普通高中新课程数学教学研究与资源丛书

算法初步

严士健 主编
史炳星 王桂霞 编著

C++

FORTRAN

MATLAB

PASCAL

BASIC

高等教育出版社

普通高中新课程数学教学研究与资源丛书

算法初步

严士健　主编
史炳星　王桂霞　编著

高等教育出版社

内容提要

本书是配合《普通高中数学课程标准（实验）》的实施而编写的，目的是为实施新课程的教师提供与课程标准的理念、处理方法相匹配的数学教学资源，同时向教师提供专业知识、方法的补充资源，进而帮助教师掌握课程标准中的相关内容，更好地理解和处理新课程的讲授。

本书内容包括：算法概述、算法设计及算法的基本结构、算法设计和程序语言、算法在高中的进一步应用、相关教学资源搜索等。书后还附有 MATLAB 软件和 QB 软件简介。

本书既可作为教师的培训用书，也可作为教师日常教学的参考书，还可作为教师自我开发教学资源，提高自己的数学专业水平的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

算法初步/史炳星，王桂霞编著. —北京：高等教育出版社，2005.11
（普通高中新课程数学教学研究与资源丛书/严士健主编）
ISBN 7-04-018181-9

Ⅰ.算… Ⅱ.①史…②王… Ⅲ.计算机课-高中-教学参考资料 Ⅳ.G633.673

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 122330 号

策划编辑 张忠月 **责任编辑** 李 陶 **封面设计** 张申申
责任绘图 吴文信 **版式设计** 王艳红 **责任校对** 金 辉
责任印制 宋克学

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	北京蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京晨光印刷厂		
开　　本	787×960 1/16	**版　　次**	2005年11月第1版
印　　张	14	**印　　次**	2005年11月第1次印刷
字　　数	250 000	**定　　价**	16.50元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号　18181-00

郑重声明

总　序

《普通高中数学课程标准（实验）》（以下简称《标准》）颁布以后，不少教师反映，其中有些内容在以往高中课程中没有，或者处理方法有所不同。希望得到一些帮助，以更好地实施标准。为了满足这种要求，高等教育出版社组织编写、出版了这套丛书。丛书按照内容的不同改变，分册进行讨论。首先就《标准》设置的"算法"、"统计与概率"、"向量"、"导数及其应用"、"推理与证明"5部分内容编写了《算法初步》、《统计与概率》、《向量及其应用》、《微积分》和《推理与证明》各册。

各册的框架依作者的写作风格和内容的情况不尽相同，但总的想法是一方面针对具体的内容，就标准的要求进行论述、分析并提出一些建议，以求有助于老师们实施标准的有关部分；另一方面，对相关的知识和方法进行一些适当的拓展和提升，列举一些进一步的教学资源，为老师们进一步学习和研究相关问题、提高数学修养提供资料和帮助。

《标准》所涉及内容的增加和改变，大致上是考虑到数学及其应用在当代的发展及趋势，作为现代化社会成员所需要理解或掌握的一些数学内容，或者是需要感受的一些数学观念。这些内容和观念，对高中学生的未来发展有重要的意义。《标准》同时要求有关内容的处理要适合高中学生的认知水平；着重数学知识和方法，但要反映与相应课外内容的联系。我们努力在各册中尽量反映这种意图，为此根据我参与制定《标准》的认识，在下面对有关问题做一些解释，可能有助于老师们和有关读者理解《标准》的有关部分和本丛书各册的写作意图。

计算机技术是20世纪后期以来，对技术、社会生产和生活以及科学研究最有影响的技术之一，数学在它的发明和开发中起着关键的作用。但是在我国的社会舆论和实践中，人们似乎忽略了这一重要联系，以至影响了它在社会发展——特别是高新技术的开发——中发挥更大的作用。所以如何使广大社会成员了解、重视并且初步掌握这一联系，应该是数学教育的重要任务之一。我们体会这是《标准》设置算法的基本理由。因此它所要求的算法教学，不像计算机专业课程那样，单纯地介绍计算机所需要的算法、语言及其程序，而是首先帮助同学通过实例将他（她）们熟悉的数学中的算法转化为用计算机语言表述的算法，从而理解计算机算法中的一些概念、基本结构、计算机流程框图和伪代码的背景，有条件的学校可以上机做初步的计算实习。然后在后续的教学中，在凡是有

