Mathematical Analysis

数学分析 (第3册)

北京大学数学科学学院
谭小江　彭立中　编著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

数学分析

（第3册）

北京大学数学科学学院

谭小江　彭立中　编著

高等教育出版社

HIGHER EDUCATION PRESS

图书在版编目(CIP)数据

数学分析．第3册/谭小江，彭立中编著．—北京：
高等教育出版社,2006.7
ISBN 7-04-019618-2

Ⅰ.数… Ⅱ.①谭…②彭… Ⅲ.数学分析-高
等学校-教材 Ⅳ.O17

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第064172号

策划编辑 徐 可 **责任编辑** 张耀明 **封面设计** 王凌波
责任绘图 尹文军 **版式设计** 王 莹 **责任校对** 王 超
责任印制 尤 静

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京铭成印刷有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	880×1230　1/32	版　　次	2006年7月第1版
印　　张	10.5	印　　次	2006年7月第1次印刷
字　　数	290 000	定　　价	14.90元

物料号　19618-00

目　　录

第一章　广 义 积 分

前面我们学习了“一元微积分”和“多元微积分”，从本章开始我们将学习微积分的另一部分理论——“广义积分和级数理论”. 这章中我们将利用极限将一元函数的定积分扩展为无界区域上的积分(简称为无穷积分)和无界函数的积分(简称为瑕积分). 在本书的第四章中，我们还将对多元函数的重积分，曲面积分和曲线积分以及含参变量的积分展开讨论.

§1.1　无穷区间上的广义积分

如图 1.1，假设我们希望求由函数 $y=\frac{1}{x^2}$的曲线和 $x=1$、x 轴在区间$[1,+\infty)$上所围区域 D 的面积. 对于这一问题，如果直接利用定积分定义中分割，求和和取极限的方法，则由于区间是无界的，所以考虑普通的 Riemann 和有困难. 我们前面学习过的定积分这时不再适用. 但另一方面，对于任意 $R>1$，函数 $y=\frac{1}{x^2}$在区间$[1,R]$上可积. 积分

$$S(R)=\int_1^R \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=1-\frac{1}{R}$$

是图中阴影部分的面积. 如果令 $R\to+\infty$，则 $S(R)\to 1$. 1 即为所求区域 D 的面积，记之为

$$1=\lim_{R\to+\infty}\int_1^R \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x.$$

这样我们就得到了无界区域 D 的面积，或者说函数 $y=\frac{1}{x^2}$在无界区间

$[1,+\infty)$上的积分.

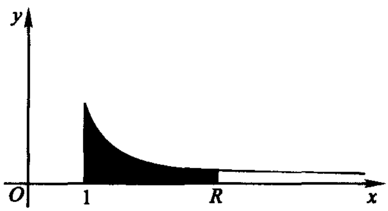

图 1.1

一般地,设函数 $f(x)$定义在无界区间$[a,+\infty)$上,且对任意的 $R>a$,$f(x)$在$[a,R]$上 Riemann 可积.为了将普通的 Riemann 积分推广到无界区间上,即定义 $f(x)$在$[a,+\infty)$上的积分(称为无穷积分),我们考虑极限

$$\lim_{R\to+\infty}\int_a^R f(x)\mathrm{d}x .$$

如果这一极限收敛(有有限极限),则称 $f(x)$在$[a,+\infty)$上广义可积,称这一极限为 $f(x)$在$[a,+\infty)$上的广义积分(无穷积分),记之为

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x .$$

同时我们称广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.如果上面的极限不存在或为 $\pm\infty$,则称广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

例 1　讨论广义积分$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$的收敛性.

解　由于$\int_0^R\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\arctan R$,所以

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\lim_{R\to+\infty}\arctan R=\frac{\pi}{2}.$$

积分收敛.

例 2 讨论广义积分 $\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ 的收敛性.其中 $a>0$.

解 当 $p\neq 1$ 时,

$$\int_a^R\frac{\mathrm{d}x}{x^p}=\frac{1}{1-p}x^{1-p}\Big|_a^R=\frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{a^{p-1}}-\frac{1}{R^{p-1}}\right),$$

因此如果 $p>1$,则 $\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}=\frac{1}{(p-1)a^{p-1}}$,积分收敛;

当 $p<1$ 时,由于 $\frac{1}{R^{p-1}}\to+\infty$,所以积分发散;

当 $p=1$ 时,$\int_a^R\frac{\mathrm{d}x}{x}=\ln\frac{R}{a}\to+\infty(R\to+\infty)$,积分也发散.

