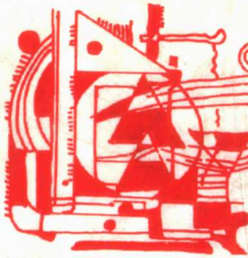

SHU XUE
AO LIN PI KE
JIAO CHENG

数学奥林匹克教程

叶军 著

湖南师范大学出版社

SHU XUE
AO LIN PI KE
JIAO CHENG

数学奥林匹克教程

数学奥林匹克教程

叶 军 著

湖南师范大学出版社

内 容 提 要

全书共10章44个专题，介绍了奥林匹克数学的主要内容。书中大部分问题引自国际国内的赛题和有关学术论文，也有一部分是作者自编的，有相当一部分题目在解完后还进行了引伸或进一步的探讨。此外，本书各章节均配置了适量的习题，章末附有习题简解或提示或答案。

本书为中学生数学竞赛培训读物，也可以作为高等师范院校数学系开设相应课程的数学用书。

数学奥林匹克教程

叶 军 著

责任编辑 周玉波

湖南师范大学出版社出版发行
（长沙市岳麓山）
湖南省新华书店经销　　望城县湘江印刷厂印刷
850×1168 32开 30.25印张 759千字
1998年7月第1版 2000年6月第3次印刷
印数：16251—21300册
ISBN7—81031—657—5/O·032
定价：28.00元

序

临近世纪之末，人类在科学技术上取得了飞速的进步，不但推动世界经济的发展，也推动着社会的变革、人类思维方式的变革和人类文明智慧的大提高。

在体育竞赛方面，曾有专家预测：男子百米赛跑的纪录难得少于10秒针，若要突破10秒大关，不光是靠体力和技巧，而且要靠天才。如今，10秒大关已被打破，这是否可以认为20世纪人类体智达到了一个新的高度呢！在智力竞赛方面，从1959年第一届IMO到现在已近四十年了，它的历程正好纪录了20世纪后半叶人类在数学领域的进展和提高。这是因为：尽管进赛场的是中学生，而在他们的背后是各国的数学家，我们国家也是如此，从老一辈的数学家华罗庚、苏步青先生，以及后来王元、裘宗沪、谷超豪等先生，再到晚一些的中青年数学工作者，都为中国青少年数学素质的提高，为各类数学竞赛的成功作出了卓越的贡献，为中华民族争得了很高的荣誉。同时，也取得了一大批数学竞赛的研究成果。《数学竞赛研究教程》、《高中数学竞赛名师讲座》等著作相继问世，它们都是各具特色、水平很高的竞赛教材和参考书，为中学生参加国内外数学竞赛，特别是为参加国际数学奥林匹克作出了贡献。

而今，叶军同志的《数学奥林匹克竞赛教程》即将问世，这又是一本新颖独特的竞赛数学著作，是作者结合近年来为参赛学生讲课和辅导的实践，吸取国内外数学竞赛的成功经验，在自己对一些问题长期钻研并取得一定成果的基础上写成的，它的起点比较高，

适用于参加第二轮以后比赛的学生，也可作为高级教练员的参考书。此书的出版，将进一步推进我国竞赛数学的理论研究和应用研究，为跨世纪数学人才的培养和选拔发挥自己独到的作用。

郭青峰

1998年4月

前 言

数学竞赛始于1894年(匈牙利),经过百余年来的发展,已逐渐演变出了一门特殊的数学学科——竞赛数学。这一学科涉及到数学竞赛的内容、思想和方法;也涉及到数学竞赛教育和数学课外教育的本质、方法、规律和途径问题,课外学习与课内学习的关系问题,普及与提高问题,命题和解题研究问题等等。

本书根据笔者多年参加数学竞赛培训、命题及学术研究积累的大量解题经验、方法以及长期为湖南师范大学附中理科实验班上课的讲稿精心编写而成。它融竞赛数学的理论与方法为一体,各章节以专题的形式相对独立。有的专题以方法为主展开讨论,是方法型专题;有的专题以某知识点为线索引出解题方法与技巧,是知识方法型专题。因此,本书提供了竞赛数学的主要内容,书中各专题的重点并不在于增添许多新的知识,而是鼓励学生灵活运用某些知识去解题。

