附：高等数学(二)第一分册线性代数自学考试大纲

高等数学（二）

第一分册 线性代数

组编／全国高等教育自学考试指导委员会
主编／姚慕生 高汝熹

全国高等教育自学考试指定教材 经济管理类专业

出版社

全国高等教育自学考试指定教材

经济管理类公共课

高等数学(二)

第一分册　线性代数

(附：高等数学(二)第一分册 线性代数自学考试大纲)

全国高等教育自学考试指导委员会组编

主编　姚慕生　高汝熹

武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(二)第一分册 线性代数/全国高等教育自学考试指导委员会组编;姚慕生,高汝熹主编.－2版－武汉:武汉大学出版社,1999.10

全国高等教育自学考试指定教材,经济管理类公共课

ISBN 7－307－02876－X

Ⅰ.高… Ⅱ.①姚… ②高… Ⅲ.高等数学－高等教育－自学考试－教材 Ⅳ.O018

责任编辑：顾素萍　[redacted]：叶　校　[redacted]式[redacted]计：支　笛

出版发行：武汉大学出[redacted]版社[redacted](430[redacted]72　武[redacted]珞[redacted]珈山)

(电子邮件：w[redacted]hu. ed[redacted]网址：www. wdp. whu. edu. cn)

印刷：北京友谊印刷有限公司

开本：880×1230　1/32　印张：11　字数：312千字

版次：1989年12月第1版　1999年10月第2版

2006年1月第2版第23次印刷

ISBN 7－307－02876－X/O·218　　定价：14.50元

版权所有,不得翻印;所购教材,如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请与当地教材供应部门联系调换。

组编前言

当您开始阅读本书时，人类已经迈入了二十一世纪。

这是一个变幻难测的世纪，这是一个催人奋进的时代。科学技术飞速发展，知识更替日新月异。希望、困惑、机遇、挑战，随时随地都有可能出现在每一个社会成员的生活之中。抓住机遇，寻求发展，迎接挑战，适应变化的制胜法宝就是学习——依靠自己学习、终生学习。

作为我国高等教育组成部分的自学考试，其职责就是在高等教育这个水平上倡导自学、鼓励自学、帮助自学、推动自学，为每一个自学者铺就成才之路。组织编写供读者学习的教材就是履行这个职责的重要环节。毫无疑问，这种教材应当适合自学，应当有利于学习者掌握、了解新知识、新信息，有利于学习者增强创新意识、培养实践能力、形成自学能力，也有利于学习者学以致用、解决实际工作中所遇到的问题。具有如此特点的书，我们虽然沿用了“教材”这个概念，但它与那种仅供教师讲、学生听，教师不讲、学生不懂，以“教”为中心的教科书相比，已经在内容安排、形式体例、行文风格等方面都大不相同了。希望读者对此有所了解，以便从一开始就树立起依靠自己学习的坚定信念，不断探索适合自己的学习方法，充分利用已有的知识基础和实际工作经验，最大限度地发挥自己的潜能达到学习的目标。

欢迎读者提出意见和建议。

祝每一位读者自学成功。

全国高等教育自学考试指导委员会

序　　言

本书是按照国家教委对经济、管理类大学本科高等数学（二）自学考试大纲编写的。众所周知，线性代数这一数学工具在经济科学、管理科学中有着广泛的应用。著名的投入-产出模型就是以线性代数理论为基础的。因此，学好这一门课程不仅对学习后继课程是必不可少的，而且对掌握现代经济理论并应用于实际也是很有必要的。

本书力求以通俗的语言向读者介绍线性代数最基础的知识。全书共分五章，外加一个附录。第一章的内容以行列式为中心，介绍了行列式的概念、性质与计算以及用克莱姆法则求解线性方程组的方法。第二章介绍了矩阵这一十分有用的工具，讨论了矩阵的运算及初等变换。第三章以矩阵为工具，进一步讨论了线性方程的求解与解的结构。第四章引进了线性空间，介绍了一些最常用的基本概念与方法。第五章简要地介绍了矩阵特征值理论与实二次型的理论。学完这些内容，可为读者以后进一步的学习打下必要的基础。考虑到实用的需要，我们在附录中介绍了几种常用的线性代数的数值方法。读者可用这些方法借助于电子计算机来处理实际工作中遇到的问题。读者只要具备高中数学的基础知识就可阅读本书，为了使对中学数学已比较生疏了的读者能顺利地阅读本书，书的开头还安排了预备知识。

