqslant\frac{1}{2^n}$，对 $n=1,2,\cdots$ 都成立，求 a 的取值范围.

（04 年高考·湖北卷(理)）

【答案】 (1)$A=\frac{a+\sqrt{A^2+4}}{2}$ (2) 见解析 (3)a 的取值范围为 $\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$.

【解析】 (1) 由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在，且 $A=\lim\limits_{n\to\infty}a_n(A>0)$，对 $a_{n+1}=a+\frac{1}{a_n}$ 两边取极限得：$A=a+\frac{1}{A}$，解得 $A=\frac{a\pm\sqrt{A^2+4}}{2}$，

又 $A>0$，$\therefore A=\dfrac{a+\sqrt{A^2+4}}{2}$

(2) 由 $a_n-b_n+A_1a_{n+1}=a+\dfrac{1}{a_n}$ 得 $b_{n+1}+A=a+\dfrac{1}{b_n+A}$，

$\therefore b_{n+1}=a-A+\dfrac{1}{b_n+A}=-\dfrac{1}{A}+\dfrac{1}{b_n+A}=-\dfrac{b_n}{A(b_n+A)}$，即 $b_{n+1}=-\dfrac{b_n}{A(b_n+A)}$ 对 $n=1,2,\cdots$ 都成立.

(3) 令 $|b_1|\leqslant\dfrac{1}{2}$，得 $\left|a-\dfrac{1}{2}(a+\sqrt{A^2+4})\right|\leqslant\dfrac{1}{2}$，

$\therefore\left|\dfrac{1}{2}(\sqrt{A^2+4}-a)\right|\leqslant\dfrac{1}{2}$，$\therefore\sqrt{A^2+4}-a\leqslant1$，解得 $a\leqslant\dfrac{3}{2}$. 现证明当 $a\geqslant\dfrac{3}{2}$ 时，$|b_n|\leqslant\dfrac{1}{2}$，对 $n=1,2,\cdots$ 都成立. (i) 当 $n=1$ 时结论成立(已验证) (ii) 假设当 $n=k(k\geqslant1)$ 时结论成立，即 $|b_k|\leqslant\dfrac{1}{2^k}$，那么 $|b_{k+1}|=\dfrac{|b_k|}{|A(b_k+A)|}\leqslant\dfrac{1}{|A(b_k+A)|}\times\dfrac{1}{2^k}$，故只须证明 $\dfrac{1}{A|b_k+A|}\leqslant\dfrac{1}{2}$，即证 $A|b_k+A|\geqslant2$ 对 $a\geqslant\dfrac{3}{2}$ 成立. 由于 $A=\dfrac{a+\sqrt{A^2+4}}{2}=\dfrac{2}{\sqrt{A^2+4}-a}$，而当 $a\geqslant\dfrac{3}{2}$ 时，$\sqrt{A^2+4}-a\leqslant1$，$\therefore A\geqslant2$，

$\therefore|b_k+A|\geqslant A-|b_n|\geqslant2-\dfrac{1}{2^k}\geqslant1$，即 $A|b_k+A|\geqslant2$，故当 $a\geqslant\dfrac{3}{2}$ 时，$|b_{k+1}|\leqslant\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2^k}=\dfrac{1}{2^{k+1}}$，即 $n=k+1$ 时结论成立，根据(i)(ii)，可知结论对一切正整数都成立. 故 $|b_n|\leqslant\dfrac{1}{2^n}$，对 $n=1,2,\cdots$ 都成立的 a 的取值范围为 $\left[\dfrac{3}{2},+\infty\right)$.

本题主要考查数列、极限的概念和数学归纳法，考查灵活运用数学知识分析问题和解决问题的能力.

示例三

已知函数 $f(x)=e^{-x}(\cos x+\sin x)$，将满足 $f'(x)=0$ 的所有正数 x 从小到大排成数列 $\{x_n\}$.

(1) 证明数列 $\{f(x_n)\}$ 为等比数列

(2) 记 S_n 是数列 $\{x_nf(x_n)\}$ 的前几项和，

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_1+S_2+\cdots+S_n}{n}$

(04 年高考 · 全国卷 Ⅳ)

【答案】 (1) 见解析 (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_1+S_2+\cdots S_n}{n}=\dfrac{-\pi e^{\pi}}{(e^{\pi}+1)^2}$

【解析】 (1) 证明：

$f'(x)=-e^{-x}(\cos x+\sin x)+e^{-x}(-\sin x+\cos x)$
$=-2e^{-x}\sin x$.