例 3 讨论广义积分 $\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^p x}$ 的收敛性.其中 $a>\mathrm{e}$.

解 由于 $\int_a^R\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^p x}=\int_a^R\frac{\mathrm{d}\ln x}{\ln^p x}$,所以 $p\neq 1$ 时,

$$\int_a^R\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^p x}=\frac{1}{1-p}\ln^{1-p}x\Big|_a^R=\frac{1}{1-p}(\ln^{1-p}R-\ln^{1-p}a).$$

因此当 $p>1$ 时,$\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^p x}=\frac{\ln^{1-p}a}{p-1}$,积分收敛;

当 $p<1$ 时,由于 $\ln^{1-p}R\to\infty(R\to+\infty)$,所以积分发散;

当 $p=1$ 时,$\int_a^R\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}=\ln\left(\frac{\ln R}{\ln a}\right)\to+\infty(R\to+\infty)$,积分也发散.

例 4 求广义积分 $I=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\cos bx\mathrm{d}x$,其中 $a>0$.

解 令 $I=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\cos bx\mathrm{d}x$.则

$$I=\int_0^{+\infty}\cos bx\mathrm{d}\left(-\frac{1}{a}\mathrm{e}^{-ax}\right)\xlongequal{\text{分部积分}}$$

$$-\frac{1}{a}\mathrm{e}^{-ax}\cos bx\Big|_0^{+\infty}+\frac{1}{a}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}(-b\sin bx)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{a}+\frac{b}{a^2}\int_0^{+\infty}\sin bx\mathrm{d}\mathrm{e}^{-ax}\xlongequal{\text{分部积分}}\frac{1}{a}-\frac{b}{a^2}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}b\cos bx\mathrm{d}x=\frac{1}{a}-\frac{b^2}{a^2}I.$$

解得 $I=\frac{a}{a^2+b^2}$.

例 5 讨论广义积分$\int_0^{+\infty}\sin x\mathrm{d}x$的收敛性.

解 由于$\int_0^R\sin x\mathrm{d}x=1-\cos R$, $R\to+\infty$时极限不存在,所以积分$\int_0^{+\infty}\sin x\mathrm{d}x$发散.

如果函数$f(x)$定义在$(-\infty,a]$上,且对任意$R<a$,$f(x)$在区间$[R,a]$上 Riemann 可积,则我们定义$f(x)$在$(-\infty,a]$上的广义积分为

$$\int_{-\infty}^a f(x)\mathrm{d}x=\lim_{R\to-\infty}\int_R^a f(x)\mathrm{d}x,$$

如果等式右边的极限收敛.否则称广义积分$\int_{-\infty}^a f(x)\mathrm{d}x$发散.

如果函数$f(x)$定义在$(-\infty,+\infty)$上,且对任意$R<T$,$f(x)$在$[R,T]$上 Riemann 可积,则我们定义$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上的广义积分为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\lim_{R\to-\infty}\int_R^0 f(x)\mathrm{d}x+\lim_{T\to+\infty}\int_0^T f(x)\mathrm{d}x.$$

需要强调的是,这上面极限中,R和T是作为独立变量趋于无穷的.即函数$f(x)$称为在$(-\infty,+\infty)$上广义可积,如果其分别在区间$(-\infty,0]$和$[0,+\infty)$上广义可积.我们将$f(x)$在$(-\infty,0]$和$[0,+\infty)$上广义积分的和作为$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上的广义积分.例如在上面的例 5 中我们说明了$\sin x$在$[0,+\infty)$不是广义可积的,因而其在$(-\infty,+\infty)$上的广义积分发散.

值得注意的是,虽然$\sin x$在$(-\infty,+\infty)$上不是广义可积的,但是极限

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^R\sin x\mathrm{d}x$$

是收敛的.对于这种情况,我们称$\sin x$在$(-\infty,+\infty)$上**依主值意义广义可积**,称上面的极限为$\sin x$在$(-\infty,+\infty)$上在**主值意义下的广义积分**,记为

$$\text{p.v.}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x\,\mathrm{d}x\ .$$

例 6 令 $f(x)=\mathrm{e}^{-|x|}$，计算 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$.

