SHUXUE
JIANMO

数学建模

（本科册）

湖北省大学生数学建模竞赛专家组
组编

华中科技大学出版社
http://www.hustp.com

数学建模

（本科册）

湖北省大学生数学建模竞赛专家组组编

华中科技大学出版社

内 容 简 介

数学建模是研究数学的思想和方法在各个领域的应用的课程，本书介绍在数学建模中常用到的一些必要的数学知识，穿插大量的实际案例，阐述对各种实际问题进行建模的主要方法和基本规律. 本书内容丰富，选材合理，内容编排重思想、重方法、重应用、重能力培养. 阅读本书有助于增进分析问题和用数学解决问题的能力，领会对数学模型的设计、创新、分析及研究的基本方法和要求.

全书包括微分方程和差分方程模型，优化模型和离散模型，以及随机和统计模型三个部分共八章，读者可选读其中任一部分而不会影响对内容的理解.

本书可用做高等学校理工科学生数学建模课的教材和数学建模竞赛的培训教材，亦可供高等学校教师、研究生、数学建模爱好者参考.

序

电子计算机问世以来的60年中，科学技术发展突飞猛进.作为基础学科的数学，在科学技术和社会进步中发挥着越来越重要的作用.数学向物理、化学、生物、工程技术、医药、经济、金融及管理等领域渗透，使许多方向的研究工作出现了根本变化，使不少行业的生产力迅猛提高，使人们的社会生活产生了巨大的改变.

数学与计算机技术的结合，形成了威力巨大的一种“高技术”.人们仔细地观察周围的事物，发现越来越多的问题可以用数学方法去解决.对现实世界的问题进行分析，抽象成一个数学结构，即归纳为一个数学问题，也就是建立数学模型.有了数学模型，利用数学的理论和方法，根据我们所能掌握的信息，经过分析、推导、计算等过程，求得问题的解决.建立数学模型，要按照我们建模的目的，尽可能逼真地反映所考察的对象的本质，同时又要适当地简化，在现阶段的条件下能够求解，以便尽快地应用到现实生活中去.计算技术的发展、数学理论研究的深入和人们认识水平的提高，对问题的解决又不断提出更高的要求.随着科学技术的进步和社会的发展，人们又不断发现新的问题.因此，数学建模是无止境的、发展和进步的.在新时代的要求下，当代大学生掌握数学建模的技能是非常重要的.

我国开展大学生数学建模竞赛活动已有十多年的历史.参加过这项活动的学生在数学应用能力、创新能力、自主学习能力、软件使用能力、信息收集与处理能力、跨学科研究能力、协作能力、论文写作能力等诸多方面得到了开发与锻炼，不少学生亲身体会到“一次参赛，终生受益”.大量参加过数学建模竞赛活动的大学生在参加工作以后或在继续深造中明显发挥出自身的优势，数学建模竞赛活动也越来越得到社会的认可.同时，这一活动也促进了大学

数学教师知识结构的优化和应用研究能力的提升.十多年来的数学建模竞赛活动促进了高校数学教学的改革.许多学校开设了数学建模、数学实验等课程,一些学校建立了数学建模基地,不少教学改革项目获得了全国或省、市的教学成果奖,数学建模思想也逐步渗透到各门数学基础课程的教学中.

湖北省数学建模竞赛活动在省教育厅的大力推动下,经过各院校教师的艰苦努力,得到了很大发展.近年来,每年有 40 多所院校的 300 多个队参赛,有 20 多所院校的参赛队先后获得过专科组网易杯、本科组高教社杯和专科组高教社杯等全国性奖励.一些学校的学生还组织了数学建模协会或数学建模俱乐部,举办讲座、开展研究讨论,还举办学生自行组织的数学建模竞赛.省组委会每年举办研讨会,各校之间开展经常性的经验交流和协作活动,使广大教师在数学建模教学和竞赛培训中积累了丰富的经验.为适应数学建模教学的需要和竞赛活动的进一步开展,湖北赛区组委会数学建模专家组组织编写了这本《数学建模(本科册)》.

