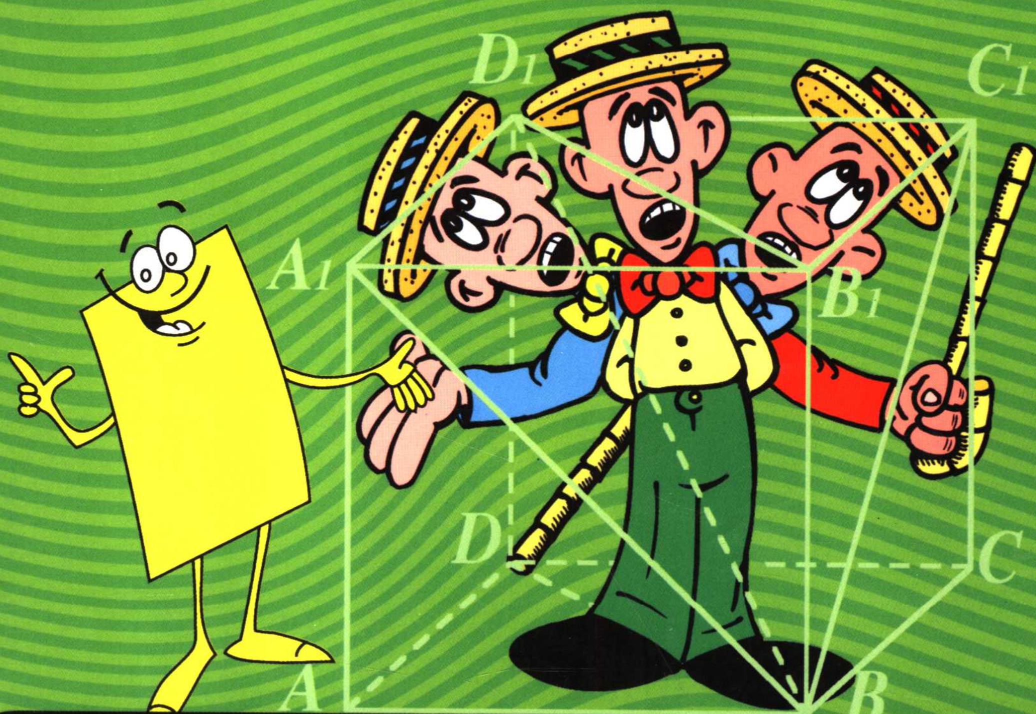
高中精学巧练丛书

上海市 松江二中 编写



高二数学

（试验本）

精要点拨与能力激活

丛书主编／乔世伟　副主编／徐界生　本册主编／孙金明

华东理工大学出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

高中精学巧练丛书

高二数学(试验本)

精要点拨与能力激活

上海市松江二中编写

丛书主编　乔世伟
副 主 编　徐界生
本册主编　孙金明

华东理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高二数学(试验本)精要点拨与能力激活/孙金明主编.—上海:华东理工大学出版社,2004.9
(高中精学巧练丛书/乔世伟主编)
ISBN 7-5628-1595-X

Ⅰ.高... Ⅱ.孙... Ⅲ.数学课-高中-教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 081762 号

高中精学巧练丛书
高二数学(试验本)精要点拨与能力激活
上海市松江二中编写　丛书主编　乔世伟　副主编　徐界生　本册主编　孙金明

出版	华东理工大学出版社	开本	787×1092　1/16
社址	上海市梅陇路 130 号	印张	13
邮编	200237　电话(021)64250306	字数	324 千字
网址	www.hdlgpress.com.cn	版次	2004 年 9 月第 1 版
发行	新华书店上海发行所	印次	2006 年 6 月第 3 次
印刷	常熟市华顺印刷有限公司	印数	16 081－25 110 册

ISBN 7－5628－1595－X/O·117　　定价:16.00元

前　言

本丛书可谓我校《高中教学精华丛书》的新生代.

《高中教学精华丛书》自 1996 年 8 月初版以来,即受到广大中学师生的普遍欢迎,经多次重版共销售近百万册.此后,随着教改形势的发展,教材及高考命题的变化,为进一步提高丛书质量,满足读者要求,我们于 2001 年 6 月对本丛书作了相当的修改增删,以"修订版"的新貌出现在各家书店的图书专柜上,再一次赢得了广大读者的嘉许.