在内容的编写上，我们力求做到科学性与通俗性结合，由浅入深、逐步提高。对一些比较困难的概念，尽量多举例子。对一些复杂的证明都打上了 * 号。初学者只需记住结论、弄清含义就可以了。本书中个别章节也打上了 * 号，对这些章节初学者可以跳过

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

去，也不作考试的要求。本书除了可供经济、管理类自学考试考生作教材外，也可供经济、管理类的大学生作参考书。

编　者

1987.12.

目 录

原书缺页

对同一个和式，有时因为运算的需要，可以采用不同的表示方式，主要有两种变化：

第一种：$\sum_{i=1}^{n} a_i$ 与 $\sum_{j=1}^{n} a_j$ 都表示和式 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$，因此 $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_j$. 在这种变化中，虽然足标符号不同，一个用 i，另一个用 j，但实际上这只是足标符号形式上的不同，实质上都表示从 a_1 一直加到 a_n，因此是一回事.

第二种：$\sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1}$ 与 $\sum_{i=1}^{n} a_i$ 看上去似乎不一样，但仔细算一下，发现在 $\sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1}$ 中，$i = 0$ 时 $a_{i+1} = a_1$，因此求和仍从 a_1 开始；终足标 $i = n - 1$ 时 $i + 1 = (n - 1) + 1 = n$，因此求和也到 a_n 为止. 这表明 $\sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} = \sum_{i=1}^{n} a_i$. 在这种变化中，求和号上、下方的数字变化了，但由于通项 a_i 写成了 a_{i+1}，最后结果仍不变. 我们还可以举出这类变化的其他例子：

$$\sum_{i=2}^{n+1} a_{i-1} = \sum_{i=1}^{n} a_i, \quad \sum_{i=3}^{n+2} a_{i-2} = \sum_{i=1}^{n} a_i,$$

等等.

总之，初学者切不要被形式上的不同所迷惑. 关键是要看被求和的项究竟是什么. 读者如一时搞不清楚，可将和号展开写成具体的式子，从而认定其异同.

在本课程中，有时还要采用双重和号. 双重和号的使用往往比较复杂，我们需要熟悉它.

设有 mn 个数 a_{ij} ($i = 1, 2, \cdots, m$; $j = 1, 2, \cdots, n$)，其和记为

$$\begin{aligned} S = {} & a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n} + \\ & a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n} + \\ & \cdots + \\ & a_{m1} + a_{m2} + \cdots + a_{mn}. \end{aligned}$$

先用单和号将每一行之和写出，如第一行为 $\sum_{j=1}^{n} a_{1j}$，第二行为

$\sum_{j=1}^{n} a_{2j}$，等等，于是

$$S = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} + \sum_{j=1}^{n} a_{2j} + \cdots + \sum_{j=1}^{n} a_{mj}.$$

对这个和式又可写为

$$S = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right), \tag{1}$$

或记为

$$S = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.$$

当然在求 S 的过程中，我们也可以先对列项加然后再求和. 如第一列可写为 $\sum_{i=1}^{m} a_{i1}$，第二列可写为 $\sum_{i=1}^{m} a_{i2}$，等等，于是

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^{m} a_{i1} + \sum_{i=1}^{m} a_{i2} + \cdots + \sum_{i=1}^{m} a_{in} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}. \end{aligned} \tag{2}$$

将(1)式与(2)式相比较得到下列等式：

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}. \tag{3}$$

注意(3)式中两边的 $\sum$，它表明此时求和号的次序是可以交换的.