数学竞赛主要是解题的竞赛,竞赛培训必须有大量解题训练。因此,在本书的10章44个专题中配备了大量的例题与习题。考虑到中学生朋友的需要,其中既有较为容易、较为常见的老问题,用以说明解题方法;也有较为困难、较为少见的新问题,供作研究与探讨。其中有许多问题是笔者的一些研究成果,也有一些取自有关杂志上的论文。随着时间的推移,新题又会变为"陈题",这正反映了数学的发展与普及。

正值本书出版之机,我向热情为本书题词的湖北省数学会理

事长、著名数学家路见可教授和为本书作序的湖南省数学会常务副理事长、湖南省奥林匹克竞赛选拔委员会数学分会主任郭青峰教授致以崇高的谢意。感谢我的老师李求来教授，他在百忙中审阅了全部手稿，并提出了许多修改意见。湖南师范大学出版社为本书快速、高质量的出版给予了极大的支持，在此一并表示深切的谢意。

书中有相当一部分问题的解法与探讨出自笔者之手，也许这些解法不是最佳的，对问题的认识也还不够深入，热忱欢迎专家和广大读者批评指正。

叶　军

1998 年春于湖南师范大学

目 录

第一章 式的恒等变换…………………………………………(1)

§1—1 式的恒等变换方法与技巧……………………………(1)

§1—2 和的一些重要恒等变换式及应用 ………………(24)

§1—3 反三角函数恒等变换式及应用 …………………(32)

§1—4 Abel 恒等式及应用 ……………………………………(40)

§1—5 Lagrange 插值恒等式及应用 ……………………(55)

§1—6 二项式定理与组合恒等式的证明 ………………(78)

§1—7 差分恒等变换及应用 …………………………………(85)

习题简答与提示 ………………………………………(94)

第二章 函数……………………………………………………(107)

§2—1 函数的一般概念…………………………………………(107)

§2—2 函数的图象及应用……………………………………(115)

§2—3 函数的性质及应用……………………………………(129)

§2—4 函数的值域与极值(最值)…………………………(147)

§2—5 函数的迭代…………………………………………………(196)

§2—6 函数方程……………………………………………………(213)

§ 2—7　高斯函数[x]及应用 …………………………… (234)
　　　　习题简答与提示……………………………… (247)

第三章　数列……………………………………………… (258)
§ 3—1　和积裂项法及应用……………………………… (258)
§ 3—2　求递归数列的通项……………………………… (263)
§ 3—3　特征根方法及其逆方法的应用………………… (283)
§ 3—4　数列的性质(一)………………………………… (301)
§ 3—5　数列的性质(二)………………………………… (319)
　　　　习题简答与提示……………………………… (351)

第四章　不等式…………………………………………… (360)
§ 4—1　不等式的重要证明方法与技巧………………… (360)
§ 4—2　不等式与多变量函数极值……………………… (378)
§ 4—3　一些著名不等式及应用………………………… (395)
§ 4—4　几何不等式……………………………………… (436)
　　　　习题简答与提示……………………………… (478)

第五章　复数……………………………………………… (484)
§ 5—1　复数的一般概念………………………………… (484)
§ 5—2　复数与不等式…………………………………… (505)
§ 5—3　复数与三角函数………………………………… (530)
§ 5—4　复数与几何……………………………………… (547)
　　　　习题简答与提示……………………………… (575)

第六章　多项式…………………………………………… (581)
§ 6—1　一元多项式的运算与恒等……………………… (581)
§ 6—2　多项式的整除性………………………………… (588)

§ 6—3　多项式的根…………………………………（600）
习题简答与提示………………………………（626）

第七章　初等几何（上）…………………………（631）
§ 7—1　平面几何（一）…………………………（631）
重点内容与方法……………………………（631）
§ 7—2　平面几何（二）…………………………（663）
定值极值与轨迹……………………………（663）
§ 7—3　平面几何（三）…………………………（676）
几何变换……………………………………（676）
习题简答与提示………………………………（693）

第八章　初等几何（下）…………………………（696）
§ 8—1　立体几何（一）…………………………（696）
重点内容与方法……………………………（696）
§ 8—2　立体几何（二）…………………………（725）
多球相切问题的解法………………………（725）
§ 8—3　解析几何（一）…………………………（733）
直线型问题…………………………………（733）
§ 8—4　解析几何（二）…………………………（746）
二次型问题…………………………………（746）
习题简答与提示………………………………（764）