数学建模是一项技术,同时也具有艺术的特点.同样一个现实问题,往往可以建立起许多各具特色的数学模型,模型往往能表现建模者的个性和审美观点.同一个问题往往可以用不同的数学方法、甚至不同的数学分支的知识去解决,检验模型的唯一标准是提出的解决方案是否符合实际,能否解决问题,而不在于所用到的数学知识是否高深、数学理论是否完美.本书的目的是通过微分方程、优化和概率统计这三个方面的数学模型向读者介绍建立数学模型的方法,不打算全面地论述除此以外各种各样的数学模型,而且,各章具有相对独立性.阅读这本书时,始终要记住的是从中学习建模的思想方法,而不要单纯作为知识来学习.选作教材时,完全没有必要对全书进行全面、系统的讲述,可以只选择其中最基本的内容进行剖析,而很多内容可由学生选择性地阅读;可以根据学生的情况在教学中决定取舍.数学建模能力的提高,不是光靠教师讲授就可以实现的,更重要的是强调实践.在教学中要注重让学生

自己动手去建模和计算,注重分析讨论,这样才能取得好的效果.

我们希望这本书能得到广大教师和学生的关注,提出进一步的改进意见,也希望这本书能对数学建模的教学和竞赛工作有所裨益.

武汉大学教授

费浦生

2005 年 11 月

前 言

本书是为理工类本科学生数学建模课程编写的教材.对理工科学生来说,数学建模显得越来越重要,它一方面有助于加深学生对本科数学知识的认识和理解,另一方面又能启发学生主动地运用数学知识解决实际问题.

数学模型是现实世界的本质反映和科学抽象,它用数学语言(数学公式、数学符号、数学工具等)描述研究对象的固有特性和有关因素之间的相互关系.一个好的数学模型不仅客观地反映了实际,而且又简单明了,易于处理.通过建立或构造数学模型来解释客观现象,预测事件发展,以及进行系统决策等,这种解决问题的途径在生产技术、科学技术和经济金融等众多领域中得到了广泛的应用,成为人们研究客观世界的有力工具.

数学建模的过程是对客观世界的认识过程,也是研究的过程,数模学习的目的就是要培养良好的思维方法,建立合理的方法论.数学建模需要观察,也需要实验,更需要创造性地归纳推理.不完全归纳和简单的类比会产生新的知识、新的思想,但在应用中要注意的是,它有一定的风险,可能会导致谬误.所以一定要反复地用各种不同的途径加以检验和证实.实际问题远比数学问题复杂,往往不是一个方程或公式所能包含的,只有抓住问题实质,合理假设,把问题简化,才能达到化难为易、化繁为简的目的.或者通过问题的特殊化,研究其中的特例,再把它推广到一般的情况.这与传统的数学教学思路是有一些区别的.

本书根据高等院校对本科生的数学教学的基本要求,以及编者多年从事建模的教学和研究工作的经验,为不同层次的需求而编排.它既可作为本科生选修课的教材,又是参加全国大学生数学建模竞赛的培训参考资料.本书除了满足本科数学教学基本要求

外,适当增添了一些建模需要的知识点,其编写遵循重思想、重方法、重应用、重能力培养的原则,着重培养学生的应用意识、数量化意识和创新意识,强调能力的训练. 能力与知识的不同之处在于,知识可以记录、复制,而且经常会被更新. 学好数学建模的唯一方法就是实际去做,通过模仿和练习,亲自体验,亲自判断,取得经验,改变固有的思维习惯. 自己取得点滴实际经验要比听别人说上半天有用得多. 培养学生从实际问题出发提出数学问题,进而研究具体解决的办法,而不是仅仅套用现成的数学公式. 这是我们编写本书的一个基本出发点.

本书包括微分方程和差分方程模型、优化模型和离散模型,以及随机和统计模型三个部分共八章. 第一、二、三章由王以治(华中科技大学)执笔,第四、五章由胡元明(武汉大学)执笔,第六、七、八章由吴传生(武汉理工大学)执笔. 我们在书中试图展现由简而繁的、不断深入改进的建模过程,反复地强调观察、假设和实践检验在建模中的重要性,同时也力求注意在建模的过程中把握好严格推导、精确计算与简化、近似之间的折中. 本书各章节内容相对独立,相互之间联系不甚密切,建议教师讲授时结合具体问题自主地选讲本书的三分之一左右的内容,其余部分让学生自学. 由于数学模型课程内容繁杂、实践性强,加上编者水平所限,书中难免有错误或不妥之处,敬请批评指正.

在本书编写中,武汉大学费浦生教授参加了组织策划工作,审阅了全部书稿,并提出了重要的修改意见.

王以治　胡元明　吴传生

2005 年 11 月

目　录

第一章　微分方程模型

在客观世界中，为了对某一事物或过程进行定量的研究，常常通过建立数学模型来表征这个事物或过程的本质.微分方程是表达事物发展过程的一种很有用的工具，它能更全面、更深刻地揭示实际事物内在的动态关系.建立起这样的模型，可以帮助我们去解释各种有关的现象，做出相应的决策或者对未来的发展进行某种预测.