解 $\int_{0}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\lim\limits_{R\to+\infty}(1-\mathrm{e}^{-R})=1$，而

$$\int_{-\infty}^{0}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x=\lim_{R\to-\infty}(1-\mathrm{e}^{R})=1\ .$$

得 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=2$.

例 7 令 $f(x)=x$，讨论 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的广义积分.

解 由于 $f(x)=x$ 在 $[0,+\infty)$ 不是广义可积的，因而其在 $(-\infty,+\infty)$ 上的广义积分发散. 但另一方面，$f(x)$ 是奇函数，因而其在 $(-\infty,+\infty)$ 上依主值意义广义可积，且 $\text{p.v.}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=0$.

下面我们以讨论区间 $[a,+\infty)$ 上的广义积分为主. 相应的结论不难转换为 $(-\infty,b]$ 和 $(-\infty,+\infty)$ 上的广义积分.

如果函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上存在原函数 $F(x)$，且对任意 $R>a$，$f(x)$ 在 $[a,R]$ 上可积，则由 Newton - Leibniz 公式，

$$\int_{a}^{R}f(x)\mathrm{d}x=F(R)-F(a)\ .$$

$f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上广义积分的存在和计算问题化为极限 $\lim\limits_{R\to+\infty}F(R)$ 的存在和计算问题. 但是如果 $f(x)$ 没有原函数或者原函数难以求出，则我们需要通过其他的方法来讨论 $f(x)$ 的广义可积性和积分计算.

首先如果函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上广义可积，则不难看出对于任意 $b>a$，$f(x)$ 在 $[b,+\infty)$ 上也是广义可积的，并且积分满足

$$\int_{a}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x+\int_{b}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x.$$

因此如果令 $b\to+\infty$，则由

$$\int_{a}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\int_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x,$$

得 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_{b}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=0$. 所以当 b 充分大时，

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \approx \int_a^b f(x)\mathrm{d}x .$$

而积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是可以通过普通定积分的 Riemann 和近似求得的.因此在考虑函数 $f(x)$ 的广义积分时,重要的是怎样通过函数自身的性质来判断其是否广义可积.在可积的情况下,积分值总是可以通过普通 Riemann 和利用近似计算求得的.

怎样利用函数自身的性质来判断其是否广义可积呢?广义积分作为一种极限,就如我们前面在讨论各种极限时多次提到的一样,这时对于怎样通过序列或函数自身的性质来判断极限是否收敛的问题,一般有两种方法.一个是利用单调有界收敛定理,一个是 Cauchy 准则.我们先考虑前一种方法.下面讨论的函数总假定是在其定义域内的任意有界闭区间上可积.

首先设在 $[a,+\infty)$ 上,函数 $f(x)\geqslant 0$,令 $F(R)=\int_a^R f(x)\mathrm{d}x$,则 $F(R)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调上升,因此利用单调有界收敛定理,$f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上广义可积的充分必要条件是函数 $F(R)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界.利用此我们可以建立下面的**比较判别法**(也称**控制收敛判别法**).

定理 1(比较判别法) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是 $[a,+\infty)$ 上的非负函数,如果存在 $c\geqslant a$,使得对于任意 $x\geqslant c$,有

$$f(x)\leqslant g(x).$$

则当 $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上可积时,$f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上也可积;反之,如果 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上不可积,则 $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上也不可积.

证明 不妨设 $c=a$.如果 $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上可积,则

$$G(R)=\int_a^R g(x)\mathrm{d}x$$

在 $[a,+\infty)$ 上有界.但

$$F(R)=\int_a^R f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^R g(x)\mathrm{d}x = G(R) .$$

因而 $F(R)$ 在 $[a,+\infty)$ 上也有界,得 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上可积. □

例 8 证明 $\alpha>1$ 时,积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ 收敛.

证 当 $x\geqslant 1$ 时，$\frac{\sin^2 x}{x^\alpha}\leqslant\frac{1}{x^\alpha}$. 但 $\alpha>1$，$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ 收敛. 由比较判别法得 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ 收敛.

下面的定理是比较判别法的极限形式.

