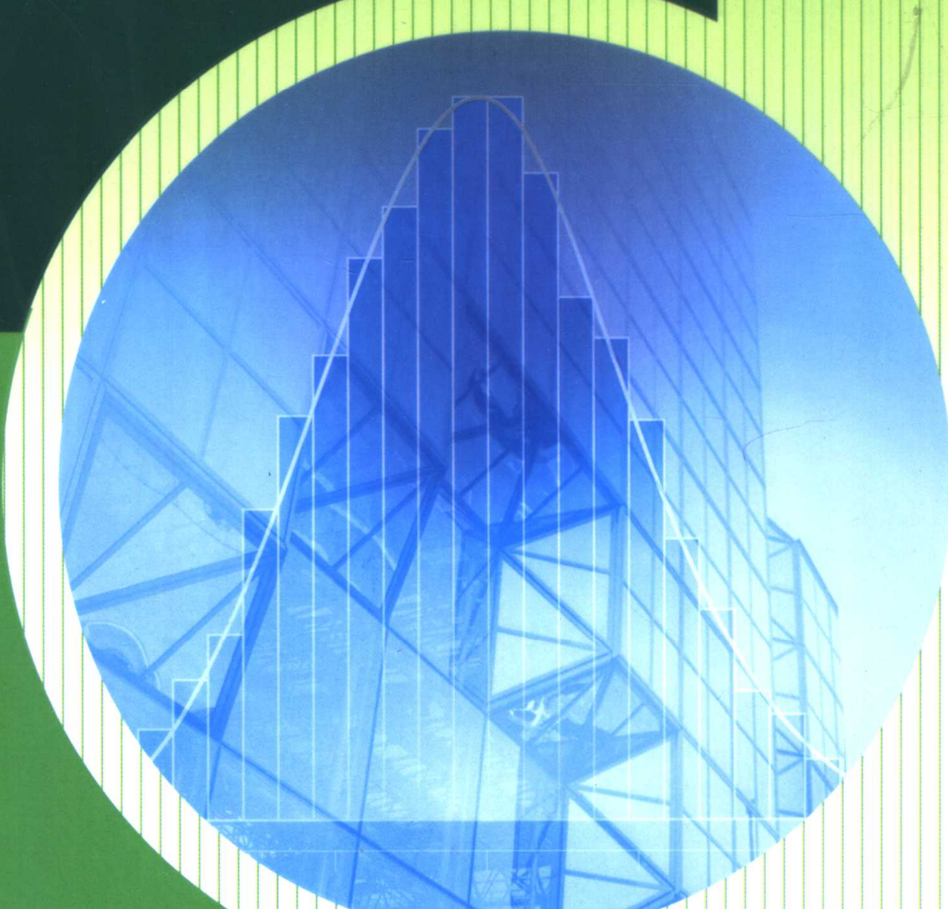
银领工程

高等职业教育应用型人才培养培训工程系列教材

微积分应用基础

云连英 主编

付艳茹 陶正娟 副主编



高等教育出版社
Higher Education Press

银领工程

高等职业教育应用型人才培养培训工程系列教材

微积分应用基础

云连英　主编

付艳茹　陶正娟　副主编

高等教育出版社

内容提要

本书是根据高职院校的培养目标编写的，吸取了全国高职高专工科类院校高等数学教学改革的成果，充分体现了以应用为目的，以必需、够用为度的原则。本书将数学建模思想融入了主干教学，并辅之以数学软件，注重培养学生使用现代化工具解决实际问题的能力。全书内容包括极限与连续、导数与微分、导数的应用、积分学、常微分方程。书后附有基本初等函数的图像及其主要性质、习题参考答案。

本书还提供了电子教案、试题库以及多媒体教学课件等完整的立体化教学资源。

本书可作为三年制的高职高专数学教材，同时也适合培养紧缺人才的两年制高职数学教学，也可作为高职高专通用数学教材。

图书在版编目(CIP)数据

微积分应用基础/云连英主编．—北京：高等教育出版社，2006.6

ISBN 7-04-019358-2

Ⅰ．微…　Ⅱ．云　Ⅲ．微积分-高等学校：技术学校-教材　Ⅳ．O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 045963 号

策划编辑 周先海　**责任编辑** 董达英　**封面设计** 王凌波　**责任绘图** 尹　莉
版式设计 王　莹　**责任校对** 金　辉　**责任印制** 朱学忠

