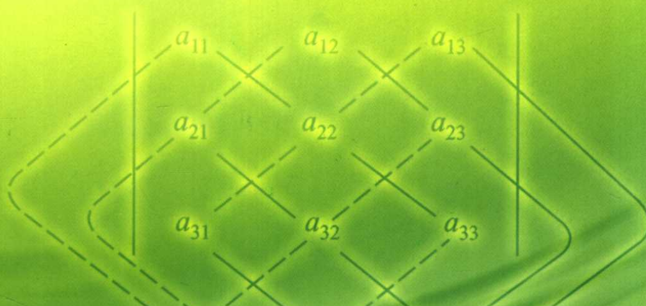
Guidance Series for Mathematics Majors

数学类专业学习辅导丛书

高等代数典型问题研究

蒋忠樟 著



$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

数学类专业学习辅导丛书

高等代数典型问题研究

蒋忠樟　著

高等教育出版社

内容提要

本书是高等代数教材的一些补充和提高，以展示教学研究心得为主，没有简单复述高等代数教材中已有的内容，也不同于已有的介绍和总结高等代数一般解题方法为主的书籍，而是以研究新方法和代数应用为主，尤其是侧重应用计算机来解决代数中的问题。本书主要内容有：多项式讨论的矩阵方法、整系数多项式的因式分解问题、线性方程组解的问题、子式阵及其伴随矩阵。本书可供大学对高等代数有兴趣的师生阅读鉴赏。

图书在版编目（CIP）数据

高等代数典型问题研究／蒋忠樟著．—北京：高等教育出版社，2006.5
ISBN 7-04-018676-4

Ⅰ.高... Ⅱ.蒋... Ⅲ.高等代数-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O15

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 013321 号

策划编辑 徐 可 **责任编辑** 李 陶 **封面设计** 王凌波
版式设计 王艳红 **责任校对** 尤 静 **责任印制** 朱学忠

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn http://www.hep.com.cn
总　　机	010-58581000		
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司	网上订购	http://www.landraco.com http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京鑫海金澳胶印有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	850×1168　1/32	版　　次	2006 年 5 月第 1 版
印　　张	6.75	印　　次	2006 年 5 月第 1 次印刷
字　　数	160 000	定　　价	9.80 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号　18676-00

郑重声明

序

高等代数是大学数学专业必修的重要基础课之一,高等代数所蕴含的思想方法对数学本质的认识以及后续课程的学习都有举足轻重的作用。但是,作为大学一年级的课程往往有下面两种情况:

1. 学生对高等代数的特点不适应

简单总结一下高等代数的课程特点有:

一般性。高等代数中往往都一般地提出问题和讨论问题,如多项式理论、方程组理论、空间结构等,一个简单的多项式也被定义成“形式”化的。

抽象性。可以说由一般性决定了抽象性。尽管高等代数研究的对象是具体的,如方程组、矩阵等,但建立起来的概念是抽象的,如欧氏空间不是从具体的现实空间引入,而是从一般向量空间再定义内积运算来建立,反过来“解释”长度角度等。另一方面整个高等代数的内容也逐步抽象化,所谓高等代数以方程理论为中心也正被结构理论所取代,传统的高等代数题材也已被结构理论诠释,处处可见近世代数的思想和方法。

严谨性。数学本身就是一门严谨的学科,高等代数较多地运用了公理化方法这一近代数学工具,为数学的严谨性训练提供了很好的空间。如一般的向量空间,其中的向量、运算具体到某个对象必须严格按定义的法则进行运算得到难以理解的结果等等。

由于这些特点,学生学习高等代数时往往会觉得比较困难,事实上正是有这些特点,才使学生在学习高等代数中最先接受现代数学的思想和方法,对这些特点的适应程度直接影响到整个大学

数学课程的学习效果。

2. 教师对高等代数不够重视，精力投入不足，内容研究不透。

无需讳言，大学数学教师将精力投入到基础课上往往不易出成果或出不了算作"成果"的成果，因而教师难以全身心投入，年轻教师也不将精力放在基础课程的教学和研究上，从而影响学生学习高等代数课程的效果。