建立数学模型的第一步，是把对一个实际问题的描述翻译成数学语言.翻译的过程同中学时解“应用题”的过程很相似，根据问题中给出的已知条件和要求达到的目的，设定若干变量，有时还需要添加或补充一些假设条件，由此推导并建立起变量间的用等式描述的关系.所不同的是，微分方程中的等式关系是微观的、瞬时的关系.

例如研究液压传动系统，一个活塞质量为 m，在水平的缸体内左右运动，它与油缸的黏性摩擦系数为 k_1，牵着它的弹簧的劲度系数为 k_2.开始，活塞处于弹簧的平衡点时，它的运动速度为 0.5 m/s，若 $k_1=0.1$，$k_2=0.2$，问时刻 t 活塞的位置在什么地方？

在该系统中，活塞的一边受到一个与时间有关的拉力 F，另一边用弹簧拉着.弹簧是理想的、无质量的.

可以用牛顿定律 $F=ma$ 来描述系统的动态模型.首先，设 x 的正方向向右，原点在弹簧的平衡点处.下面来分析活塞的受力情况.

摩擦力　　$f_{摩擦}=k_1 v=k_1\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，

弹力　　$f_{弹力}=k_2 x$.

这里，摩擦力是耗能的，而弹簧和质量是存储动能和势能的.综合

各种受力的情况,由动力学知识可得到所谓的受迫阻尼-弹簧-质量系统模型

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+k_1\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+k_2x=F, \tag{1-1}$$

再由其他条件得知初始条件为

$$x(0)=0,\quad x'(0)=0.5.$$

对于一个依赖于时间 t 的变量 x,要求建立描述 x,x'与 t 之间关系的方程,使它在特定范围内的任何时刻 $t\in D$ 都成立.在求解这个微分方程时要用到积分,会出现未知的积分常数.因此,还需要寻找别的条件,如问题中给出的特定时刻成立的信息,才能确定这些积分常数以及其他参数.

代数方程的解是空间的点,而对微分方程我们关心的是解曲线.微分方程的几何意义在于已经知道空间的方向场,如果还知道曲线上的一个特殊点,那么,问题就是寻找过此点的一条曲线,这条曲线上的每一点的斜率刚好与方向场相应位置处的方向一致.

第一节　生物种群增长模型

这一节先讨论最简单的也是最基本的一阶微分方程模型,通过对生物种群增长问题的一步一步深入分析,建立若干模型,并提出进一步改进模型的几个方向.希望通过具体的一些建模实例初步熟悉建模的方法,同时体会问题的分析、合理的假设、正确的推导等环节在建模中的重要性.

一、指数模型和阻滞模型

研究生物种群的生存与环境的关系,探索种群数量随时间变化的规律,是生态学家们十分关心的问题.人们常常通过建立群体消长的数学模型,进行数学计算和理论分析,来解释、探索、预测以及控制某些生态现象.所有生物种群的数量都是在不断变化的,而

且影响这种变化的因素非常复杂，只有在某些简化的假设条件下才可能得到我们所需要的模型. 首先，群体数量是整数变化的量，为了引入它的导数，必须对这个数量函数有一种连续的假设.

假设 1　在没有迁入、迁出的孤立群体中，时刻 t 的群体数量为 $x(t)$. 当群体规模很大时，这个函数可视为连续可微函数.

在 x 数值比较大的情况下，Δx 相对 x 足够小，我们可以接受这样的假设. 我们的问题是如何表示群体数量的变化率

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(x,t),$$

也就是设法揭示表达式 $f(x,t)$ 的内部结构. 微分方程模型是描述所考察的各个变量及其变化率之间的关系. 这里，把群体数量变化率看成个体平均变化率（就是平均每个个体的生殖率与死亡率之差）与群体数量的乘积，即

$$f(x,t)=r(x,t)x(t),$$

其中，变化率 $r(x,t)$ 在一般情况下应该是某个时刻群体数量的函数. 如果假定个体的平均生殖率、死亡率与时间无关，记为 $r(x)$，则可以得到一般性的模型

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=r(x)x(t),$$

其中，变化率 $r(x)$ 应该在尽量符合生物生态学特点的前提下进行一定的简化. 在下面的讨论中将逐步深入地提出几种不同的简化假设.