然而,时代的演变,教改的推进是一个生生不息的过程,永远不允许以服务广大高中师生、服务高中教学为宗旨的我校丛书编写停步不前,只能是与时俱进,以变应变.上海市新一轮课改提出了"以国际化大都市为背景,以德育为核心,以培养学生创新精神和实践能力为重点,以学习方式的改变为特征"的明确要求,市级的各科教学的新编、新选教材闻风而动,相继进入课堂,这对我们来说是一次重编新书的机遇,也是一次探索新路的挑战,更是一次顺应高考改革方向,寻取实战效果的尝试.借百年老校之传承,积数载教改之经验,凭优良师资之实力,受二期课改之驱动,我们群策群力,集思广益,终于促成新生代婴儿的呱呱坠地,命其名为《高中精学巧练丛书》.

在以往的《高中教学精华丛书》的各个分册中,我们曾力求分别体现其实用性、针对性、侧重性、贴近性、全面性、启发性,以期适应自主学习、自主发展、应对考查、应战高考的需要,后又加大"引导性"、"示范性"的力度,掌握了变中求胜的先机.现在看来,以上种种仍需择优融入新编丛书之中.体例不同了,编排不同了,内容不同了,题路不同了,但出新并不意味着一概弃旧,一切都遵循**优化整合、发展创新**的原则,落实**能力立意,应用为要**的措施,注重**夯实基础,促进理解;循序渐进,同步操练;激活思维,拓展视野;加强研究,提升能力**……在这个大前提下,本丛书的各分册编写者各展所长,各显其能,既有共性的渗透,又有个性的发挥.从编写思路到实例举证,文理各科基本上都自有特色.由于这些特色源自于在新的教学形势高考形势下致力于提高学生知识、能力、素质水平的我校第一线教师的智慧结晶,丰硕成果,必然有利于广大师生的参考和实际操作.

本丛书杀青之际,正值学校最为紧忙之时,难免有斟酌不及、考量不周之处,恳请广大读者提出批评建议,帮助我们做好今后的修订工作.谢谢.

上海市松江二中《高中精学巧练丛书》编委会

2004 年 7 月

编写说明

古人云:授人以鱼,只供一饭之需;授人以渔,则一生受用无穷.如何发挥一本参考书的长效作用,使学生阅读后,能更透彻地明白重点、难点,在掌握基本的解题思路和方法的基础上,举一反三、触类旁通,这是我们追求的目标,为配合二期课改,进一步体现培养学生的创新精神和实践能力,体现能力立意的宗旨,我们组织了一些具有丰富教学经验的特级教师和高级教师精心编写了本书.本书有以下明显的特点:

【学习导引】阐述各章各节中应掌握的知识点,进行适当的学法指导,明确知识的结构体系,并拓展知识的广度和深度.

【范例解析】精选的题目针对性强,与所学的知识密切有关,既着重基础,又注意拓展提高,还有一定量的"能力型问题".通过思路分析、点拨解题的方式,从而更好地体现学科思想与基本的解题方法,提高学生分析解决问题的能力.

【巩固练习】精选少量试题,力求题型多样,知识覆盖面广,既注意基础知识的训练,又注重综合运用能力的提高,做到知识立意与能力立意兼顾.

希望本书的出版能对数学学习起到事半功倍的作用,同时对学生学习方式的改变起到积极的作用.

本书主编孙金明.参加本书编写的教师还有金翠妹、沈会忠、王家隆、黄继红、阮晓明、戴亚宁.

由于时间比较仓促,书中难免有疏漏之处,敬请读者批评指正.

上海市松江二中数学教研组

2004.7

目　　录

第9章 行列式初步

9.1 二阶行列式

【学习导引】

1. 通过对二元线性方程组求解的讨论,引入行列式的概念.理解行列式的意义,理解行列式是表示特殊算式的记号.

2. 掌握二阶行列式展开的对角线法则:

$$\text{行列式}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

3. 会对含字母系数的二元线性方程组无解、有解及解的个数进行讨论.

二元一次方程组:$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases}$ 其中 x、y 是未知数,a_1、a_2、b_1、b_2 不全为 0.