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京鑫海金澳胶印有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×1092　1/16	版　　次	2006 年 6 月第 1 版
印　　张	9.75	印　　次	2006 年 6 月第 1 次印刷
字　　数	230 000	定　　价	13.80 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号　19358-00

编写委员会成员名单

主　　任　　云连英

副 主 任　　汪荣伟　曹　勃

委　　员（按姓氏笔画）

付艳茹　刘　密　乔树文　吴甬翔

陈祥霞　金　敬　杨建场　陶正娟

顾央青　梁其中　章文燕　黄报星

本书主编　　云连英

副 主 编　　付艳茹　陶正娟

编　　者（按姓氏笔画）

云连英　付艳茹　汪荣伟

杨建场　陶正娟　曹　勃

出版说明

为了认真贯彻《国务院关于大力推进职业教育改革与发展的决定》，落实《2003—2007 年教育振兴行动计划》，缓解国内劳动力市场技能型人才紧缺现状，为我国走新型工业化道路服务，自 2001 年 10 月以来，教育部在永州、武汉和无锡连续三次召开全国高等职业教育产学研经验交流会，明确了高等职业教育要“以服务为宗旨，以就业为导向，走产学研结合的发展道路”，同时明确了高等职业教育的主要任务是培养高技能人才。这类人才，既要能动脑，更要能动手，他们既不是白领，也不是蓝领，而是应用型白领，是“银领”。从而为我国高等职业教育的进一步发展指明了方向。

培养目标的变化直接带来了高等职业教育办学宗旨、教学内容与课程体系、教学方法与手段、教学管理等诸多方面的改变。与之相应，也产生了若干值得关注与研究的新课题。对此，我们组织有关高等职业院校进行了多次探讨，并从中遴选出一些较为成熟的成果，组织编写了“银领工程”丛书。本丛书围绕培养符合社会主义市场经济和全面建设小康社会发展要求的“银领”人才的这一宗旨，结合最新的教改成果，反映了最新的职业教育工作思路和发展方向，有益于固化并更好地推广这些经验和成果，很值得广大高等职业院校借鉴。我们的这一想法和做法也得到了教育部领导的肯定，教育部副部长吴启迪专门为首批“银领工程”丛书提笔作序。

我社出版的高等职业教育各专业领域技能型紧缺人才或应用型人才培养培训工程系列教材也将陆续纳入“银领工程”丛书系列。

“银领工程”丛书适用于高等职业学校、高等专科学校、成人高校及本科院校举办的二级职业技术学院、继续教育学院和民办高校使用。

高等教育出版社

2006 年 5 月

前　言

本教材是根据高职院校的人才培养目标编写的，并辅之以适合工科、经管类学生使用的后续教材《工程应用数学》和《经济应用数学》，是适合高职院校学生使用的基础教材。

在我国，高等职业技术教育是一类新型的高等教育类型，它培养的是初步掌握高新技术、面向生产和管理第一线的应用性人才。这类人才对基础理论的要求是以应用为导向，以必需、够用为度。高职院校的数学教学要为人才培养目标服务，基于此，该教材的编写具有以下特色：

1. 突出培养学生的贯通能力　全书采用"案例驱动式"编写模式，无论是引例还是案例均以学生的专业知识或日常生活知识为背景，强调培养学生将数学知识专业化和将专业知识数学化的相互贯通能力，既注重了数学方法的训练，又明确指出了知识点的应用；

2. 突出教学内容对高职学生认知基础的适应性　教学内容和难度均考虑到高职学生数学基础薄弱，逻辑思维能力不强的状况，更多地利用直观的图形、通俗的生活化语言降低学生学习难度，提高内容的可读性，以适应高职教育的要求；

3. 突出教学内容与高职教学需要的相适应性　教学内容及其难度均以高职各专业的需要为基础，以学生的专业学习和工作需要为准绳；我们把多元函数的微积分内容融入到一元函数对应内容的章节里，通过对偶、比较，既化解了多元微积分内容的难度，又减少了教材的篇幅，为学生后继课程的学习奠定了基础；

4. 突出与高职整体培养目标体系相适应　高等数学在高职整体教学体系中是一种文化基础课，更是一种基础"工具"课，鉴于此，教材的编写体系、课时安排等与不同专业的培养需要相适应，体现数学为专业服务的功能；