可能的地方，结合并应用算法进行数学教学。这样可以帮助同学了解计算机的算法与数学中算法的渊源，理解计算机技术与数学的关系；感受数学在计算机技术中的作用；逐步学会应用计算机帮助解决数学的计算问题；同时也有助于加强同学的逻辑严密性。《算法初步》的前半部分就是按照这种想法提供了比较丰富的实例供老师们参考，阐述了算法的数学背景，提供了一些教学建议；后半部分在这个基础上，结合前面的论述，对计算机中的算法做了比较全面的讨论，并介绍了一些进一步的教学资源。

统计与概率是20世纪以来蓬勃发展的两门数学学科。统计是一门具有新特色的独立应用数学，它从日常生活到高新技术领域，都有广泛的应用。虽然它以概率论作为数学基础，但是它与数学的其他分支有本质的不同，处理问题的出发点是归纳的。概率论则是描绘和研究随机(偶然)现象的学科，在中学阶段，它能够帮助学生拓宽数学视野，知道其具有广泛的应用前景，也有助于深入解释统计的方法。由于它们具有广泛的应用性和具有处理随机现象的特性，早在20世纪七八十年代，国际上已经普遍在中学引进了统计与概率的教学内容。我国几经周折，近几年在高中教学中也引入了这部分内容，这当然是一个可喜的进步。但是人们习惯于大学中的处理方法，将概率作为统计的数学基础，而更多地注意数学的系统性，忽略统计的直接应用、直观本质等教学原则。这样既不利于学生掌握统计与概率的本质及其应用的思想和方法，又大大增加了学生的学习难度。所以《标准》强调统计要帮助学生通过案例体会从合理收集、整理数据到分析数据、提取信息、做出决策的全过程，学会应用一些实际可用的方法。对于统计中的概念(如“总体”、“样本”等)应结合实例做说明，而不追求数学的定义。概率教学则是要帮助同学通过实例认识随机现象和理解概率的意义，适当地对统计的结果做一些概率解释。对于统计与概率的教学都要注意帮助同学体会统计、概率处理随机性问题与其他数学课程内容处理确定性问题的差别。《统计与概率》一书一方面通过实例努力体现这些，另一方面，阐述这些直观性处理与从数学角度讲述统计与概率之间的联系，希望老师掌握直观性处理的分寸——实际应用性和科学性兼备。最后提供一些进一步的教学资源。

向量在高中引入与否，在新大纲的制定中已经有过多次讨论。不少人更多地从向量处理立体几何问题是否比综合法更简单出发，来反对在高中引入向量。的确，用向量处理立体几何问题是否比综合法简单随问题而异，不能一概而论。但是向量不仅仅能解决立体几何问题，它还是一个重要的数学工具。我们知道解析几何是使用代数方法来研究几何的一种有效方法，它是通过坐标来沟通几何与代数的。向量有类似之处，它既是几何的，又是代数的，是沟通几何与代数的另一有效桥梁。而且它有显著的物理背景，近代几何和理论物理的研究进展表明，它在某些方面有自己的重要而独到的作用。因此在处理高中几何问题的

有关部分时，引进向量，既可以在初等几何方面多一个工具，更重要的是通过处理初等几何，初步掌握向量这一工具，为学生以后的发展作了铺垫。《向量及其应用》这一分册前半部分论述了向量的发展历史、教育价值和基本知识，通过实例说明向量在几何、不等式及物理学中的应用，对教学提出一些建议，为老师实施《标准》的有关部分提供参考。最后对向量在数学中的进一步应用作了介绍，提供了一些教学资源，帮助老师理解向量在数学中的作用，也为有关的数学文化教学内容提供资料。