系数行列式 $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$; $D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$; $D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$;

1° 当 $D \neq 0$ 时,方程组有惟一解 $\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} \\ y = \dfrac{D_y}{D} \end{cases}$;

2° 当 $D = 0$, $D_x = D_y = 0$ 时,方程组有无穷多解;

3° 当 $D = 0$, D_x、D_y 中至少有一个不为零,方程组无解.

【范例解析】

例 1. 将下列各式用行列式表示:

(1) $b^2 - 4ac$;　　(2) $x - \dfrac{1}{2}y$;　　(3) $x^2 + 4x + 1$.

解:(1) $b^2 - 4ac = \begin{vmatrix} b & 2a \\ 2c & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & 4 \\ ac & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b^2 & c \\ 4a & 1 \end{vmatrix} \cdots$

(2) $x - \dfrac{1}{2}y = \begin{vmatrix} x & y \\ \dfrac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{y}{2} & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -\dfrac{1}{2} \\ -y & \dfrac{x}{2} \end{vmatrix} \cdots$

(3) $x^2 + 4x + 1 = \begin{vmatrix} x & -1 \\ 1 & x+4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 4x+1 \\ -1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2+1 & x \\ -4 & 1 \end{vmatrix} \cdots$

评注:行列式是一类特定代数式的一种形式而已,凡两个积之差式皆可写成一个二阶行列式,而且形式不惟一.

例 2. 已知关于 x、y 的方程组 $\begin{cases}(m-1)x+y=1,\\ x+(m-1)y=2,\end{cases}$ 有惟一解,求实数 m 的取值范围.

解:因为方程组有惟一解,所以:

$$D=\begin{vmatrix} m-1 & 1 \\ 1 & m-1 \end{vmatrix}\neq 0,\ 即:(m-1)^2-1\neq 0$$

得:$m\neq 0$ 且 $m\neq 2$.

故:所求实数 m 的取值范围是 $(-\infty,0)\cup(0,2)\cup(2,+\infty)$

例 3. 解关于 x、y 的方程组

$\begin{cases}(m+5)x+(2m+3)y=3m+2,\\ (3m+10)x+(5m+6)y=2m+4,\end{cases}$ 并对解的情况进行讨论.

解:$D=\begin{vmatrix} m+5 & 2m+3 \\ 3m+10 & 5m+6 \end{vmatrix}=(5m^2+31m+30)-(6m^2+29m+30)$

$$=-m^2+2m=-m(m-2)$$

$$D_x=\begin{vmatrix} 3m+2 & 2m+3 \\ 2m+4 & 5m+6 \end{vmatrix}=15m^2+28m+12-4m^2-14m-12$$

$$=11m^2+14m=m(11m+14)$$

$$D_y=\begin{vmatrix} m+5 & 3m+2 \\ 3m+10 & 2m+4 \end{vmatrix}=2m^2+14m+20-9m^2-36m-20$$

$$=-7m^2-22m=-m(7m+22)$$

(i) 当 $m\neq 0$ 且 $m\neq 2$ 时,$D\neq 0$,方程组有惟一解 $\begin{cases}x=\dfrac{11m+14}{2-m},\\ y=\dfrac{7m+22}{m-2};\end{cases}$

(ii) 当 $m=2$ 时,$D=0$, $D_x\neq 0$,方程组无解;

(iii) 当 $m=0$ 时,$D=0$, $D_x=D_y=0$,方程组有无穷多解,此时原方程组为 $\begin{cases}5x+3y=2,\\ 5x+3y=2,\end{cases}$

令 $x=t\ (t\in\mathbf{R})$,则方程组的解可表示为 $\begin{cases}x=t\\ y=\dfrac{2-5t}{3}\end{cases}\ (t\in\mathbf{R})$.

评注:教材中对于二元一次方程组的解的情况给出了一个求解公式,可以从行列式角度记忆方程组有惟一解、无解、有无穷多解的情况.例 2 由条件"方程组有惟一解",只需从 $D\neq 0$ 就可得出实数 m 的取值范围;而例 3 则要求就 m 的不同取值讨论方程组解的情况,两题的依据都是二元一次方程组的行列式求解公式,这个公式也体现了行列式在解方程组中的应用.

【巩固练习】

1. 展开并化简下列行列式.