5. 突出与现代教育技术的整合及应用　在全书中融入了 MATLAB 软件的应用，有利于学生多维度理解、掌握数学知识点，和主教材同步设计了配套的网络课程、试题库、电子教案和学生自测学习系统，满足教学过程中的各种需要，以体现高职教学实践性的特点；

6. 突出数学教学中的人文性　每章都辅之以阅读材料，通过阅读材料渗透数学思想，让学生了解一些数学发展史，从而对学生进行人文素质教育；

7. 突出与区域经济社会的适应性　适应高职教育为区域经济社会发展培养应用型人才之需，本教材在选编教学"案例"时，充分注意到所选"案例"与区域经济社会发展的相关度，提高了学生的定向解决问题的能力；

8. 突出数学建模思想的融入　将数学建模融入了主干教学，每章不仅渗透了建模思想，而且均有建模应用案例。这样不仅教会了学生学习数学，而且训练了学生用数学方法解决现实问题的能力，从而通过基础课的教学培养学生的实践能力；

9. 突出"必需够用"的特点　根据对专业课程的深入调查，编写了适合高职学生的《微积分应用基础》，并将《工程应用数学》和《经济应用数学》两本教材作为不同专业的选修教材，满足了高职院校专业对数学内容的特殊需求；

10. 突出教学资源的完整性　整个教学资源系统的设计为教师按系统教、学生按系统学提

供完整、周到的教学资源服务。

教材的编写得到了台州职业技术学院、宁波职业技术学院、浙江警官职业学院以及浙江东方职业技术学院等四所院校有关领导和部门的支持,院内外同行专家提出了许多指导性意见,在此一并表示感谢。

限于水平,教材中不足之处,恳请批评指正。

编 者

2006年3月1日

目　录

第 1 章　极限与连续

在自然界中，存在着各种各样变化着的量，这些量之间往往不是孤立地存在着，一些变量之间相互联系、相互制约．函数是对变量的变化关系最基本的数学描述，它是高等数学研究的主要对象，而极限揭示了变量在一定的变化过程中的终极状态，极限的思想和方法不仅是高等数学的基础，而且在其他学科中也有着广泛的应用．本章将在复习和加深有关函数知识的基础上，讨论函数极限与函数连续性等问题．

1.1　函　　数

1.1.1　函数的概念

引例 1【汽车租赁】　一汽车租赁公司出租某种汽车的收费标准为每天的基本租金 200 元加每公里收费 15 元．租用一辆该种汽车一天，行车 x 公里时的租车费（元）

$$y = 200 + 15x. \tag{1.1}$$

在（1.1）式中，x 的取值范围是数集 $D=\{x\mid x\geqslant 0\}$，对每一个 $x\in D$，按（1.1）式所示规则，都有唯一确定的 y 与之对应．

引例 2【电压波】　考察脉冲发生器所产生的一个单三角脉冲电压波（图 1－1），其电压 U（伏）与时间 t（微秒）之间的关系为：

$$0\leqslant t\leqslant \frac{\tau}{2}, U=\frac{2E}{\tau}t;\ \frac{\tau}{2}<t\leqslant \tau, U=-\frac{2E}{\tau}(t-\tau);$$

当 $t\geqslant \tau$ 时，$U=0$．这一波形的数学表达式可统一写为

$$U=\begin{cases}\dfrac{2E}{\tau}t, & 0\leqslant t\leqslant \dfrac{\tau}{2},\\ -\dfrac{2E}{\tau}(t-\tau), & \dfrac{\tau}{2}<t\leqslant \tau,\\ 0, & t>\tau.\end{cases} \tag{1.2}$$

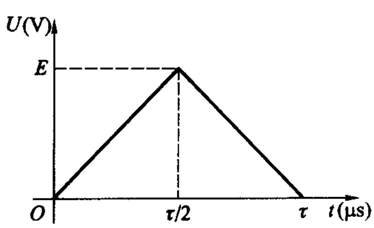


图 1－1

在（1.2）式中，t 的取值范围是数集 $D=\{t\mid 0\leqslant t<+\infty\}$，对于每一个 $t\in D$，按（1.2）所示规则，都有唯一确定的 U 与之对应．

引例 3【气温与时间】　（1）某气象站用自动温度记录仪记下一昼夜气温变化（图 1－2），由图可知，对于一昼夜内每一时刻 t，都有唯一确定的温度 T 与之对应．

（2）为了方便游客在五一长假去北京旅游，下表给出了 2004 年 5 月 1 日至 5 月 7 日北京每天的最高气温．

日期 t（日）	1	2	3	4	5	6	7
气温 T（℃）	21	19	23	21	25	27	27

由上表可知，对每一个 $t\in D=\{1,2,3,4,5,6,7\}$，都有唯一确定的 T 与之对应.