假设 2　种群增长率在一个相对短的时间内可以近似看做常数，即 $r(x)=r$. 这个常数也称为种群固有的自然增长率，于是有

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=rx,\\[2mm] x(0)=x_0,\ t\geqslant 0.\end{cases}\tag{1-2}$$

种群增长问题即变成常微分方程的初值问题，解为 $x(t)=x_0\mathrm{e}^{rt}$. 这是 1798 年 Malthus 提出的指数增长规律，它反映了种群的变化率对种群本身瞬时值的依赖性，模型简洁明了. 它是否符合实际情

况呢？它的应用范围又是如何的呢？数学建模就必须回答这样的问题.

显然，若 $r>0$，指数函数是趋于无穷大的，如图 1-1(1)所示，这种现象与种群的密度总是有限的这种直观常识相违背，因此需要修改上面的假设 2.

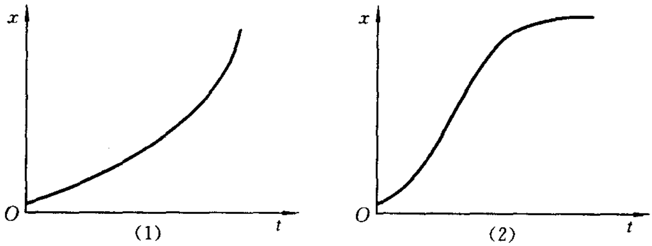


图 1-1

假设 2′ 种群个体的增长率为线性函数 $r(x)=r_0-Sx, S>0$.

可以认为受自然资源和环境条件所能容纳的群体最大数量所限，种群个体的增长率随着群体数量的增长而不断减少. 如果达到最大容量 x_m，将有 $r(x_m)=0$，这是一个稳定状态. 由线性关系 $r(x_m)=r_0-Sx_m$，得出 $S=r_0/x_m$，则

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = r_0\left(1-\dfrac{x}{x_m}\right)x, \\ x(0) = x_0,\ t \geqslant 0. \end{cases} \tag{1-3}$$

这是 1838 年 Verhulst-Pearl 提出的对模型(1-2)的修改模型，称为群体增长的阻滞方程或逻辑模型. 群体增长率 dx/dt 呈抛物线变化，个体平均增长率 $r(x)$ 逐渐减小. 其中 $-\dfrac{r_0}{x_m}x^2$ 项阻滞了群体数量的无限增大，它表示单位时间内由于同种群的两个体之间竞争资源而发生冲突的次数的统计平均，一般 $x_m \gg 1$. 在 x 比较小时，个体间没有干扰，与方程(1-2)差不多. 这是一个可分离变量的微分方程，求解可得

$$x(t)=\frac{x_m x_0}{x_0+(x_m-x_0)e^{-r_0 t}}. \tag{1-4}$$

图 1-1(2)是一条 S 形曲线. 当 $t\to+\infty$, $x(t)\to x_m$, 曲线渐近稳定. $x(t)$的二阶导数 $x''(t)=r_0-\frac{2r_0x(t)}{x_m}$为零时, $x(t^*)=\frac{x_m}{2}$, 则 $t^*=\frac{1}{r_0}\ln\frac{x_m-x_0}{x_0}$. 可见增长曲线在最大容量的一半处是拐点, 此点之前, 变化率不断增大, 到此点达到最大, 过后开始下降. 这个特点也可以帮助我们通过群体增长的转折点 t^* 来估计这个群体的最大数量. 将 t^* 代入式(1-4), 可得阻滞曲线的另一种表达, 即

$$x(t)=\frac{x_m}{1+e^{-r_0(t-t^*)}}.$$

在不知道初始种群数量的情况下, 种群数量变化的转折点也可以帮助我们了解种群动态变化的情况.

二、增长模型的改进

阻滞方程在预测长期的人口增长时, 出现不符合实际情况的现象. 这是因为引入最大容纳量的假设是比较保守的, 事实上, 科技的发展、生产率的提高使得环境能够容纳的数量也变得更大了. 有人对阻滞方程提出一种改进形式:

$$\frac{dx}{dt}=rx\left(1-\frac{x}{x_m}\right)\Big/\left(1-\frac{x}{x_n}\right). \tag{1-5}$$

它在分母上增添一项$(1-x/x_n)$, 参数 x_n起到调节作用. 当 $x_n=x_m$时, 方程(1-5)等同于指数模型(1-2); 而 $x_n\to+\infty$时方程(1-5)又成了阻滞模型(1-3); 在 $x_m\leqslant x_n<+\infty$范围内选择合适的值, 可以构成各种介于两种模型之间的中间模型.