作者从事高等代数的教学二十余年，积累了一些教学研究所得，汇编成书，供同行及大学生参考和阅读。希望能在推动高等代数的教材和教学改革中起一点作用。本书所编内容并不系统，主要介绍了

1. 多项式理论用矩阵作为工具进行讨论的方法、Eisenstein 判断法的进一步研究、多项式因式分解方法探讨等。

2. 线性方程组理论的拓展，线性方程组解法研究及应用。

3. 子式阵理论系统研究。

本书是高等代数教材的一些补充和提高，全部内容源自高等代数，但没有简单复述一般高等代数已有的内容，以高等代数方法为主，但又不同于现已见的介绍和总结高等代数一般解题方法为主的书籍，而以研究新方法和应用为主的成果总结。因此，既是一本实用的方法指导书，又是可供大学生鉴赏的研究文集。限于本人水平，难免有不妥之处，恳请读者批评指正。

编　　者

2004 年夏于金华

目　录

第一章　多项式讨论的矩阵方法

在多项式讨论方法上,大多数高等代数教材都是在中学代数的基础上,形式地研究多项式的各种运算与关系,或者采用函数的观点处理多项式问题.作为一种方法,借助于矩阵这一工具来讨论多项式的有关内容,在有些方面有其方便之处,下面是一些初步探讨的结果.

1.1　多项式相乘的矩阵表示

在多项式环 $F[x]$ 中,设

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \tag{1}$$

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0. \tag{2}$$

我们知道

$$f(x)g(x) = c_{n+m} x^{n+m} + c_{n+m-1} x^{n+m-1} + \cdots + c_k x^k + \cdots + c_1 x + c_0,$$

其中

$$c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j,$$

$k=0,1,2,\cdots,n+m,\qquad i=0,1,2,\cdots,n,\qquad j=0,1,2,\cdots,m.$

我们作如下定义:

定义　下列形式的矩阵称作多项式 $f(x)$ 的系数矩阵

$$F=\begin{pmatrix} a_n & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-1} & a_n & \cdots & 0 \\ a_{n-2} & a_{n-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & 0 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ 0 & a_0 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_1 \\ 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}_{(n+1+m)\times(m+1)}.$$

多项式的系数矩阵的列数根据 $f(x)$ 与之相乘的 $g(x)$ 的次数确定，如上述 F 的列数是根据(2)所设确定的，由于 $\partial^0(g(x))=m$（$\partial^0(g(x))$ 表示 $g(x)$ 的次数），则 F 为 $m+1$ 列.

定理 1.1.1 设 G 是多项式 $g(x)$ 的 $(m+1)\times 1$ 阶系数矩阵，即

$$G=(b_m,b_{m-1},\cdots,b_2,b_1,b_0)',$$

则 FG 是 $f(x)g(x)$ 的 $(n+m+1)\times 1$ 阶系数矩阵.

例 1.1 设

$$f(x)=x^4-2x^3+x^2-1,$$
$$g(x)=x^3+x^2+2x+1,$$

作 $f(x)$ 的系数矩阵与 $g(x)$ 的系数列阵乘法

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \\ 1 \\ \\ \\ 2 \\ \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

即得

$$f(x)g(x) = x^7 - x^6 + x^5 - 2x^4 - x^3 - 2x - 1.$$

由于多项式乘法适合交换律,上述矩阵乘法也可以由下列矩阵得到同样结果.

作 $g(x)$ 的系数矩阵与 $f(x)$ 的系数列阵乘法:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

多项式乘法的这一表示,可以与线性方程组解的情况联系起来,反过来探讨多项式因式分解的方法.

1.2 多项式整除的矩阵方法

多项式 $f(x)$,$g(x)$ 如上节中(1)、(2) 所设,不妨设 $m > n > 0$,可设 $m = n + p, p > 0$.