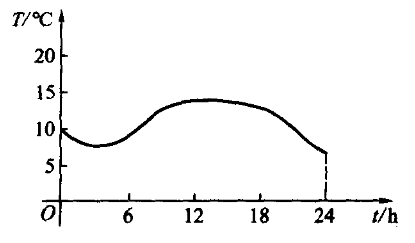


图1-2

以上各引例，都是一个变量在一个非空集合内每取一个值，按一定的规则，另一变量都有唯一确定的值与之对应. 两个变量间的这种对应关系，在数学上称为函数关系.

定义1 设 D 是一个实数集，如果对于 D 中的每一个数 x，按照某种对应规则 f，都有唯一确定的数值 y 与之对应，那么 y 就称为定义在数集 D 上的 x 的**函数**，记作 $y=f(x)$，$x\in D$，x 称为**自变量**，数集 D 称为函数的**定义域**.

当 x 取某一定值 x_0 时，与 x_0 对应的 y 的数值称为函数在点 x_0 处的**函数值**，记作 $y|_{x=x_0}$ 或 $f(x_0)$，当 x 取遍 D 中的一切实数时，对应的函数值的集合称为函数的**值域**.

从函数的定义可知，函数的**定义域和对应法则是确定函数的两个基本要素**. 一旦确定了对应法则和定义域，变量关系就确定了，至于变量用什么字母无关紧要.

函数常用**解析法**(如引例1、引例2)、**图像法**(如引例3中(1))、**表格法**(如引例3中(2))来表示.

注意 (1) 引例2是用解析法表示的一个函数，但在其定义域的不同区间内，所对应的 U 值是用不同的解析式来表示的，这种在其定义域的不同区间上用不同的解析式来表示的函数称为**分段函数**. 在实际生活与工程实践中，这是一类常见函数.

(2) 在函数的定义中，并没有要求自变量变化时，其函数值一定要变，因此 $y=C$(C 为常数)也符合函数的定义，称 $y=C$(C 为常数)为**常数函数**.

例1 求函数 $y=\arcsin\dfrac{x-3}{2}+\ln(x-1)$ 的定义域.

解 要使函数 $y=\arcsin\dfrac{x-3}{2}+\ln(x-1)$ 有意义，必须

$$\begin{cases}-1\leqslant\dfrac{x-3}{2}\leqslant 1,\\ x-1>0.\end{cases}$$

解得 $1<x\leqslant 5$，于是定义域为 $(1,5]$.

引例4【圆柱体积】 圆柱体的体积 V 和它的底面半径 r 及高 h 之间的关系为

$$V=\pi r^2 h. \tag{1.3}$$

这里，V 是随着 r,h 的变化而变化. 当 r,h 在一定范围内($r>0,h>0$)取定一对数值 (r,h) 时，按(1.3)所示规则，V 都有唯一确定的值与之对应.

引例5【导线的电流】 在远距离输送交流电的过程中，通过导线某点的电流 i 不仅与该点离导线的始端的距离 x 有关，而且还随时间 t 而变化. 对某种理想的输电线有

$$i=i_0\cos\alpha x\cdot\sin\omega t\ (i_0,\alpha,\omega\text{ 为常数}), \tag{1.4}$$

对于 x,t 的每一对值 $(x,t)\in\{(x,t)\mid 0<x<+\infty,0<t<+\infty\}$，按(1.4)所示规则，$i$ 都有唯一确定的值与之对应.

定义2 设有变量 x,y,z，如果当变量 x,y 在一定范围内任意取定一对数值时，变量 z 按照一

定的法则，总有唯一确定的数值与之对应，则称 z 是 x,y 的**二元函数**，记作 $z=f(x,y)$，其中 x,y 叫做**自变量**，x,y 的变化范围叫做函数的**定义域**.