导数是刻画函数变化的快慢程度的一个一般概念，因此它和函数一样，所反映的原型在客观世界中是无处不在的。高中的学生，不论他(她)将来是否进入高等学校，都应该学习导数及其应用的内容，并应用它考察和理解实际现象中的变化。必要时，可以求助于数学和其他自然科学去解决问题。这是作为现代社会成员的一项科学文化素质要求，应该是高中阶段学习导数及其应用的首要目标。为了在很少的课时内达到上述要求，《标准》强调通过丰富实例由平均变化率过渡到瞬时变化率的途径(从极限的观点看，实际上是直接从函数的差商的极限开始讨论)，来理解导数概念的实质、客观背景和应用的广泛性以及导数的初步计算。这样做可以避免传统的微积分由极限讲起的数学教学过程。从极限讲起需要较多的课时才能使学生理解，以致以往在中学微积分的教学设置中，学生既没有充分理解导数和积分及其应用的实质，数学上也不能达到掌握微积分初步的要求。大学的高等数学老师认为与其让他们“炒夹生饭”，还不如在中学不学微积分。现在的处理能够兼顾两者，即既可以帮助学生理解导数及其应用的实质，又将系统讲授微积分的任务留给大学阶段，而且前者有助于后者的系统学习。在《微积分》中，前一部分先沿着《标准》的思路通过相当丰富的实例进行分析，提出一些有关教学的建议；然后在后一部分再引进极限概念加以延伸，说明引进极限概念的必要性并不在导数概念的引入，而在于对导数的进一步研究。至于极限的其他应用，例如级数等，本册则不可能涉及。本册还简单介绍了微积分的发展史以及在微积分发展中做出重要贡献的数学家的小传，希望有助于老师们了解微积分的历史发展过程及其对文化发展的意义，同时也便于老师们帮助同学了解微积分对推动社会进步的作用。

《推理与证明》是这次高中数学课程新增内容之一。我们体会这部分内容的设置首先在于帮助同学在学习数学十多年以后，对于数学课程中所经历的思考和推理方式做一次梳理和小结。这些思考方式虽然同学们常常使用，但是在多数情况下，运用并不自觉，一旦遇到比较复杂的情况或者是需要运用数学之外的情况，就可能不能发挥推理的作用。数学中经常使用的表达方法是演绎(包括计算)，这是数学给予学生的一种最重要的训练，也是数学在教育中能够处于重要地位的根据之一。但是如何想出这些方法并不是使用演绎的思考方式，而是应

用了直观考察、借助以往的经验类比和归纳等合情推理的方法。不论是合情推理，还是演绎推理方式在学生今后的成长和发展中都是经常用到的。特别是将来打算学习文科的学生，演绎推理方法对他们仍然需要。而社会上对于各种思考方式的区别与联系相对来说比较模糊，因此应明确地认清什么是合情推理、演绎推理，还有什么是“事实证明”等；应用各种思考方式来做出适当的结论，知道一些结论是在什么情况下做出的，因而对可靠性的程度都会有一个适当的判断。其次，通过一些实例，也有助于加强同学们使用推理与论证的训练。我们也不希望将本书写成解题的思考方法手册。考虑到这一部分内容几乎完全是新的，所以本册的写作原则是在可能的条件下多提供一些适合中学生理解程度的例子，或者提示一下哪些例子经过适当简化或变动就可以为中学生所理解，并且说明这些例子对同学理解各种推理的作用。另一方面，考虑到国内还很少有这方面的专门著作，而且这些内容对于老师们进一步理解和学习数学也是重要的。从而我们希望本书是和高中教师一起学习和理解数学思维和各种思考方法；一起讨论如何进行《推理与证明》的教学、进行教学的准备。我们想，对这本书目前不一定需要像其他各书一样，具体地、比较详细地讨论教学建议。

以上概略地介绍了我们对《标准》的相关内容的认识和撰写各册的一些想法。我们也知道进行良好的教学是一门艺术，增进教师的修养是多方面、多途径的。认真地说，我们只是就《标准》新增加的或改变处理的一些内容和老师们进行交流、讨论，向老师们提供一些实例、资料、看法和想法，供老师们参考。我们最大的希望只是我们的写作能够有助于老师们根据实际的教学环境进行创造性的处理，根据自己的条件有效提高，以适应新一轮的教学改革的过程。