由 $f'(x)=0$，得 $-2e^{-x}\sin x=0$

解出 $x=n\pi$，n 为整数，从而 $x_n=n\pi$，$n=1,2,3\cdots$

$f(x_n)=(-1)^ne^{-n\pi}$.

$\dfrac{f(x_{n+1})}{f(x_n)}=-e^{-\pi}$.

所以数列 $\{f(x_n)\}$ 是公比为 $q=-e^{-\pi}$ 的等比数列，且首项 $f(x_1)=q$.

(2) 解：$S_n=x_1f(x_1)+x_2f(x_2)+\cdots x_nf(x_n)$
$=\pi q(1+2q+\cdots nq^{n-1})$，

$qS_n=\pi q(q+2q^2+\cdots nq^n)$

$S_n-qS_n=\pi q(1+q+\cdots+q^{n-1}-nq^n)$
$=\pi q\left(\dfrac{1-q^n}{1-q}-nq^n\right)$

从而 $S_n=\dfrac{\pi q}{1-q}\left(\dfrac{1-q^n}{1-q}-nq^n\right)\dfrac{S_1+S_2+\cdots S_n}{n}$

$$=\frac{\pi q}{(1-q)^2}-\frac{\pi q^2}{n(1-q)^2}(1+q+\cdots q^{n+1})-\frac{\pi q^2}{n(1-q)}(1+2q+\cdots+nq^{n-1})$$

$$=\frac{\pi q}{(1-q)^2}-\frac{\pi q^2}{n(1-q)^2}\cdot\frac{1-q^n}{1-q}-\frac{\pi q^2}{n(1-q)^2}\left(\frac{1-q^2}{1-q}-nq^n\right)$$

$$=\frac{\pi q}{(1-q)^2}-\frac{2\pi q^2}{n(1-q)^3}(1-q^n)+\frac{\pi q^{n+2}}{(1-q)^2}$$

因为 $|q|=e^{-\pi}<1$，$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$，所以

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_1+S_2+\cdots S_n}{n}=\dfrac{\pi q}{(1-q)^2}=\dfrac{-\pi e^{\pi}}{(e^{\pi}+1)^2}$

【点评】 本题主要考查函数的导数，三角函数的性质，等差数列与等比数列的概念和性质，以及综合运用的能力.

示例四

已知定义在 R 上的函数 $f(x)$ 和数列 $\{a_n\}$ 满足下列条件：

$a_1=a$，$a_n=f(a_{n-1})(n=2,3,4\cdots)$，$a_2\neq a_1$，$f(a_n)-f(a_{n-1})=k(a_n-a_{n-1})(n=2,3,4\cdots)$，其中 a 为常数，k 为非零常数.

(Ⅰ) 令 $b_n=a_{n+1}-a_n(n\in\mathbf{N}^*)$，证明数列 $\{b_n\}$ 是等比数列；

(Ⅱ) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式；

(Ⅲ) 当 $|k|<1$ 时，求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

(04 年高考 · 天津卷(理))

【答案】 (Ⅰ) 见解析 (Ⅱ) $a_n=a+(n-1)(f(a)-a)$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ (Ⅲ) 当 $|k|<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a+\dfrac{f(a)-a}{1-k}$

【解析】 (Ⅰ) 由 $b_1=a_2-a_1\neq0$，可得 $b_2=a_3-a_2=f(a_2)-f(a_1)=k(a_2-a_1)\neq0$ 由数学归纳法可证 $b_n=a_{n+1}-a_n\neq0(n\in\mathbf{N}^*)$.

由题设条件，当 $n\geqslant2$ 时 $\dfrac{b_n}{b_{n-1}}=\dfrac{a_{n+1}-a_n}{a_n-a_{n-1}}=\dfrac{f(a_n)-f(a_{n-1})}{a_n-a_{n-1}}=\dfrac{k(a_n-a_{n-1})}{a_n-a_{n-1}}=k$.

因此，数列 $\{b_n\}$ 是一个以 k 为公比的等比数列.

(Ⅱ) 由(Ⅰ)知，$b_n=k^{n-1}b_1=k^{n-1}(a_2-a_1)(n\in\mathbf{N}^*)$

当 $k\neq1$ 时，$b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}=(a_2-a_1)\dfrac{1-k^{n-1}}{1-k}(n\geqslant2)$

当 $k=1$ 时，$b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}=(n-1)(a_2-a_1)(n\geqslant2)$

而 $b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}=(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})=a_n-a_1(n\geqslant2)$.

所以，当 $k\neq1$ 时，$a_n-a_1=(a_2-a_1)\dfrac{1-k^{n-1}}{1-k}(n\geqslant2)$. 上