案例 1【刹车痕迹】 已知汽车刹车后轮胎摩擦的痕迹长 s(m)与车速 v(km/h)的平方成正比，当车速为 30 km/h 时刹车，测得痕迹长为 3 m，求痕迹长 s 与车速 v 的函数关系.

解 由题意可设 $s=kv^2$.

由于当 $v=30$ km/h 时，$s=3$ m，所以 $3=k30^2$，$k=\frac{1}{300}$，$s=\frac{1}{300}v^2$，因此痕迹长 s 与车速 v 的函数关系为

$$s=\frac{1}{300}v^2\ (v>0).$$

案例 2【销售利润】 某商店将每件进价为 180 元的西服按每件 280 元销售时，每天只卖出 10 件，若每件售价降低 m 元，当 $m=20x\ (x\in\mathbf{N})$ 时，其日销售量就增加 $15x$ 件，试写出日利润 y 与 x 的函数关系.

解 日利润 = 每件利润 × 日销售量，而每件利润 = 现价 − 进价 = $(280-20x)-180$，日销售量为 $10+15x$，所以总利润 $y=(280-20x-180)(10+15x)=100(5-x)(2+3x)$. 又由题意知，降价数只能是 20 元的整数倍，所以该函数的定义域为 $\mathbf{N}$. 因此日利润 y 与 x 的函数关系为 $y=100(5-x)(2+3x)$，$x\in\mathbf{N}$.

案例 3【货运方案】 某工厂在甲、乙两地的两个分厂各生产某种机床 12 台和 6 台. 现销售给 A 地 10 台，B 地 8 台. 已知从甲地调运 1 台至 A 地、B 地的运费分别为 400 元和 800 元，从乙地调运 1 台至 A 地、B 地的运费分别为 300 元和 500 元.

(1) 设从乙地调运至 A 地的台数为 x，求总运费 y 关于 x 的函数关系式；

(2) 若总运费不超过 9 000 元，问共有几种调运方案？

分析 甲、乙两地调运至 A，B 两地的机床台数及运费如下表：

调出地	甲地		乙地	
调至地	A 地	B 地	A 地	B 地
台数	$10-x$	$12-(10-x)$	x	$6-x$
每台运费(元)	400	800	300	500
运费合计(元)	$400(10-x)$	$800[12-(10-x)]$	$300x$	$500(6-x)$

解 (1) 依题意得 $0\leqslant x\leqslant 6$，$x\in\mathbf{Z}$，$y=400(10-x)+800[12-(10-x)]+300x+500(6-x)$，即

$$y=200(x+43)\ (0\leqslant x\leqslant 6,x\in\mathbf{Z}).$$

(2) 由 $y\leqslant 9\ 000$，解得 $x\leqslant 2$.

由于 $x\in\mathbf{Z}$，$0\leqslant x\leqslant 6$，所以 $x=0,1,2$. 因此共有三种调运方案.

案例 4【邮件资费】 我国 2004 年 1 月 1 日起执行的国内投寄外埠平信的邮件资费如下：首重 100 克内，每重 20 克(不足 20 克按 20 克计算)付邮资 0.80 元，续重 101 克—2000 克每重 100 克(不足 100 克按 100 克计算)付邮资 2.00 元. 那么投寄重 x 克$(0<x\leqslant 120)$的外埠平信应付多

少邮资？

解 设投寄外埠平信邮资为 y，则

$$y=\begin{cases}0.80, & 0<x\leqslant 20,\\ 1.60, & 20<x\leqslant 40,\\ 2.40, & 40<x\leqslant 60,\\ 3.20, & 60<x\leqslant 80,\\ 4.00, & 80<x\leqslant 100,\\ 6.00, & 100<x\leqslant 120.\end{cases}$$

案例5【如何纳税】 "依法纳税是每个公民应尽的义务"，我国于1993年10月31日颁布的《中华人民共和国个人所得税法》中规定国家征收个人所得税是分段计算的：月收入不超过800元的，免征个人所得税；超过800元部分为应纳税所得额，税率如下：

级数	全月应纳税所得额	税率
1	不超过500元部分	5%
2	超过500元至2 000元部分	10%
3	超过2 000元至5 000元部分	15%
…………		
9	超过100 000元部分	45%