丛书各册虽然不同于各专业书籍的写法，但是它们对内容背景的阐述，以及由实例抽象到一般概念和方法的论述过程，对有关专业的读者对专门内容的理解同样有参考价值。因为我认为这种过程是理解专门内容的实质所必需的，而现在很多专门书籍常常忽视这一点。

借丛书出版之际，说了以上一大篇意见，意在有助于使用此书，不全面和不妥当之处肯定会有的，希望大家批评指正。

严士健

2005年5月于北京师范大学

目　录

第一章

概　述

- 什么是算法
- 在高中开设“算法初步”课的意义
- 高中算法初步的内容结构和教学建议

2004 年 4 月，中华人民共和国教育部公布了《普通高中数学课程标准(实验稿)》(以下简称《标准》)，在必修课程数学 3 中，新增加了“算法初步”这一课程. 正如《标准》所指出，算法是数学及其应用的重要的组成部分，是计算机科学的重要基础. 随着现代信息技术飞速发展，算法在科学技术、社会发展中发挥着越来越大的作用，并日益融入社会生活的许多方面，算法思想已经成为现代人应具备的一种数学素养. 因此在普通高中增设“算法初步”的内容是十分重要的，“算法初步”及其他新课程的设置，体现了我国高中数学新课程内容的与时俱进，体现了我国高中数学新课程对新科技发展的关注.

§1 什么是算法

事实上，算法是大家都很熟悉的概念，因为我们从小学就开始接触算法. 例如做四则运算要先乘除后加减，从里往外脱括弧，竖式笔算等等都是算法. 至于乘法口诀、珠算口诀更是算法的具体体现. 中学阶段的求一元二次方程的根、二元一次方程组的解等一般方法，也都是算法.

随着学习的逐步深入，在解决更复杂一些的问题中，我们经常会遇到需要寻找一般性方法的情况，如将一个有限集合中的所有整数按从小到大的顺序进行排列，或列出一个集合的所有子集，或求经过平面上 n 个点(每点只经过一次)的最短路径等. 大家都知道，在解决问题的时候，我们需要建立数学模型，但这只是解决问题的第一步，我们还需要一个“一步一步地求出模型的解的步骤”，跟随这些步骤，就可以引导到我们所期望得到的解，这些步骤具有一般性. 事实上，这一系列的步骤就是一个算法.

一般地，在完成某一项任务时，我们需要确定完成这一项任务的步骤，以及每一步骤的具体内容. 算法就是一个“一步一步应该做什么的指令的集合，这些指令能够被机械地、在有限的过程中完成，从而得到期望的结果”.

按照不列颠大百科全书的说法，“算法就是能够在有限步产生问题结果的、一系列的数学步骤.”

总之，算法是一个可以一步一步执行的程序，算法的目的是提供满足一定条件的问题的解. 但是这个程序必须是确定的、有效的和有限的.

中学生学习一些算法的知识是十分必要的，它的重要性不仅表现在算法是数学及其应用的重要组成部分，还表现在计算机科学即是算法的科学，算法的研究是计算机科学的基础、是计算科学的核心. 人们在惊叹计算机解决问题的神奇功能的同时，往往并不知道计算机赖以解决问题的程序的基础恰恰是算法. 正是由于算法，计算机才表现出非凡的智慧. “如果没有算法可以解决这个问题，那么问题是不能被机器所解决的. 这就是说，机器仅仅可以解决在算法上可解的

问题.”

随着信息时代的发展，算法已经成为科学的一个新的领域，这个领域正伴随着计算机的发展和程序语言的发展而发展.

利用计算机解决问题，我们需要一个可以“一步一步地执行”的程序，而这个程序的设计，则要依赖于算法、依赖于对算理的理解，下面我们通过几个简单的例题来初步感受一下利用算法解决问题的思路.

【例 1.1】 用尺规作图的方法，确定线段 AB 的一个三等分点.

我们通常这样来解决这个问题：

如图 1－1.