第九章　初等数论…………………………………（771）
§ 9—1　整数及其整除性…………………………（771）
§ 9—2　同余理论及应用…………………………（790）
§ 9—3　不定方程…………………………………（820）
§ 9—4　数的进位制及应用………………………（844）

习题简答与提示……………………………………（853）

第十章　组合数学中的若干专题……………………………（856）
§10—1　集合问题……………………………………（856）
§10—2　两个重要原理………………………………（874）
§10—3　计数方法……………………………………（885）
§10—4　图论方法……………………………………（917）
习题简答与提示……………………………（939）

附录一　国际数学奥林匹克简介………………………（948）
附录二　中国数学奥林匹克简介………………………（955）

第一章　式的恒等变换

我们知道，任何一个恒等式均由若干个解析式构成．解析式是中学数学的重要内容之一，也是研究函数、方程、不等式的基础，数学的其他各分支学科均离不开解析式的恒等变换．因此，熟练地掌握一些式的恒等变形规律是学好代数及相关学科的前提．

§1—1　式的恒等变换方法与技巧

一、式的恒等的一般概念

定义 1　在给定的数集中，使一个解析式有意义的字母的值，称为字母的允许值．字母的所有允许值组成的集合称为这个解析式的定义域．对于定义域中的数值，按照解析式所包含的运算所得出的值，称为解析式的值，这些值的全体所组成的集合，称为解析式的值域．

定义 2　如果两个解析式 A、B，对于它们定义域的公共部分（或公共部分的子集）内的一切值，它们的值都相等，那么称这两个解析式恒等，记作 $A = B$.

两个解析式恒等的概念是相对的．同样的两个解析式在它们各自的定义域的某一个子集内是恒等的，但在另一个子集内可能不恒等．例如，$\sqrt{x^2} = x$，在 $x \geqslant 0$ 时成立，但在 $x < 0$ 时不成立．

因此，在研究两个解析式恒等时，一定要首先弄清楚它们在什么范围内恒等．

定义 3　把一个解析式变形成另一个与它恒等的解析式，这种变形称为恒等变换．

解析式的变形，可能引起定义域的变化。如 $\lg x^2$ 的定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，$2\lg x$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，因此，只有在两个定义域的公共部分 $(0,+\infty)$ 内，才有恒等式 $\lg x^2=2\lg x$．由 $\lg x^2$ 变形为 $2\lg x$ 时，定义域缩小了；反之，由 $2\lg x$ 变形为 $\lg x^2$ 时，定义域扩大了．这种由恒等变换引起解析式的定义域的变化，对研究方程和函数等问题也十分重要．(由于方程的变形不全是式的恒等变形，但与式的恒等变形有类似之处，因此，在下面的问题中，我们把方程的恒等变形与式的恒等变形结合起来讨论)

例 1　求方程

$$\sqrt{x^2-p}+2\sqrt{x^2-1}=x$$

的所有实根，其中 p 是一个实参数．

解　若 $p<0$，则

$$\text{方程左边}\geqslant\sqrt{x^2-p}>|x|\geqslant x.$$

此时原方程无实数解，故可设 $p\geqslant 0$.

原方程即

$$\sqrt{x^2-p}=x-2\sqrt{x^2-1},$$

两边平方，得　$x^2-p=x^2+4(x^2-1)-4x\sqrt{x^2-1}$,

整理，得　$4x\sqrt{x^2-1}=4(x^2-1)+p$,

两边再平方，得

$$16x^2(x^2-1)=16(x^2-1)^2+p^2+8p(x^2-1),$$

整理，得　$x^2=\dfrac{(p-4)^2}{8(2-p)}$.

因 $x\in R^+$，故 $p<2$，即 $0\leqslant p<2$.

$$\therefore \quad x=\frac{4-p}{\sqrt{8(2-p)}}.$$

把上式代入原方程并化简,得

$$|3p-4|=4-3p \Leftrightarrow 3p-4 \leqslant 0.$$

$\therefore$ 当且仅当 $0 \leqslant p \leqslant \frac{4}{3}$ 时,原方程有实根

$$x=\frac{4-p}{\sqrt{8(2-p)}}.$$

例2 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是实常数, x 是实变数,且

$$f(x)=\cos(a_1+x)+\frac{1}{2}\cos(a_2+x)+\frac{1}{4}\cos(a_3+x)+\cdots +\frac{1}{2^{n-1}}\cos(a_n+x).$$

已知 $f(x_1)=f(x_2)=0$,求证 $x_2-x_1=m\pi, m \in Z$.