自1993年个人所得税法实施以来至今已十多年，其间中国政治经济形势发生了很大变化，国民生产总值持续、快速增长，城乡居民收入大幅度提高. 1993年，就业者中月收入在800元以上的仅为1%左右，到2004年已升至60%左右. 在职工工资收入提高的同时，职工家庭生活消费支出也呈上升趋势，2004年居民消费价格指数比1993年提高了67%，加之近几年教育、住房、医疗等改革的深入，居民消费支出明显增长，超过了现行个人所得税法规定的每月800元的费用扣除标准，导致职工消费支出不能在税前完全扣除，税负有所加重. 为解决社会反映比较突出的个人所得税工薪所得费用扣除额偏低，居民生计费用扣除不足的问题，有必要修改个人所得税法的规定. 为此十届全国人大常委会第十七次会议于2005年8月23日开始审议个人所得税法修正案草案，十届全国人大常委会第十八次会议于2005年10月27日通过关于修改《个人所得税法》的决定，将个人所得税起征点从800元调整为1 600元，修改后的个人所得税法，只是对个人所得税的起征点进行调整，并没有对税率进行调整. 新的个税起征标准于2006年1月1日起正式施行.

如果某单位所有人的月收入都不超过5 000元，

(1) 试分别按照1993年10月31日颁布的《中华人民共和国个人所得税法》及修改后的《个人所得税法》建立该单位月收入 x 与纳税金额 y 之间的函数模型；

(2) 计算月收入为4 000元者，修改所得税法后将比以前少缴税多少元？

解 (1) 按照1993年10月31日颁布的《中华人民共和国个人所得税法》来计算，有如下模型：

$$y=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 800,\\ 0.05(x-800), & 800<x\leqslant 1\,300,\\ 0.1(x-1\,300)+25, & 1\,300<x\leqslant 2\,800,\\ 0.15(x-2\,800)+175, & 2\,800<x\leqslant 5\,000.\end{cases}$$

按照修改后的《个人所得税法》来计算,数学模型为:

$$y=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 1\,600,\\ 0.05(x-1\,600), & 1\,600<x\leqslant 2\,100,\\ 0.1(x-2\,100)+25, & 2\,100<x\leqslant 3\,600,\\ 0.15(x-3\,600)+175, & 3\,600<x\leqslant 5\,000.\end{cases}$$

(2) 当月收入为 4 000 元时,按照 1993 年 10 月 31 日颁布的《中华人民共和国个人所得税法》来计算,需缴税 $0.15(4\,000-2\,800)+175=355$(元);按照修改后的《个人所得税法》来计算,需缴税 $0.15(4\,000-3\,600)+175=235$(元). 因此月收入为 4 000 元者,将比以前少缴税 $355-235=120$(元).

案例 6【单位阶跃函数】 单位阶跃函数是电学中的一个常用函数,它可表示为

$$U(t)=\begin{cases}1, & t\geqslant 0,\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

1.1.2 函数的几种特性

一、 函数的奇偶性

若函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称,且对于任意的 $x\in D$ 都有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$ 为**奇函数**;若函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称,且对于任意的 $x\in D$ 都有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为**偶函数**.

奇函数的图像关于原点对称,偶函数的图像关于 y 轴对称.

例如,$f(x)=x^2$ 是偶函数,$f(x)=x^3$ 是奇函数,而 $f(x)=x^2-2x+1$ 是非奇非偶函数.

二、 函数的单调性

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内随着 x 的增大而增大(或减少),即对于 (a,b) 内的任意两点 x_1 及 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)<f(x_2)$(或 $f(x_1)>f(x_2)$),则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内是**单调增加(或单调减少)**,区间 (a,b) 叫做函数 $f(x)$ 的**单调增加区间(或单调减少区间)**.

单调增加区间与单调减少区间统称为**单调区间**.

单调增加函数,它的图像沿 x 轴正向上升;单调减少函数,它的图像沿 x 轴正向下降.

例如,由图 1-3 可知,函数 $y=x^2$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内是单调增加,而在 $(-\infty,0)$ 内是单调减少,它在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内不是单调函数.