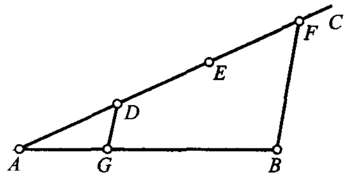

图 1－1

第一步：从线段 AB 的端点 A 出发作射线 AC；

第二步：在射线 AC 上任取一点 D，得线段 AD；

第三步：在射线 AC 上作线段 $DE=AD$；

第四步：在射线 AC 上作线段 $EF=AD$，这时 $AF=3AD$；

第五步：连接 FB；

第六步：过 D 作 FB 的平行线，交线段 AB 于 G.

G 点就是线段 AB 的一个三等分点.

事实上，以上作图的步骤就是确定线段 AB 的一个三等分点的算法，它的每一步都是一个明确且准确的指令，只要按照这些步骤一步一步地顺序执行，就能够完成题目的要求. 虽然题目很简单，但是体现了算法的程序思想，体现了算法和我们通常解决问题的思路之间的联系，也体现了算法的一个基本结构，即一步一步地按顺序执行的“顺序结构”.

通过这一例题我们也看到，对算法的描述就可以用我们通常的语言进行描述.

在实际生活中，我们有时需要找出一组数当中的最大数或最小数. 比如一次几千人参加的大型考试中的最高分数或一次群众性马拉松比赛中的最短时间等. 这个问题比例 1∶1 中的问题要稍微复杂一些，但是其中所包括的解决问题的算法很具有典型性.

【例 1.2】 试找出一个有限数列 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 中的最大数.

对于一个给出具体数字的、元素个数不算太多的有限集合，人们可以很快地确定其中的最大数是什么，就像我们很快地就能确定全班成绩中的最高分一样. 回想一下我们是怎样做的呢？我们实际上是在各个数字之间进行比较，同时记住已经比较过的数字当中的最大数，并继续检查后面的数，一旦发现比我们记忆中更大的数，我们马上就用心记住这个新的“最大数”，并忘掉原来的“最大数”，

最后我们得到了这个集合中的最大数.

将这个想法用到一般性的有限集合$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$中,自然的想法就是:从第一数a_1开始,与后面的$n-1$个数逐个比较,每次比较后,留下较大的一个,那么,将所有的数比较完毕后留下的数就是最大的数.

问题是,“每次的比较”显然是一个反复循环的过程,如何使这样一个“反复循环的过程”变得简单和统一?这使我们想到“捡豆子”的办法,即如果将数列中的每一个数字看成是一颗豆子的话,首先将第一颗豆子(数列中的第一个数字)放入口袋中.从第二颗豆子开始检查,直到最后一颗豆子.如果正在检查的豆子比口袋中的还大,则将它捡起放入口袋中,同时丢掉原先的豆子.这样,口袋中留下的最后一颗豆子就是所有的豆子中最大的.这样使得“每次的比较”都是与口袋中的豆子做比较.

我们把这一想法条理化:

第一步:首先暂时把数列中的第一个数a_1设为数列中的最大数,因为这时还没有进行比较,还没有出现比a_1更大的数.

第二步:将a_1与a_2进行比较,如果$a_2>a_1$,则用a_2代替a_1,成为新的暂时最大数.如果$a_2\leqslant a_1$,则将a_1与下一个数a_3进行比较,如果$a_3>a_1$,则用a_3代替a_1,成为新的暂时最大数.如果$a_3\leqslant a_1$,则继续将a_1与下一个数a_4进行比较.在这个过程中,“暂时最大数”a_1始终是所比较过的数中的最大者.

第三步:重复上面的过程,直到a_1和最后一个数a_n做比较.

第四步:此时,“暂时最大数”a_1就是该数列中的真正最大数,整个过程停止.