证 首先证明 $f(x)$ 不恒等于零.

事实上,

$$f(-a_1)=1+\frac{1}{2}\cos(a_2-a_1)+\frac{1}{4}\cos(a_3-a_1)+\cdots +\frac{1}{2^{n-1}}\cos(a_n-a_1) \geqslant 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\cdots-\frac{1}{2^{n-1}} =\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}>0.$$

即 $f(-a_1) \neq 0$,从而 $f(x) \not\equiv 0$.

其次,应用加法定理将 $f(x)$ 恒等变形,得

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}}(\cos a_k \cos x-\sin a_k \sin x) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} \cos a_k\right) \cos x-\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} \sin a_k\right) \cdot \sin x \\ &= A \cos x-B \sin x. \end{aligned}$$

其中 $A=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\cos a_k, B=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\sin a_k$.
由于 $f(x)\neq 0$,故 A、B 不同为零.

由 $f(x_1)=f(x_2)=0$,得关于 A,B 的方程组

$$\begin{cases}A\cos x_1-B\sin x_1=0,\\ A\cos x_2-B\sin x_2=0,\end{cases}$$

有非零解,这等价于

$$\begin{vmatrix}\cos x_1 & -\sin x_1\\ \cos x_2 & -\sin x_2\end{vmatrix}=0.$$

即 $\quad \sin x_1\cos x_2-\cos x_1\sin x_2=0,$

亦即 $\quad \sin(x_1-x_2)=0,$

从而 $\quad x_2-x_1=m\pi, m\in Z.$

二、恒等变换的方法与技巧

恒等变换的目的是使问题变得简单,便于求解.因此,式的恒等变换是根据需要进行的,根据不同问题的特点,有其不同的规律性.

1. 分类变换

当式的变换受到字母变值的限制时,可对字母的取值进行分类,然后对每一类进行变换,以达到求解的目的.分类变换方法适用于式的化简与方程(组)的化简、求解.

例 1 当 x 取什么样的实数值时,下列等式成立:

(a) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\sqrt{2}$;

(b) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=1$;

(c) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=2$.

解 我们来求解更一般的方程:

$$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=m.(m\geqslant 0).$$

记方程左边为 $f(x)$，则

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{\frac{1}{2}(2x-1+2\sqrt{2x-1}+1)} \\
&\quad + \sqrt{\frac{1}{2}(2x-1-2\sqrt{2x-1}+1)} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\left|\sqrt{2x-1}+1\right| + \frac{\sqrt{2}}{2}\left|\sqrt{2x-1}-1\right| \\
&= \begin{cases} \sqrt{2}\cdot\sqrt{2x-1}, & x \geqslant 1; \\ \sqrt{2}, & \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}
\end{aligned}
$$

由此可知，当 $m=\sqrt{2}$ 时，原方程的解集为 $\left[\frac{1}{2},1\right]$；当 $m\in[0,\sqrt{2})$ 时，解集为 $\varnothing$；当 $m\in(\sqrt{2},+\infty)$ 时，原方程变形为

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{2x-1}=m,$$

解得 $$x=\frac{1}{4}(m^2+2).$$

即当 $m\in(\sqrt{2},+\infty)$ 时，原方程的解集为 $\left\{\frac{1}{4}(m^2+2)\right\}$.

例 2　解方程组

$$
\begin{cases}
x+y+z=a, & ① \\
x^2+y^2+z^2=b^2, & ② \\
xy=z^2. & ③
\end{cases}
$$

其中 a,b 是已知实数. 问当 a,b 满足什么条件时，x,y,z 是相异的正数.

解　由 ② + 2 × ③ 得：

$$(x+y+z)(x+y-z)=b^2. \qquad ④$$

(i)　当 $a=0, b\neq 0$ 时，由 ①、④ 知原方程组无解.

(ii)　当 $a=0, b\neq 0$ 时，易知原方程组有唯一解：

$$x=y=z=0.$$