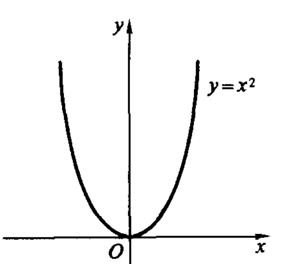


图 1-3

案例 7【需求函数】 在经济学中,某一商品的需求量是指在一定的价格水平下,消费者愿意而且有支付能力购买的商品量. 影响商品需求的因素很多,商品的价格是影响需求的一个主要因素,还有其他因素,如消费者收入的增减、季节的变换以及消费者的

偏好等都会影响需求.如果把价格以外的其他因素都看作是常量,则需求量 D 可视为该商品的价格 P 的函数,这个函数称为**需求函数**.

一般情况下,商品的价格越低,需求量越大;商品的价格越高,需求量越小.因此,需求函数是单调减少函数.商场可通过采取降低价格、增加商品的销售量(需求量)等营销策略,增加销售收入.

案例8【成本函数】 成本是指生产特定产量的产品所需要的费用总额.它包括固定成本和可变成本.固定成本是尚未生产产品时的支出,在一定限度内是不随产量变动而变动的费用.可变成本是随产量变动而变动的费用.设 Q 表示产量,C 表示成本,则 C 与 Q 之间的函数关系称为成本函数.记作

$$C=C(Q)=C_0+V(Q),Q\geqslant 0,$$

其中 $C_0\geqslant 0$ 是固定成本,$V(Q)$是可变成本.

由于当产量增加时,成本必然增加,所以成本函数是单调增加函数.

三、 函数的有界性

设函数$f(x)$在区间(a,b)内有定义,如果存在一个正数 M,使得对于区间(a,b)内的一切 x 值,都有$|f(x)|\leqslant M$,则称$f(x)$在区间(a,b)**内有界**,否则称$f(x)$在区间(a,b)内**无界**.

例如,对于一切 $x\in\mathbf{R}$,$|\sin x|\leqslant 1$ 都成立,所以 $y=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内有界.又如,对于一切 $x\in\mathbf{R}$,$|\arctan x|<\dfrac{\pi}{2}$都成立,所以 $y=\arctan x$ 在$(-\infty,+\infty)$内有界.

四、 函数的周期性

对于函数$f(x)$,如果存在一个常数 $T\neq 0$,使得对于定义域内的一切 x 都有 $f(x+T)=f(x)$,则称$f(x)$为**周期函数**,T 为$f(x)$的一个**周期**,通常周期函数的周期是指它的最小正周期.

例如,$y=\sin x$,$y=\cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数,而 $y=\tan x$,$y=\cot x$ 是以 π 为周期的周期函数.

1.1.3 基本初等函数

常数函数 $y=c$(c 为常数).

幂函数 $y=x^{\alpha}$(α 为常数).

指数函数 $y=a^{x}$($a>0,a\neq 1$,a 为常数).

对数函数 $y=\log_a x$($a>0,a\neq 1$,a 为常数).

三角函数 $y=\sin x,y=\cos x,y=\tan x,y=\cot x,y=\sec x,y=\csc x$.

反三角函数 $y=\arcsin x,y=\arccos x,y=\arctan x,y=\operatorname{arccot} x$.

以上这六种函数统称为**基本初等函数**.

有关基本初等函数的图像及主要性质见附录1.

1.1.4 复合函数

某商场经营一种允许价格浮动的商品,那么营业额是价格的函数,而价格又是需求量的函数.对于这种在一个变化过程中有着确定对应关系的三个变量,我们有如下的定义:

定义3 设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$,而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$,且 $u=\varphi(x)$的值域包含在

函数 $y=f(u)$ 的定义域内,那么 y(通过 u 的关系)也是 x 的函数,这个函数叫做 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的函数,简称**复合函数**,记作 $y=f[\varphi(x)]$,其中 u 称为**中间变量**.

注意　不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数.例如,$y=\arcsin u$ 及 $u=2+x^2$ 就不能复合成一个复合函数.因为 u 的值域为 $[2,+\infty]$,不包含在 $y=\arcsin u$ 的定义域 $[-1,1]$ 内,因而不能复合.

正确分析复合函数的构成,是今后正确运用求导法则的基础.

例 2　已知 $y=e^u$,$u=\sqrt{x}$,试把 y 表示成 x 的复合函数.

解　$y=e^u=e^{\sqrt{x}}$.

例 3　指出下列函数的复合过程.

(1) $y=\sqrt{1+x^2}$;　(2) $y=\sin x^2$;　(3) $y=\sin^2 x$;　(4) $y=\arcsin(\ln 2x)$.