若 $f(x) \mid g(x)$,则存在

$$h(x) = c_p x^p + c_{p-1} x^{p-1} + \cdots + c_1 x + c_0,$$

使

$$g(x) = f(x)h(x).$$

用上述矩阵表示,有

$$\begin{pmatrix} a_n & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-1} & a_n & \cdots & 0 \\ a_{n-2} & a_{n-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & 0 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ 0 & a_0 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}_{(m+1)\times(p+1)} \begin{pmatrix} c_p \\ c_{p-1} \\ c_{p-2} \\ \vdots \\ c_1 \\ c_0 \end{pmatrix}_{(p+1)\times 1} = \begin{pmatrix} b_m \\ b_{m-1} \\ b_{m-2} \\ \vdots \\ b_1 \\ b_0 \end{pmatrix}_{(m+1)\times 1}. \tag{3}$$

定理 1.2.1 $f(x) \mid g(x)$ 的充要条件是 $f(x)$ 的系数矩阵与

$$\begin{pmatrix} a_n & 0 & \cdots & 0 & b_m \\ a_{n-1} & a_n & \cdots & 0 & b_{m-1} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & \cdots & 0 & b_{m-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_1 & a_2 & \cdots & 0 & \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_n & \vdots \\ 0 & a_0 & \cdots & a_{n-1} & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & a_0 & b_0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

的秩相同.

证明 实际上(3)是以 $c_p, c_{p-1}, \cdots, c_1, c_0$ 为未知量的线性方程组,(4)是它的增广矩阵,根据线性方程组有解的充要条件,即可得定理结论.

这一定理为判断多项式是否整除提供了一种新的方法,在利用时构造(4)要注意由 $g(x)$ 的次数确定行数.

例 1.2 设

$$g(x) = x^5 + 8x^4 + 18x^3 + 10x^2 - 3x - 2,$$

$$f(x)=x^3+3x^2+x-1,$$

试判断$f(x)\mid g(x)$是否成立,若成立求$h(x)$,使

$$g(x)=f(x)h(x).$$

解 构造(4)并求其秩(只进行初等行变换)

$$\begin{pmatrix}1&0&0&1\\3&1&0&8\\1&3&1&18\\-1&1&3&10\\0&-1&1&-3\\0&0&-1&-2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&5\\0&0&1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

可见$f(x)$的系数矩阵的秩是3,而增广矩阵的秩也是3,因此

$$f(x)\mid g(x),$$

且$h(x)=x^2+5x+2$. 此方法对含有参数的多项式,讨论其整除性更方便.

例1.3 设

$$g(x)=x^4+px+q,$$
$$f(x)=x^2+mx+1,$$

试求m,p,q的关系,使$f(x)\mid g(x)$.

解 作

$$\begin{pmatrix}1&0&0&1\\m&1&0&0\\1&m&1&0\\0&1&m&p\\0&0&1&q\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-m\\0&0&1&m^2-1\\0&0&0&p-m^3+2m\\0&0&0&q-m^2+1\end{pmatrix}.$$

根据定理1.2.1,要使$f(x)\mid g(x)$,需满足

$$p-m^3+2m=0,\qquad q-m^2+1=0.$$

1.3 多项式最大公因式的矩阵求法

在多项式环$F[x]$中,求两个多项式的最大公因式,一般高等

代数教材都介绍了辗转相除法，这一方法是基于下述的带余除法而得到的.

$$f(x)=g(x)q(x)+r(x),\qquad g(x)\neq 0,$$

由于$f(x)$、$g(x)$的最大公因式与$g(x)$、$r(x)$的最大公因式相同，所以将求较高次数的多项式的最大公因式转化为求次数较低的多项式的最大公因式，但每次转化都通过多项式除法得以实现，因而具体进行时往往要进行不影响最大公因式结果的系数处理，这一措施在最大公因式性质使用时会带来麻烦.事实上，设$d(x)$是多项式$f(x)$、$g(x)$的一个最大公因式，并通过辗转相除求得，那么存在$u(x)$、$v(x)$使

$$d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x),$$

其中的$u(x)$、$v(x)$可通过逐步回代的办法，在辗转相除式中求得，但要将辗转相除时处理过的系数处理回去，这是一项麻烦的工作，因此一般教材都建议不进行系数处理，因而辗转相除法往往比较麻烦，较易出错.

利用辗转相除法求两个以上多项式的最大公因式时，要依据

$$(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_m(x))=((f_1(x),\cdots,f_k(x)),(f_{k+1}(x),\cdots,f_m(x)))$$

分次辗转相除，工作量很大，一般地，求m个多项式的最大公因式，要进行$m-1$次辗转相除.