下面我们来看一个稍为复杂一点的双重和式. 设

$$\begin{aligned} S = {} & c_{21} + \\ & c_{31} + c_{32} + \\ & c_{41} + c_{42} + c_{43} + \\ & \cdots + \\ & c_{n1} + c_{n2} + c_{n3} + \cdots + c_{n,n-1}. \end{aligned}$$

先对行写出和式可求得

$$S = \sum_{k=1}^{1} c_{2k} + \sum_{k=1}^{2} c_{3k} + \cdots + \sum_{k=1}^{n-1} c_{nk} = \sum_{i=2}^{n} \sum_{k=1}^{i-1} c_{ik}.$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

再对列先写出和式有

$$S=\sum_{i=2}^{n}c_{i1}+\sum_{i=3}^{n}c_{i2}+\cdots+\sum_{i=n}^{n}c_{i,n-1}=\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=k+1}^{n}c_{ik}.$$

于是又可得到等式：

$$\sum_{i=2}^{n}\sum_{k=1}^{i-1}c_{ik}=\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=k+1}^{n}c_{ik},\tag{4}$$

这个等式我们以后要用到.

二、复数

在中学里我们已经学习过有理数、实数、复数的概念.所有有理数全体我们称为**有理数域**,所有实数全体我们称为**实数域**,所有复数全体则称之为**复数域**.

所谓复数域,是指形如

$$a+b\mathrm{i}\quad(\mathrm{i}=\sqrt{-1},\ a,b\text{ 为实数})$$

的数的全体.任意两个复数的加、减、乘、除(零不能作除数)所得的数仍是复数,任意一个复数的开方也仍是复数.

复数域包含实数域,实数域包含有理数域.

复数 $a+b\mathrm{i}$ 中的 a 称为**实部**,b 称为**虚部**.2 个复数相等当且仅当它们的实部相等,虚部也相等.换句话说,要 $a+b\mathrm{i}=c+d\mathrm{i}$,有且只有 $a=c,b=d$.

复数 $a+b\mathrm{i}$ 中若 $a=0$, $b\neq0$, 则称它为纯虚数;若 $b=0$,就成了实数.

复数 $a+b\mathrm{i}$ 的**绝对值**定义为

$$|a+b\mathrm{i}|=\sqrt{a^2+b^2},$$

绝对值有时又称为"**模长**".

复数 $a-b\mathrm{i}$ 称为复数 $a+b\mathrm{i}$ 的**共轭复数**.若记 z 是任意一个复数,它的共轭复数记之为 $\bar{z}$.如

$$\bar{\mathrm{i}}=-\mathrm{i},\quad \overline{-\mathrm{i}}=\mathrm{i};$$

$$\overline{3+2\mathrm{i}}=3-2\mathrm{i},\quad \overline{3-2\mathrm{i}}=3+2\mathrm{i};$$

$$\overline{\sqrt{2}-\sqrt{3}\,\mathrm{i}}=\sqrt{2}+\sqrt{3}\,\mathrm{i},\quad \overline{\sqrt{2}+\sqrt{3}\,\mathrm{i}}=\sqrt{2}-\sqrt{3}\,\mathrm{i}.$$

显然一个复数的共轭复数的共轭复数就是它自身,即

$$\overline{\overline{z}} = z.$$

一个复数 $z = a + b\mathrm{i}$ 是实数当且仅当 $b = 0$,这时 $z = a + 0 \cdot \mathrm{i} = a - 0 \cdot \mathrm{i} = \overline{z}$.反过来若 $z = \overline{z}$,则 $a + b\mathrm{i} = a - b\mathrm{i}$,由复数相等的条件知 $b = -b$,因此 $b = 0$,即这时 z 是一个实数.于是我们有下列命题:

一个复数 z 是实数当且仅当 $z = \overline{z}$.

一个复数与它的共轭复数间还有如下关系:

(i) *一复数与它的共轭复数相加等于实数.*

事实上若 $z = a + b\mathrm{i}$,则 $z + \overline{z} = (a + b\mathrm{i}) + (a - b\mathrm{i}) = 2a$,是实数.

(ii) *一复数与其共轭复数的乘积等于实数.*

事实上若 $z = a + b\mathrm{i}$,则 $z \cdot \overline{z} = (a + b\mathrm{i}) \cdot (a - b\mathrm{i}) = a^2 - (b\mathrm{i})^2 = a^2 + b^2$,是实数,且等于 $|z|$ 的平方.