仔细分析可知, 阻滞方程中将增长率 $r(x)$简单地看成一个线性函数有时是不够的. 在群体密度太小的时候, 雌性可能找不到配偶, 生殖率低于死亡率, 种群不能维持原来的规模而有负的增长率; 在密度稍大一点的时候, 由于资源丰富, 个体之间几乎没有竞

争，群体会迅速壮大；密度再大时，竞争增大，增长率再度下降；当环境快承受不了时，竞争又变得十分激烈，增长率迅速减小. 因此还可以进一步提出假设 2″.

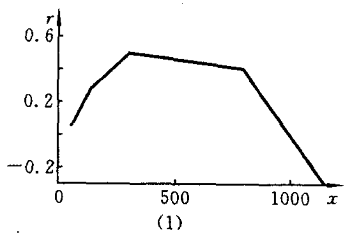
假设 2″ 种群增长率为分段线性函数

$$r(x)=r_i+S_ix,\ x_i<x<x_{i+1},\ i=0,1,2,\cdots,n-1.$$

于是，我们得到一个修正的阻滞方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=(r_i+S_ix)x,\ x_i<x<x_{i+1},\ i=0,1,2,\cdots,n-1,\\ x(0)=x_0,\ t\geqslant 0.\end{cases}$$

图 1-2 给出了一个分段线性的增长率及其对应的增长曲线，这个模型的群体增长曲线也是 S 形的，但是比阻滞模型有更多的变化，更能表达各个阶段的发展特点. 如果对种群的观察仅仅是确定它在各个时刻的数量多少，然后用这些数据去估计相应的参数 r_i 和 S_i，那么几乎总能得到很好的吻合. 因此，在建立模型时千万要注意，若没有机理上的仔细分析，单纯凭少量的数据进行拟合，得到的模型不一定可靠. 我们不仅要仔细考察外部干扰较少的种群增长的数据资料，还要对照其他情况下的数据，以便找出影响种群增长的新的因素.



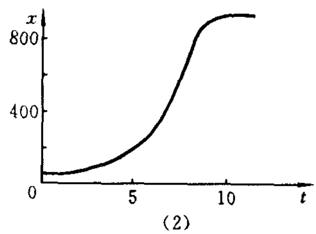


图 1-2

1963 年 Smith 在实验室观察了一种称为大型蚤（*Daphnia magna*）的种群的生长规律，发现它们的增长率与群体密度的关系 $r(x)$ 不是阻滞方程所期望的直线，而是一条下凸的曲线，如图 1-3 所示. 在阻滞方程中，增长率假设为 $r(x)=r_0(x_m-x)/x_m$，它与

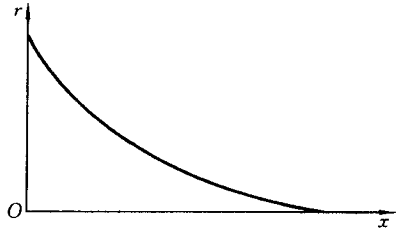


图 1-3

最大容量减去当前种群数量后还能容纳的种群数量所占的比例有关. 但是一个更合理的考虑是增长率应该与剩下还能提供的环境资源的比例有关,于是可以写出

$$r(x) = r_0(s_m - s)/s_m,$$

其中,s 是数量为 x 的种群的资源消耗率,s_m是相应于达到饱和水平的种群的资源消耗率.

一般地,$s/s_m > x/x_m$,因为增长着的种群比饱和的种群要消耗更多的资源,它们需要食物维持生存,还要繁殖后代,而饱和的群体不再增长了,食物仅用于维持生存. 根据这种分析,资源消耗率 s 一定依赖种群的大小 x 和种群的增长率 x'_t,因此最简单的假设是

$$s = c_1 x + c_2 \frac{dx}{dt}, \quad c_1, c_2 > 0,$$

其中 c_1和 c_2是相应的消耗比例系数.

由定义,当 $x = x_m$时,$s = s_m$,而且 $dx/dt = 0$,所以 $s_m = c_1 x_m$,于是可得方程

$$\frac{dx}{dt} = r_0 x\left[\frac{c_1(x_m - x) - c_2 dx/dt}{c_1 x_m}\right],$$

或
$$\frac{dx}{dt} = r_0 x\left(\frac{x_m - x}{x_m + r_0 c x}\right),$$

其中 $c = c_2/c_1$. 当 $c = 0$ 时,就是普通的阻滞方程. 可以看出,当 x 较小时,增长率随 x 增加较快地下降,而当 x 变得较大时,下降速