我们看到,在整个寻找最大数的过程中,“最大数”的值在不断地变化,首先是a_1,经过和后面数的比较和替换,直到最后一次才把真正的最大数确定下来,也就是说a_1是一个变量.不仅如此,在寻找最大数的过程中,我们要反复地进行两数之间的比较,要把数列中的数全部考察一遍,每次做几乎“完全相同”的事,这是一个循环的过程,也就是说,算法中要有某种循环的结构.由于a_1是动态的,这使得每次的循环或反复变得形式统一.在这个过程中,我们还需要进行比较判断,通过比较判断,选择出新的“最大数”,并决定寻找最大数的过程是否停止,因此这里算法有两个走向.这样,解决这个问题的算法中必然要包括某种选择的结构.“顺序结构、循环结构、选择结构”都是算法的基本结构,我们要在后面的章节中详细地介绍这些概念,这些基本的结构和变量的设置是解决问题的需要.

同一个问题可以有不同的解题思路、不同的算法,下面看一下我们十分熟悉的“求两个数的最大公约数”的不同算法,从中我们可以初步地感受到算法的选择性以及算法的不同算理和不同的表示方法.

【例 1.3】 求 54 和 78 的最大公约数.

我们有很多方法可以求两个数的最大公约数.常见的有:

算法 1(辗转相除法,也叫欧几里得算法)

首先做

$$78\div54,\text{商 }1\text{、得余数 }24;$$

然后做

$$54\div24,\text{商 }2\text{、得余数 }6;$$

再做

$$24\div6,\text{商 }4\text{、得余数 }0.$$

此时可判断:6 是 54 和 78 的最大公约数.

这是因为最大公约数有一个重要的性质,即对任意的整数 x,$(a,b)=(a,b+ax)$,这一性质的证明并不难.根据这一性质,从上面的最后一式向上推,有

$$6=(24,6)=(24,6+24\times2)=(24,54)=(24+54,54)=(78,54)$$

这就是求两数最大公约数的辗转相除法.

下面将问题一般化.

设 m 和 n 是两个不全为 0 的非负整数,求 m 和 n 的最大公约数.

在这个方法中,由于要做辗转相除,因此要用到"循环结构".同样,要使"循环"的过程变得形式简单、统一,我们需要将 m 和 n 设置为"变量",在这里我们让 n 永远是除数、m 永远是被除数,这样就使得每次的除法运算总是在 m 和 n 之间进行.同时还由于需要根据所得到的余数是否为 0,决定程序的走向,也就是继续做除法呢,还是结束,因此,"选择结构"也是需要的.

依据上面的想法,我们把辗转相除法算法化.

第一步:判断 n 是否为 0,如果 $n=0$,则 m 即为两数的最大公约数,如果 $n\neq 0$,进行第二步;

第二步:用 n 去除 m,所得的余数设为 r;

这时需要判断 r 是否为 0,然后决定是继续做除法,还是结束程序.由于这个过程完全是上面两个步骤的重复,所以我们用 r 和 n 的值分别替换 n 和 m 的值,这样就又可以回到问题开始时的情况,即

第三步:用 n 的值替换 m,用 r 的值替换 n,回到第一步.

利用框图,辗转相除的算法可以表示如图 1-2 所示:

从上面的算法 1 我们可以看到,同一个算法可以采用不同的表示方式,比如用语言叙述或用程序框图进行表示等.但是,不论用什么样的方法进行表示,都清楚地表明 m、n 在解决问题的过程中不断地进行着变化,由原始题目中所给的两数,变化为每一次除法中的除数与被除数,并且逐渐变为较小的两数,直到最后其中的一数变为零.这样可以使得在辗转相除的过程中,始终是在做"用 n 去

除 m”，但是 m、n 的值是在变化的，也就是说，在算法的设计中，需要将 m、n 设置为变量，这种设置体现了用算法的思想解决问题的思路.

另外，在求得最大公约数的过程中，每做一次除法以后，都应该考察 n 的新值（即余数）是否为零，当 n 为零时，则 m 就是最大公约数. 当 n 不为零时，则继续做“用 n 去除 m”，即有两种选择或两种走向，这就需要“选择结构”或“分支结构”，我们将在下一章的内容中进行仔细地分析.