定理 2(比较判别法) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是 $[a,+\infty)$ 上的非负函数，且 $g(x)$ 处处不为零. 如果

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l,$$

则

(1) 当 $0<l<+\infty$ 时，$f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上同时可积或同时不可积；

(2) 当 $l=0$ 时，如果 $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上可积，则 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上也可积；

(3) 当 $l=+\infty$ 时，如果 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上不可积，则 $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上也不可积.

证明留给读者作为练习.

例 9 讨论无穷积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x}\mathrm{d}x$ 的收敛性.

解 当 $x\geqslant 1$ 时，$\frac{\arctan x}{x}>0$. 而当 $x\to+\infty$ 时，由于 $\frac{\arctan x}{x}$ 与 $\frac{\pi}{2x}$ 是等价无穷小. 所以由定理 2，$\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x}\mathrm{d}x$ 与 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x}$ 同时收敛或发散，即广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x}\mathrm{d}x$ 发散.

例 10 讨论无穷积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^3+2+\sqrt{x+1}}}\mathrm{d}x$ 的收敛性.

解 当 $x\to+\infty$ 时，函数 $\frac{1}{\sqrt{x^3+2+\sqrt{x+1}}}$ 与函数 $\frac{1}{\sqrt{x^3}}$ 是同阶无穷小. 但 $\frac{1}{\sqrt{x^3}}$ 在 $[1,+\infty)$ 上可积. 得 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^3+2+\sqrt{x+1}}}\mathrm{d}x$ 收敛.

假定 $x\to+\infty$ 时,非负函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是无穷小,则利用无穷小的阶的比较关系,定理 2 可表示为同阶无穷小同时可积或同时不可积;如果低阶的无穷小可积,则高阶的无穷小也可积;如果高阶的无穷小不可积,则低阶的无穷小也不可积.

在比较判别法中,我们通常利用例 2,以函数 $\frac{1}{x^p}$ 作为标准无穷小.当 $p>1$ 时,积分 $\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ 收敛;而 $p\leqslant1$ 时,积分 $\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ 发散.

值得注意的是,非负函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上可积时,不一定有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.即在 $x\to+\infty$ 时,$f(x)$ 可以不是无穷小.

例 11　设 $x\in[1,+\infty)$,令

$$f(x)=\begin{cases}n, & \text{如果 } x\in\left[n-\frac{1}{2^n},n\right],\\ 0, & \text{其余的 } x.\end{cases}$$

证明 $\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

证明　对于任意正整数 n,$f(x)$ 在 $[1,n]$ 仅有有限个间断点,因而可积.而 $\int_1^n f(x)\mathrm{d}x=\sum\limits_{k=1}^n k\frac{1}{2^k}$.

取 a,使得 $1<a<2$,利用 L. Hospital 法则得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{a^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{a^x\ln a}=0.$$

因而存在 N 使得 $k>N$ 后 $k<a^k$.我们得到 $k>N$ 后,

$$\frac{k}{2^k}=\frac{k}{a^k}\cdot\left(\frac{a^k}{2^k}\right)<\left(\frac{a}{2}\right)^k.$$

但

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^n\left(\frac{a}{2}\right)^k=\frac{2}{2-a}$$

收敛.得 $\left\{\sum\limits_{k=1}^n k\frac{1}{2^k}\right\}_{n=1,2,\cdots}$ 有界,因而收敛,$f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上可积.

思考题　证明如果非负的函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上广义可积,则

存在序列$\{x_n\}$满足$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=+\infty$，而$\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=0$；如果连续函数$f(x)$在$[a,+\infty)$上广义可积，则存在序列$\{x_n\}$满足$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=+\infty$，而$\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=0$；问对于$[a,+\infty)$上任意广义可积的函数$f(x)$，是否一定存在序列$x_n\to+\infty$，使得$f(x_n)\to 0$?

上面我们讨论的是非负函数.对于$[a,+\infty)$上一般的函数$f(x)$，为了利用上面的结论来研究$f(x)$的广义可积性，我们定义

$$f^+(x)=\max\{f(x),0\};\quad f^-(x)=\min\{f(x),0\}.$$

由于在$[a,+\infty)$内任意有界区间上函数$f^+(x)$和$f^-(x)$的振幅小于等于函数$f(x)$的振幅，因而如果$f(x)$在$[a,+\infty)$内任意有界闭区间上可积，则$f^+(x)$和$f^-(x)$也在$[a,+\infty)$内任意有界闭区间上都是可积的.这时积分$\int_a^R f^+(x)\mathrm{d}x$和$\int_a^R f^-(x)\mathrm{d}x$对$R$分别单调，因而广义积分$\int_a^{+\infty} f^+(x)\mathrm{d}x$和$\int_a^{+\infty} f^-(x)\mathrm{d}x$或者收敛，或者为无穷.