(1) $\begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ 8 & 6 \end{vmatrix}$；(2) $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ b & a \end{vmatrix}$；(3) $\begin{vmatrix} a+b & b+d \\ a+c & c+d \end{vmatrix}$.

2. 将下列各式用行列式表示.

(1) $b_2c_1+b_1c_2$；(2) $2x^2-x-3$；(3) $\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$.

3. 判别下列二元一次方程组解的情况.

(1) $\begin{cases} 4x+3y=3, \\ 5x-7y=\frac{1}{6}; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 3x-2y-1=0, \\ 2x-\frac{4}{3}y=0; \end{cases}$ (3) $\begin{cases} 2x-y+3=0, \\ x-\frac{1}{2}y+\frac{3}{2}=0. \end{cases}$

4. 解下列关于 x、y 的方程组.

(1) $\begin{cases} (a+b)x-(a-b)y=4ab, \\ (a-b)x+(a+b)y=2(a^2-b^2); \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x\cdot\cos\theta-y\sin\theta=\cos 2\theta, \\ x\cdot\sin\theta+y\cos\theta=\sin 2\theta. \end{cases}$

5. 设函数 $f(x)=\left|\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix}\right|$，求 $f(x)$的最小正周期.

6. 解下列方程.

(1) $\begin{vmatrix} x-1 & x \\ 1-x & 3-x \end{vmatrix}=0$; (2) $\begin{vmatrix} \sin x & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \cos x \end{vmatrix}=0$, $x\in[-2\pi, 2\pi]$.

7. 解下列不等式.

(1) $\begin{vmatrix} \lg(2-x) & 1 \\ \lg(x-1) & 1 \end{vmatrix}>0$; (2) $\begin{vmatrix} \arcsin x & \arccos x \\ 1 & 1 \end{vmatrix}>0$.

9.2 三阶行列式

【学习导引】

1. 掌握三阶行列式展开的对角线法则,以及按某一行(列)展开的方法.

对角线法则:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_2b_1c_3-a_1b_3c_2;$$

按第一行展开:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

其中 $A_1=\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $B_1=-\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $C_1=\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$ 分别叫做元素 a_1、b_1、c_1 的代数余子式.

总之,三阶行列式可以按其任意一行(或一列)展开成该行(或该列)元素与其对应的代数余子式的乘积之和.

三阶行列式的每一个元素的代数余子式,根据该元素的位置应加在行列式上的符号由下式给出:$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$.

2. 知道行列式的某些性质

［性质 1］ 把行列式的各行变为相应各列(称行列转置)时,其行列式的值不变.即:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

［性质 2］ 把行列式的某一行(或列)的所有元素同乘以某个数 k,等于用数 k 乘以原行列式.即:

$$\begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

［性质 3］ 如果行列式的某一行(或列)的元素都拆成前后两项,那么这个行列式的值等于分别取前项、后项为此行(或列)而其余行(或列)不变的两个行列式的和.即:

$$\begin{vmatrix} m+n & p+q & s+t \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & p & s \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} n & q & t \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

［性质 4］ 如果行列式某两行(或两列)的对应元素都相等,那么这个行列式的值必等于零.

3. 会对含字母系数的三元线性方程组无解、有解及解的个数进行讨论(类似于二元线性方程组):

(1) $D \neq 0$ 时,方程组有惟一解;

(2) $D = 0$, D_x、D_y、D_z 中至少有一个不为 0 时,无解;

(3) $D = D_x = D_y = D_z = 0$ 时,方程组无解或有无穷多解.

【范例解析】

例 1. 按第一列展开并化简行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & \sin 3\theta & \cos 3\theta \\ 1 & \sin 2\theta & \cos 2\theta \\ 1 & \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$.