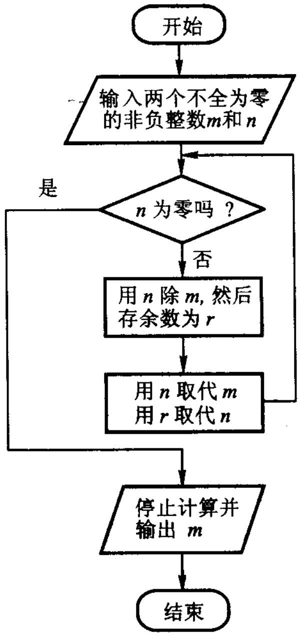

图 1－2

大家知道，辗转相除的方法是一个需要反复进行判断选择、反复做带余数除法运算的过程，这种“反复”做起来是比较烦琐的，用普通的语言叙述起来也是比较累赘的. 在算法设计中，如何既能反映辗转相除这一计算方法的本质，又能避免冗长的叙述？除了利用设置“变量”的想法之外，还要用到算法设计中的“循环结构”，利用“循环结构”，可以简单明了地表达出我们解决问题的过程. 但是我们知道，这种“循环”并不是通常意义下的简单重复，而是建立在“选择”基础之上的、具体数值有变化的重复.

与“辗转相除法”相类似的算法还有“辗转相减法”，“辗转相减法”在我国古代数学中叫做“更相减损术”，详细情况及算法表示请见第五章.

算法 2（连续减 1 的方法）

注意，在这个算法中 m 和 n 都不可以是 0. 让我们先以“求 12 和 16 的最大公约数”为例说明这种方法.

首先，用 12 去除 16，余数不为 0. 我们的目的是找“12 和 16 的最大公约数”，既然 12 不能整除 16，将 12 减小 1 行不行？让我们试一下. 当减小到 11，10，9 时，仍都不能整除 16，但当减小到 8 时，8 能够整除 16，即 8 是 16 的约数. 那么 8 是不是 12 的约数呢？我们试一下，结果 8 不能整除 12，8 不是 12 的约数.

怎么办？我们将 8 减小 1，首先减小到 7. 这时还要先看 7 是不是 16 的约数，结果 7 不是 16 的约数. 重复上面的方法，将 7 减小 1，直到 4 才可以整除 16，4 是 16 的约数. 那么 4 是不是 12 的约数呢？结果 4 能够整除 12，4 也是 12 的约数.

这说明 4 是 12 和 16 的公约数，且是最大公约数，问题得到解决.

事实上,这里的想法也很简单、朴素,即首先看两个数中较小的数 12 是不是公约数,如果是,问题得到解决.如果不是,就将 12 减小,总会在减小的过程中找到 16 的约数,在本例中是 8.找到 16 的约数 8 后,再反过来看该约数 8 是否是 12 的约数,如果是,问题得到解决.如果不是,继续将该约数减小,寻找 16 的下一个小一些的约数.这样反复进行,最后总可以找到 16 和 12 的最大公约数.

将问题一般化,可以这样考虑:

第一步:让 t 是 m 和 n 中较小的一个数,即把 m 和 n 中较小的一个数的值赋予 t;

第二步:用 t 去除 m,如果余数为 0,进行第三步,否则进行第四步;

第三步:用 t 去除 n,如果余数为 0,给出作为结果的 t 的值,并且停止,否则进行第四步;

第四步:把 t 的值减少 1,然后回到第二步.

我们看到,在这个方法中 t 是变量,初始值是 m 和 n 中较小的一个数,终止值是 m 和 n 的最大公约数.

我们还看到,在求最大公约数之前,首先要判断 m 和 n 谁大谁小,将 t 令为其中较小的一个,作为除数.这是第一次选择.第二次选择出现在"如果 t 能够整除 m,则用 t 去除 n;否则将 t 的值减少 1,仍然用 t 去除 m".在第二次选择的基础上,还有第三次选择,即"如果 t 能够整除 n,t 就已经是 m 和 n 的最大公约数.否则还需继续将 t 的值减少 1,并用这个新的 t 值去试除 m".这种不断做出选择的需要,体现在算法中就是"选择结构".

同时在每次做出选择后,不可避免地要做相同的事情,即"用 t 去除 m 或 n",这决定了算法中要用到"循环结构",当然这种"循环"不是完全不变的机械重复,而是在新的意义下的动态的"循环".