如果$\int_a^{+\infty} f^+(x)\mathrm{d}x$和$\int_a^{+\infty} f^-(x)\mathrm{d}x$都收敛，则由

$$f(x)=f^+(x)+f^-(x),$$

得$f(x)$在$[a,+\infty)$上广义可积.而另一方面，由于

$$|f(x)|=f^+(x)-f^-(x),$$

因而$|f(x)|$在$[a,+\infty)$上也可积.反之，如果$|f(x)|$在$[a,+\infty)$上可积，则由

$$f^+(x)\leqslant|f(x)|,\quad -f^-(x)\leqslant|f(x)|,$$

利用比较判别法得$f^+(x)$和$f^-(x)$在$[a,+\infty)$上都可积.由此我们得到广义积分$\int_a^{+\infty} f^+(x)\mathrm{d}x$和$\int_a^{+\infty} f^-(x)\mathrm{d}x$都收敛的充分必要条件是函数$|f(x)|$在$[a,+\infty)$上可积.

如果无穷积分$\int_a^{+\infty} f^+(x)\mathrm{d}x$和$\int_a^{+\infty} f^-(x)\mathrm{d}x$中有一个收敛，而另一个为无穷，则广义积分$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$也为无穷.

如果 $\int_a^{+\infty} f^+(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_a^{+\infty} f^-(x)\mathrm{d}x$ 都为无穷,则极限

$$\lim_{R\to+\infty}\int_a^R f(x)\mathrm{d}x = \lim_{R\to+\infty}\int_a^R f^+(x)\mathrm{d}x + \lim_{R\to+\infty}\int_a^R f^-(x)\mathrm{d}x.$$

这时这一极限是 $\infty-\infty$ 形的不定式.其可能收敛,也可能发散,即 $f(x)$在$[a,+\infty)$上可能可积,也可能不可积.但另一方面,当积分 $\int_a^{+\infty} f^+(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_a^{+\infty} f^-(x)\mathrm{d}x$ 都为无穷时,必须 $\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x = +\infty$.

为了区别以上三种情况,对于$[a,+\infty)$上的函数 $f(x)$,我们有下面定义.

定义 广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 称为**绝对可积**的,如果

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x < +\infty;$$

广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 称为**条件可积**的,如果 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,但

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x = +\infty.$$

广义积分的条件可积性与绝对可积性之间有许多本质的差异,绝对可积时,函数曲线的图形在 x 轴上方和下方部分的面积都是有限的,积分是这两个面积的差.如果 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 仅是条件可积,则函数曲线的图形在 x 轴上方和下方部分的面积都是无穷,积分是由面积的正的部分和面积的负的部分在取极限过程中相互抵消产生的.关于这一点,我们将在下一章无穷级数理论和第四章多元函数的广义积分中做更深入的说明.下面的例子可以帮助读者理解这种差别.

例 12 设 $x\in[1,+\infty)$,令

$$f(x)=(-1)^k\left(\frac{3}{2}\right)^n,\quad 如果\ x\in\left[n+\frac{k}{2^n},n+\frac{k+1}{2^n}\right),$$

其中 $n=1,2,\cdots;k=0,1,\cdots,2^n-1$.证明 $f(x)$在$[1,+\infty)$上条件可积.

证明 对任意 $R>1$，设 $R\in[n,n+1)$，则由积分中正的部分和负的部分相互抵消不难看出

$$\left|\int_1^R f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{2^n} = \left(\frac{3}{4}\right)^n \to 0(n\to\infty).$$

$f(x)$在$[1,+\infty)$上可积，$\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 0$.

但另一方面，$\lim\limits_{x\to+\infty}|f(x)|\to+\infty$，所以必须

$$\int_1^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x = +\infty .$$

例 13 证明 $\sin x^2$ 在$[1,+\infty)$上条件可积.