解: $D = \begin{vmatrix} 1 & \sin 3\theta & \cos 3\theta \\ 1 & \sin 2\theta & \cos 2\theta \\ 1 & \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} \sin 2\theta & \cos 2\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \sin 3\theta & \cos 3\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sin 3\theta & \cos 3\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{vmatrix}$

$= \sin 2\theta\cos\theta - \cos 2\theta\sin\theta - \sin 3\theta\cos\theta + \cos 3\theta\sin\theta + \sin 3\theta\cos 2\theta - \cos 3\theta\sin 2\theta$

$= \sin\theta - \sin 2\theta + \sin\theta = 2\sin\theta - 2\sin\theta\cos\theta$

$= 2\sin\theta(1 - \cos\theta)$

评注:根据教材中三阶行列式展开可以按照某行(或列),在此据题意按第一列展开后,运用三角比的两角和差公式对各个二阶行列式的展开式进行化简.此题不仅要求对三阶行

列式的展开法则要熟悉，同时对相关的三角比公式也要非常熟练.

例 2. 解关于 x、y、z 的方程组 $\begin{cases}ax+y+z=1,\\x+ay+z=2,\\3x+(2a+1)y+3z=6,\end{cases}$ 并对方程组的解进行讨论.

解: $D=\begin{vmatrix}a&1&1\\1&a&1\\3&2a+1&3\end{vmatrix}=(a-1)^2$

$$D_x=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&a&1\\6&2a+1&3\end{vmatrix}=1-a$$

$$D_y=\begin{vmatrix}a&1&1\\1&2&1\\3&6&3\end{vmatrix}=0$$

$$D_z=\begin{vmatrix}a&1&1\\1&a&2\\3&2a+1&6\end{vmatrix}=(2a-1)(a-1)$$

$\therefore$ 当 $a\neq 1$ 时，方程组有惟一解.

$$\begin{cases}x=\dfrac{1}{1-a}\\y=0\\z=\dfrac{2a-1}{a-1}\end{cases}$$

当 $a=1$ 时，$D=D_x=D_y=D_z=0$，方程组为：

$$\begin{cases}x+y+z=1,\\x+y+z=2,\\3x+3y+3z=6,\end{cases}\quad \therefore \text{方程组无解.}$$

评注: 本题的解法类似于含有字母的二元线性方程组的解法，但是三元线性方程组解的情况又区别于二元线性方程组的解：当 $D\neq 0$ 时，方程组有惟一解；当 $D=0$，D_x、D_y、D_z 中至少有一个不为零时，三元线性方程组无解；当 $D=D_x=D_y=D_z=0$ 时，方程组有无穷多解或无解. 也就是说：惟一解、无穷解的情况同“二元线性方程组”的讨论一样，但“无解”的情况与“二元线性方程组”有所不同.

例 3. 三阶行列式具有性质：将某一行(或列)的每个元素都乘以实数 k，加到另外一行(或列)的对应元素上，得到的行列式与原行列式的值相等. 如：

$\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\ka_1+a_2&kb_1+b_2&kc_1+c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}$，运用以上性质，解方程：

$$\begin{vmatrix} x & 3x & -x \\ 3 & 2-x & 2x-1 \\ x & x+1 & x+2 \end{vmatrix}=0.$$

解： $\begin{vmatrix} x & 3x & -x \\ 3 & 2-x & 2x-1 \\ x & x+1 & x+2 \end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix} x & 0 & -x \\ 3 & -7-x & 2x-1 \\ x & 1-2x & x+2 \end{vmatrix}$（将第一列乘以 -3，加到第二列）

$=\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 3 & -7-x & 2x+2 \\ x & 1-2x & 2x+2 \end{vmatrix}$（将第一列乘以 1，加到第三列）

$=x\begin{vmatrix} -7-x & 2x+2 \\ 1-2x & 2x+2 \end{vmatrix}$（按第一行展开）

$=x\cdot(2x+2)(-7-x-1+2x)$

$=2x(x+1)(x-8)$

∴ 原方程即　$x(x+1)(x-8)=0$

∴ 方程的解为 $x_1=0$，$x_2=8$，$x_3=-1$.

评注：本题旨在考查学生的学习能力．题意要求"运用所给的性质"来解方程，也就是通过性质来简化运算，使某一行（或列）产生两个"0"，这样就将三阶行列式的运算转化为二阶行列式的运算，为解三次方程带来了方便.

【巩固练习】

1. 三元一次方程组 $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$ 的系数行列式 $D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$ 是该方程组没有实数解的什么条件？（充要、充分不必要、必要不充分）.