三、充分必要条件

在数学命题的叙述中,常常采用"充分必要条件"这个术语.所谓"充分必要条件"实际上由两部分组成:一是**"充分条件"**,即这个条件如满足,就足以保证命题的正确性;二是"**必要条件**",即这个条件虽然不一定能保证命题的正确性,但它是必不可少的.换句话说,如果缺少这个条件,命题就肯定不成立.下面我们用具体的例子来说明:

命题 *一个三角形是等腰三角形的充分必要条件是它的两个底角相等.*

这个命题有两层意思.一是如果一个三角形的两底角相等,则它一定是等腰三角形.也就是说两底角相等是三角形为等腰三角形的充分条件.第二层意思是说若一个三角形是等腰三角形,则它的两底角必相等,即两底角相等是三角形为等腰三角形的必要条件.充分必要条件常简称为**充要条件**.

要证明一个条件是充分而且必要的,必须从两方面进行论证.一方面必须证明条件是充分的,即若这个条件成立,则结论必正确.另一方面必须证明条件是必要的,即证明若结论为真,则条件必成立.

或者证明若条件不成立,结论必不成立.在许多场合,一个条件不一定是结论的充分必要条件,可能只是充分条件,也可能只是必要条件.

命题 一个四边形是正方形的必要条件是四边相等.

在这个命题中,四边相等是一个四边形成为正方形所必不可少的,因而是必要条件.但是四边相等的四边形并不一定是正方形,它可能是菱形.因此四边相等并不是四边形成为正方形的充分条件.

命题 一个四边形为平行四边形的充分条件是它的4个角相等.

这里4个角相等保证了一个四边形一定是平行四边形,因而是充分条件.但是平行四边形的4个角不一定相等,或者说,4个角不相等的四边形也有可能是平行四边形(只需两对对角相等就可以了).因此这个条件即4个角相等并不是必要条件.

充分必要条件还有另外一种说法,即**"当且仅当"**.比如上面的第一个命题可说为:一个三角形为等腰三角形当且仅当它的两底角相等.这里"当"的意思即是条件的充分性,就是说当这个条件满足时,结论必成立;"仅当"的意思是条件的必要性,即如果条件不满足,结论必不成立.换句话说,结论"仅仅"在这个条件下成立.

四、数学归纳法

数学归纳法是用来论证数学命题的一种常用的方法.

用数学归纳法来论证数学命题,一般分两步来做:首先证明命题对 $n=1$ 正确,这一步叫归纳基础;第二步,假设命题对 $n=k$ 正确(不必证明),从这个假设(又称归纳假设)出发,证明命题对 $n=k+1$ 也正确.这时便完成了命题的证明.

例1 用数学归纳法证明下列公式对一切 n 均成立:

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1).$$

证 $n=1$ 时,上式左边 $=1$,右边 $=\frac{1}{2}\times1\times(1+1)=1$.因此公式成立.

现假设 $n=k$ 时公式成立，即 $1+2+3+\cdots+k=\frac{1}{2}k(k+1)$.
当 $n=k+1$ 时，

$$1+2+3+\cdots+k+(k+1)=(1+2+3+\cdots+k)+(k+1).$$

由假设，$1+2+3+\cdots+k=\frac{1}{2}k(k+1)$，因此

$$\begin{aligned}1+2+3+\cdots+(k+1)&=\frac{1}{2}k(k+1)+(k+1)\\&=\frac{1}{2}(k+1)(k+2)\\&=\frac{1}{2}(k+1)[(k+1)+1],\end{aligned}$$

即当 $n=k+1$ 时，公式也成立，因而命题得证.

有时归纳基础可能不从 1 开始，比如可能从 $n=2$ 开始，这时就首先需要论证 $n=2$ 时命题的正确性，然后再假设 $n=k$ 时命题正确，进而证明 $n=k+1$ 时也正确.下面的命题就是这样的例子：

命题　当 $n\geqslant 3$ 时，$2^n>2n$.