下面介绍的矩阵方法，可以避免上述麻烦.

为叙述方便，

定义 以$F[x]$中的多项式为元素的矩阵称为x-矩阵，下述三种变换为x-矩阵的初等变换：

1）矩阵的某两行互换位置；

2）矩阵的某一行乘以一个数域F中的非零常数；

3）矩阵的某一行的$\varphi(x)$倍加到另一行，$\varphi(x)\in F[x]$.

引理 1.3.1 任意一个x-矩阵经初等变换必可化为如下形式的矩阵：

$$\begin{pmatrix} d(x) & * & * & \cdots & * \\ 0 & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & * & * & \cdots & * \end{pmatrix},$$

其中 * 表示 $F[x]$ 中的多项式.

证明 设任意一个 x -矩阵为

$$A(x)=\begin{pmatrix} f_1(x) & * & * & \cdots & * \\ f_2(x) & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_n(x) & * & * & \cdots & * \end{pmatrix},$$

若 $f_1(x)=f_2(x)=\cdots=f_n(x)=0$,命题成立.

不然,总存在次数最低的多项式 $f_i(x)$,只要进行第一行与第 i 行互换,就可以使 $f_i(x)$ 处于左上角的位置,因此不妨设 $f_1(x)$ 为 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)$ 中次数最低的多项式.

设

$$f_1(x)=a_{1n_1}x^{n_1}+a_{1n_1-1}x^{n_1-1}+\cdots+a_{11}x+a_{10},$$

$$f_2(x)=a_{2n_2}x^{n_2}+a_{2n_2-1}x^{n_2-1}+\cdots+a_{21}x+a_{20},$$

其中 $a_{1n_1}\neq 0,a_{2n_2}\neq 0,n_2\geqslant n_1$,

设

$$\varphi_1(x)=-\frac{a_{2n_2}}{a_{1n_1}}x^{n_2-n_1},$$

则

$$f_2(x)-f_1(x)\varphi_1(x)=f'_2(x)$$

是次数比 $f_2(x)$ 至少低一次的多项式,这相当于经过一次初等变换可使 $A(x)$ 变为

$$B(x)=\begin{pmatrix} f_1(x) & * & * & \cdots & * \\ f'_2(x) & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_n(x) & * & * & \cdots & * \end{pmatrix},$$

继续上述工作，$\boldsymbol{B}(x)$变为

$$\boldsymbol{C}(x)=\begin{pmatrix} f_1(x) & * & * & \cdots & * \\ 0 & * & * & \cdots & * \\ f_3(x) & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_n(x) & * & * & \cdots & * \end{pmatrix},$$

对下面各行重复上述步骤即得引理结论.

引理 1.3.2 设 x -矩阵

$$\boldsymbol{A}(x)=\begin{pmatrix} f(x) & 1 & 0 \\ g(x) & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

经初等变换化为

$$\boldsymbol{B}(x)=\begin{pmatrix} f_1(x) & u_1(x) & v_1(x) \\ g_1(x) & s_1(x) & t_1(x) \end{pmatrix},$$

那么

$$(f(x),g(x))=(f_1(x),g_1(x)),$$

且

$$f_1(x)=u_1(x)f(x)+v_1(x)g(x),$$
$$g_1(x)=s_1(x)f(x)+t_1(x)g(x).$$

证明 只需证明经一次初等变换后上述命题成立即可. 下面就三种初等变换分别加以证明.

1) 设 $\boldsymbol{B}(x)$ 是经 $\boldsymbol{A}(x)$ 互换两行得到的，则

$$f_1(x)=g(x),\quad g_1(x)=f(x),$$
$$u_1(x)=t_1(x)=0,\quad v_1(x)=s_1(x)=1,$$

命题显然成立.

2) 不妨设 $\boldsymbol{B}(x)$ 是非零常数 c 乘以 $\boldsymbol{A}(x)$ 的第一行得到的，则

$$f_1(x)=cf(x),\quad g_1(x)=g(x),\quad u_1(x)=c,$$
$$t_1(x)=1,\quad v_1(x)=s_1(x)=0,$$

由于

$$(f_1(x),g_1(x)) = (cf(x),g(x)) = (f(x),g(x)),$$
$$f_1(x) = cf(x) = u_1(x)f(x) = u_1(x)f(x) + v_1(x)g(x),$$
$$g_1(x) = g(x) = t_1(x)g(x) = s_1(x)f(x) + t_1(x)g(x),$$
命题成立.