证明 对任意 $R>1$，

$$\int_1^R \sin x^2\mathrm{d}x \xlongequal{t=x^2} \frac{1}{2}\int_1^{R^2}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\frac{(-\cos t)}{\sqrt{t}}\Bigg|_1^{R^2} - \frac{1}{4}\int_1^{R^2}\frac{\cos t}{\sqrt{t^3}}\mathrm{d}t,$$

其中$\lim\limits_{R\to+\infty}\frac{1}{2}\frac{(-\cos t)}{\sqrt{t}}\Bigg|_1^{R^2} = \frac{\cos 1}{2}$，而$\frac{|\cos t|}{\sqrt{t^3}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{t^3}}$. 但$\frac{1}{\sqrt{t^3}}$在$[1,+\infty)$可积，由比较判别法得$\frac{|\cos t|}{\sqrt{t^3}}$可积. 因而 $\sin x^2$ 在$[1,+\infty)$上可积.

而对于 $n=1,2,\cdots$，$\sin x^2$ 在区间$\left[\sqrt{n\pi+\frac{\pi}{4}},\sqrt{n\pi+\frac{3\pi}{4}}\right]$上满足$|\sin x^2|\geqslant\frac{1}{2}$. 因此

$$\int_1^N |\sin x^2|\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N'}\left[\sqrt{n\pi+\frac{3\pi}{4}}-\sqrt{n\pi+\frac{\pi}{4}}\right]=$$

$$\frac{\pi}{4}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\left[\sqrt{n\pi+\frac{3\pi}{4}}+\sqrt{n\pi+\frac{\pi}{4}}\right]} \geqslant \frac{\pi}{4}\frac{N}{\left[\sqrt{N\pi+\frac{3\pi}{4}}+\sqrt{N\pi+\frac{\pi}{4}}\right]}\to+\infty,$$

得$\int_1^{+\infty}|\sin x^2|\mathrm{d}x = +\infty$，$\sin x^2$ 在$[1,+\infty)$上仅是条件可积的.

例 14 证明$\frac{\sin x}{x}$和$\frac{\cos x}{x}$在$[1,+\infty)$上可积，但不绝对可积.

证明 对任意 $R>1$,由

$$\int_1^R \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \left.\frac{(-\cos x)}{x}\right|_1^R + \int_1^R \frac{\cos x}{x^2}\mathrm{d}x ,$$

而

$$\lim_{R\to+\infty}\left.\frac{(-\cos x)}{x}\right|_1^R=\cos 1,\frac{|\cos x|}{x^2}\leqslant\frac{1}{x^2},$$

得$\frac{\sin x}{x}$在$[1,+\infty)$上可积.同理可证$\frac{\cos x}{x}$在$[1,+\infty)$上可积.

另一方面,由

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right|\geqslant\frac{\sin^2 x}{x}=\frac{1}{2x}-\frac{\cos 2x}{2x},$$

而通过上面的证明得$\frac{\cos 2x}{2x}$在$[1,+\infty)$上可积.如果$\left|\frac{\sin x}{x}\right|$可积,则必须$\frac{1}{x}$在$[1,+\infty)$上可积.但这显然不成立.

比较判别法仅适用于绝对可积的函数.对其他的函数,我们需要利用关于通过序列和函数自身性质判别极限是否收敛的另一方法——Cauchy 收敛准则来进行讨论.

定理 3(Cauchy 准则) 广义积分$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛的充分必要条件是$\forall\varepsilon>0,\exists R>a$,使得对于任意的$R_1,R_2>R$,恒有

$$\left|\int_{R_1}^{R_2}f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon .$$

证明与普通序列和函数极限的 Cauchy 准则相同,留给读者.

为了给出 Cauchy 准则中积分$\left|\int_{R_1}^{R_2}f(x)\mathrm{d}x\right|$的估计,我们首先回顾一下定积分的积分第二中值定理.

积分第二中值定理 如果$g(x)\in R[a,b]$,$f(x)$在$[a,b]$上单调,则存在$\xi\in[a,b]$,使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(a)\int_a^\xi g(x)\mathrm{d}x + f(b)\int_\xi^b g(x)\mathrm{d}x .$$

由于这一定理和它的证明方法在后面几章中都将经常用到,为方