利用框图,上面的想法可以用图 1-3 表示为:

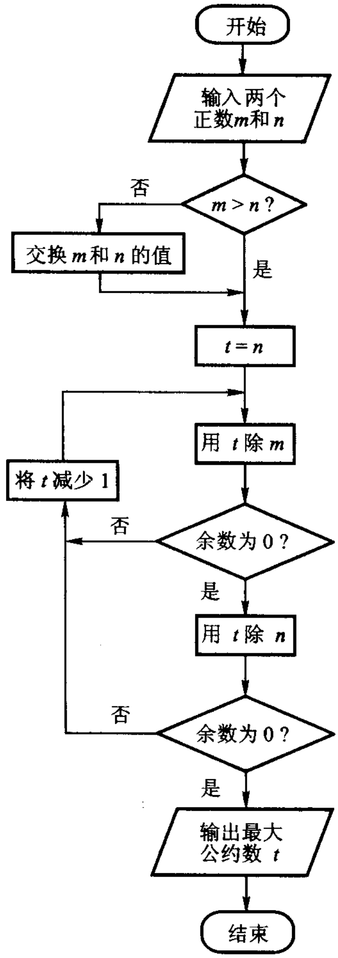

图 1-3

算法 3(小学生的通常算法)

第一步：找出 m 的所有质因数；

第二步：找出 n 的所有质因数；

第三步：找出 m 和 n 的公共质因数；

第四步：将 m 和 n 的所有公共质因数相乘，并且注意如果公共质因数 p 在 m 的标准质因数分解式中出现 α_m 次、在 n 的标准质因数分解式中出现 α_n 次，则在做公共质因数相乘时，将 p 重复 $\min\{\alpha_m, \alpha_n\}$ 次，所得乘积就是 m 和 n 的最大公约数.

这种算法根据的是算术基本定理，即

设 $a>1$，那么，必有 $a=p_1\ p_2\cdots p_r$，其中 $p_j(1\leqslant j\leqslant r)$ 是质数，并且在不计次序的意义下，a 的表达式是唯一的.

如果将 a 的表达式中相同的质因数合并，即得，$a=p_1^{\alpha_1}\ p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$，$p_1<p_2<\cdots<p_s$，这个表达式通常叫做 a 的标准质因数分解式.

根据算术基本定理，两个数 m 和 n 的最大公约数是这样的：首先把 m 和 n 表示为标准质因数分解式，然后把它们所有的公共质因数相乘，而每个质因数的次数则取 m 和 n 的表达式中该质因数中较小的那一个指数，这个乘积就是 m 和 n 的最大公约数.

实际上，回想起我们在小学阶段求两数的最大公约数时，就是运用的这个方法，那时老师给我们的 m 和 n 都不是太大的数.

从数学的角度看，这其中的道理并不难理解，但是把这个想法转化为一个可操作的、可以“一步一步地”由计算机执行的算法，如，怎样确定 m 或 n 的质因数，这件事情是非常困难的. 事实上，目前从数学的角度还没有找到能够把任一个大数分解为质因数的一般性的方法.

从上面不同的方法来看，它们的思路不同、算理也不同. 但是我们看到其中有一些主要的成分还是相同的，如都需要设置变量，都需要用到“循环结构”和“选择结构”等，这些都是算法的基本组成部分. 但是不同的算法所需要的时间和所占据的计算机内存空间会有很大的不同，也就是说不同的算法会有不同的效率，在更加深入的学习当中，我们会对这个问题进行研究.

一般地说，算法具有下面的一些特点.

1. 有输入值(Input)　输入值通常来自某一个特定的集合. 如上面例题中需要找出其中最大数的一个有限数列，或需要求出最大公约数的两数 m 和 n，它们都是算法的输入值. 但要注意算法对输入值的限制. 如在用“连续减 1 的算法求 m 和 n 的最大公约数”中，m、n 都不可以取 0，如果有一个字母取 0，则导致用 0 做除数；

2. 有输出值(Output)　算法把输入值转化为输出值，输出值是问题的解. 如上面例题中“有限数列中的最大数”或“两数的最大公约数”等. 输出值是我们