3）不妨设 $\boldsymbol{B}(x)$ 是由 $\boldsymbol{A}(x)$ 的第二行的 $q(x)$ 倍加到第一行得到的,则

$$f_1(x) = f(x) + q(x)g(x), \quad g_1(x) = g(x),$$
$$u_1(x) = t_1(x) = 1, \quad v_1(x) = q(x), \quad s_1(x) = 0,$$

于是

$$(f_1(x),g_1(x)) = (f(x) + q(x)g(x),g(x)) = (f(x),g(x)),$$
$$f_1(x) = f(x) + q(x)g(x) = u_1(x)f(x) + v_1(x)g(x),$$
$$g_1(x) = g(x) = s_1(x)f(x) + t_1(x)g(x),$$

证毕.

利用上述引理,可以得到:

定理 1.3.3 设 x -矩阵

$$\boldsymbol{A}(x) = \begin{pmatrix} f(x) & 1 & 0 \\ g(x) & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

经初等变换化为

$$\boldsymbol{B}(x) = \begin{pmatrix} d(x) & u(x) & v(x) \\ 0 & s(x) & t(x) \end{pmatrix},$$

则

1）$d(x)$ 为 $f(x),g(x)$ 的最大公因式;

2）$d(x) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$.

证明 定理结论 2)是引理 1.3.2 的直接结果.

我们知道,若 $d(x) \mid f(x), d(x) \mid g(x)$ 且满足上述结论 2),那么 $d(x)$ 是 $f(x),g(x)$ 的最大公因式,于是下面只需证明 $d(x) \mid f(x), d(x) \mid g(x)$.

若 $f(x) = g(x) = 0$,则 $d(x) = 0$,命题成立.

若 $g(x)=0, f(x)\neq 0$，则 $d(x)=f(x)$，命题成立.

若 $f(x)\neq 0, g(x)\neq 0$，不妨设 $\partial^0 f(x)\leqslant \partial^0 g(x)$，$\boldsymbol{B}(x)$ 可以通过若干次第三种初等变换得到，假设第一次第三种初等变换的关系式是

$$f_1(x)=g(x)+\varphi_1(x)f(x),$$

即 $\boldsymbol{A}(x)$ 变为

$$\boldsymbol{B}_1(x)=\begin{pmatrix} f(x) & * & * \\ f_1(x) & * & * \end{pmatrix}.$$

不妨设 $\partial^0 f_1(x)<\partial^0 f(x)$（可能要经过若干次变换才能达到），可以继续上述工作，设经 r 次，直到 $f_r(x)=0$，相关变换的关系式为

$$f_2(x)=f(x)+\varphi_2(x)f_1(x),$$
$$f_3(x)=f_1(x)+\varphi_3(x)f_2(x),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(r-1)\qquad f_{r-1}(x)=f_{r-3}(x)+\varphi_{r-1}(x)f_{r-2}(x),$$
$$(r)\qquad 0=f_{r-2}(x)+\varphi_r(x)f_{r-1}(x).$$

从上述 $(r-1)$ 式可知 $f_{r-1}(x)=d(x)$，又从 (r) 式可知 $d(x)\mid f_{r-2}(x)$，$(r-1)$ 式可知 $d(x)\mid f_{r-3}(x)$，依次上推可知 $d(x)\mid f(x)$，$d(x)\mid g(x)$，从而 $d(x)$ 是 $f(x)$，$g(x)$ 的最大公因式. 证毕.

例 1.4 设

$$f(x)=x^4+2x^3-x^2-4x-2,$$
$$g(x)=x^4+x^3-x^2-2x-2,$$

求 $(f(x),g(x))$ 及 $u(x),v(x)$，使

$$(f(x),g(x))=u(x)f(x)+v(x)g(x).$$

解 作

$$\begin{pmatrix} x^4+2x^3-x^2-4x-2 & 1 & 0 \\ x^4+x^3-x^2-2x-2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

对其进行初等变换