2. 按对角线法则展开下列三阶行列式，并化简：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} 1 & \mathrm{i} & 1+\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 1 & 0 \\ 1-\mathrm{i} & 0 & 1 \end{vmatrix}$ $(\mathrm{i}^2=-1)$；

(3) $\begin{vmatrix} w & w^2 & 1 \\ w^2 & 1 & w \\ 1 & w & w^2 \end{vmatrix}$ $(w^3=1)$;　　(4) $\begin{vmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{vmatrix}$.

3. 按第二行展开行列式 $\begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 \\ 0 & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}$，并化简.

4. 证明:把行列式某一行(或列)的所有元素同乘以一个数 k,加到另一行(或列)的对应元素上,行列式的值不变.

5. 解方程组:

(1) $\begin{cases} x+2y+3z=7, \\ 2x+3y+z=5, \\ 3x+y+2z=12; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 4x+9y-5=0, \\ 12y+28z-11=0, \\ 17x-10z-6=0; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \lg x+2\lg y+\lg z=8, \\ 3\lg x+2\lg y+\lg z=10, \\ 4\lg x+3\lg y-2\lg z=4. \end{cases}$

6. 解下列关于 x、y、z 的方程组:

(1) $\begin{cases} ax+by+cz=a-b, \\ bx+cy+az=b-c, \\ cx+ay+bz=c-a, \end{cases}$ $(a+b+c\neq 0)$;

(2) $\begin{cases} ax+by+(a+b)z=0, \\ bx+ay+(a+b)z=0, \\ x+y+2z=0. \end{cases}$

7. 分解因式 $\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

8. 证明:关于 x、y、z 的三元一次方程组 $\begin{cases} x+y+z=m+1 \\ x+my+2z=3 \\ x-y+mz=m^2 \end{cases}$ 恒有惟一解.

9. 解关于 x、y、z 的方程组 $\begin{cases} x+y+2z=1, \\ x+my-z=1, \\ x-y+mz=-m, \end{cases}$ 并对解的情况进行讨论.

单元综合

【范例解析】

例 1. 已知 $\dfrac{\begin{vmatrix} y & z \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -z \\ y & 1 \end{vmatrix}}+\dfrac{\begin{vmatrix} z & x \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -x \\ z & 1 \end{vmatrix}}+\dfrac{\begin{vmatrix} x & y \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -y \\ x & 1 \end{vmatrix}}=0$,

探求 x、y、z 之间的关系.

解: 原式 $\Leftrightarrow \dfrac{y-z}{1+yz}+\dfrac{z-x}{1+xz}+\dfrac{x-y}{1+yx}=0$

$$\Leftrightarrow \frac{(y-x)(1+z^2)}{(1+yz)(1+xz)}+\frac{x-y}{1+yx}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(y-x)(z-x)(y-z)}{(1+yz)(1+xz)(1+xy)}=0$$

$\therefore$ x、y、z 中至少有两个相等.

例 2. 已知 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}=0$,且 a、b、c 分别为$\triangle ABC$ 的三边长.

求证:$\triangle ABC$ 是等边三角形.

解: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$

$$=(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$$

$\because$ $a+b+c\neq 0$

$\therefore$ $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac=0$

即 $\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]=0$

$\therefore$ $a-b=b-c=c-a=0$

即 $a=b=c$

$\therefore$ $\triangle ABC$ 是等边三角形.

评注: 此两题是将行列式这种特殊记号展开为多项式的运算,例 2 实质上是对一个三元三次多项式进行分解、降次,利用行列式的运算性质来进行分解,不失为一种好办法.

例 3. 某项工程,如果由甲、乙两队承包 $2\frac{2}{5}$ 天完成,需付 180 000 元;由乙、丙两队承包 $3\frac{3}{4}$ 天完成,需付 150 000 元;由甲、丙两队承包 $2\frac{6}{7}$ 天完成,需付 160 000 元. 现在此项工程由一个队单独承包,在保证一周内完成的前提下,哪个队承包费用最少?

解: 设甲、乙、丙单独承包分别需 x、y、z 天完成.

则
$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{12} \\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{4}{15} \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{7}{20} \end{cases}$$

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=2,\ D_{\frac{1}{x}}=\begin{vmatrix} \frac{5}{12} & 1 & 0 \\ \frac{4}{15} & 1 & 1 \\ \frac{7}{20} & 0 & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{2},$$