这时归纳基础要从 $n=3$ 开始，$n=3$ 时 $2^3=8, 2\times 3=6, 8>6$，因此 $2^3>2\times 3$.然后假定 $n=k$ 时有 $2^k>2k$.再来看 $n=k+1$ 时的情形.$2^{k+1}=2\cdot 2^k=2^k+2^k$.由假定 $2^k>2k$，因此 $2^k+2^k>2k+2k$.由于 $k\geqslant 3$ 时，$2k>2$，故

$$2k+2k>2k+2=2(k+1).$$

于是 $2^{k+1}>2(k+1)$.命题得证.

在用归纳法论证的过程中，也可用等价的第二数学归纳法的说法：即在归纳基础论证完了后，假设对小于 k 的每个自然数 n，命题成立，然后论证 $n=k$ 时命题也成立.有时甚至说得更简单：假设对小于 n 的每个自然数命题成立，接着论证命题对 n 也成立.读者在阅读本书时需要注意这些变化.

五、反证法

反证法是又一种论证数学命题的常用方法.在论证数学命题时有时从命题的条件直接推出结论有困难，或比较繁，就往往采用反证法.所谓反证法就是先假设结论不真，然后一步一步引出矛盾.产生

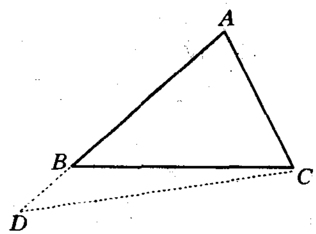
矛盾的根源是因为否定了结论，也就是说结论应该是对的．下面我们举例来说明这一点．

例2　设在$\triangle ABC$中，$\angle C>\angle B$，求证：$AB>AC$，即大角所对的边较大．

证　用反证法．假设$AB\leqslant AC$，分两种情况来讨论．

第一种情形：若$AB=AC$，则$\triangle ABC$为等腰三角形，因此有$\angle B=\angle C$(等腰三角形底角相等)．这与已知条件$\angle C>\angle B$矛盾．因此这种情形不可能出现．

第二种情形：若$AB<AC$，则在AB延长线上取一点D使得$AD=AC$，连接DC(如图)．因为$AD=AC$，因此$\triangle ADC$是等腰三角形，它的两底角应相等，即$\angle ADC=\angle ACD$．另一方面$\angle ABC$是$\triangle BDC$的外角，因此



$$\angle ABC>\angle ADC$$

(三角形任一外角大于不相邻的内角)．由于$\angle ADC=\angle ACD$，故

$$\angle ABC>\angle ACD.$$

又$\angle ACD>\angle ACB$，从而

$$\angle ABC>\angle ACB.$$

这与已知条件$\angle ABC<\angle ACB$矛盾．因此我们的假设$AB<AC$不正确．总而言之，无论$AB=AC$或$AB<AC$都将导致矛盾，因此只可能$AB>AC$．这就证明了例题．

在上述举例中，首先假定结论不正确，即$AB\leqslant AC$．然后分两种情况一一推出矛盾，从而说明原先的假设是不能成立的．这就从反面证明了结论．有时否定结论后可能只有一种情形需要加以论证，有时需要就多种情形加以论证，这要具体情况具体分析．

第一章　行　列　式

§1.1　行列式的定义

在许多实际问题,包括经济学的问题中,人们常常会碰到求解线性方程组的问题.所谓线性方程组是指一组含有若干个未知数的一次方程式.我们在中学里已经学过如何求一元一次方程、二元一次方程组及三元一次方程组的解.现在研究由 n 个未知数组成的一次方程组.令 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是 n 个未知数,一个 n 元一次方程组(或称 n 元线性方程组)的一般式是这样的:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $a_{ij}, b_i (i = 1,2,\cdots,n; j = 1,2,\cdots,n)$ 都是常数.

(1) 式也称为 n 元线性方程组的标准式.任何一个经过移项、合并同类项运算最后都能化为形如(1)式的方程组都称为线性方程组.比如方程组

$$\begin{cases} 3y + 5 = -6x - 4, \\ 2x = 3z, \\ 7 + 3x = 4x + y + z \end{cases}$$

经过移项与合并同类项可以化为如下形状:

$$\begin{cases} 6x + 3y \qquad = -9, \\ 2x \qquad - 3z = 0, \\ \ \ x + y + \ \ z = 7. \end{cases}$$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com