解　(1) 函数 $y=\sqrt{1+x^2}$ 是由 $y=\sqrt{u}$ 和 $u=1+x^2$ 复合而成的.

(2) 函数 $y=\sin x^2$ 是由 $y=\sin u$ 和 $u=x^2$ 复合而成的.

(3) 函数 $y=\sin^2 x$ 是由 $y=u^2$ 和 $u=\sin x$ 复合而成的.

(4) 函数 $y=\arcsin(\ln 2x)$ 是由 $y=\arcsin u$,$u=\ln v$,$v=2x$ 复合而成的.

1.1.5　初等函数

引例 6【生产利润】　某一玩具公司生产 x 件玩具将花费 $400+5\sqrt{x(x-4)}$ 元,如果每件玩具卖 48 元,那么公司生产 x 件玩具获得的净利润 $y=48x-[400+5\sqrt{x(x-4)}]$.

引例 7【双曲函数】　工程技术上常用的双曲函数:

(1) 双曲正弦函数,$y=\operatorname{sh} x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$,其图像如图 1-4 所示.

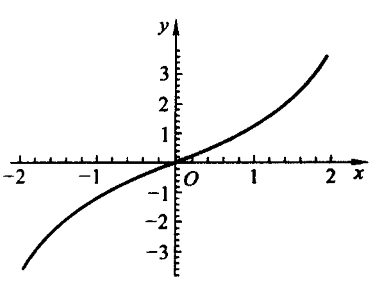


图 1-4

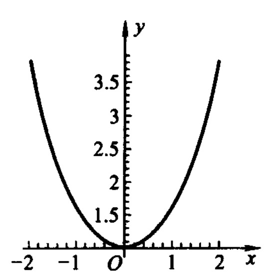


图 1-5

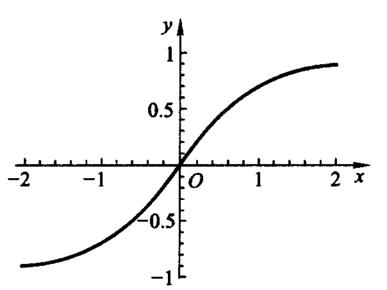


图 1-6

(2) 双曲余弦函数,$y=\operatorname{ch} x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$,其图像如图 1-5 所示.

(3) 双曲正切函数,$y=\operatorname{th} x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^x}$,其图像如图 1-6 所示.

定义 4　由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合而成的、且可用一个解析式表示的函数,称为**初等函数**.

例如 $y=\arcsin\dfrac{x}{2}$,$y=\ln(x+\sin x)$,$y=e^{x^2}\tan x$ 等等都是初等函数.

分段函数若可以表示成一个式子,则为初等函数,否则不是.

如 $y=|x|=\sqrt{x^2}=\begin{cases}x, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -x, & x<0\end{cases}$ 是初等函数,它可以看作是由函数 $y=\sqrt{u}$ 和 $u=x^2$ 复合而成的函数.

又如,$y=\begin{cases}x-1, & x<0,\\ x+1, & x>0\end{cases}$ 不能用一个式子表示,所以不是初等函数.

1.2 函数的极限

极限是高等数学最基本的概念,高等数学中的一些重要概念,如导数、积分、级数等等都是利用极限来定义的.

中学数学里已学过极限的一部分内容,下面对极限作一些简要的复习与补充.

1.2.1 函数极限的概念

为了叙述方便,我们先给出关于 x 的变化趋势的有关记号(如下表):

记号	含义
$x\to\infty$	x 的绝对值无限增大
$x\to+\infty$	x 取正值无限增大
$x\to-\infty$	x 取负值而绝对值无限增大
$x\to x_0$	x 可以无限趋近于 x_0
$x\to x_0^+$	x 从 x_0 的右侧无限趋近于 x_0
$x\to x_0^-$	x 从 x_0 的左侧无限趋近于 x_0

一、 当 $x\to\infty$ 时,函数 $f(x)$ 的极限

引例1【水温的变化趋势】 将一壶沸腾的开水放在一间室温恒为25℃的房间里,水温将逐渐降低,随着时间 t 的推移,水温会越来越接近于室温25℃.

引例2【熟练工的工时数】 生产同一产品熟练工所需的工时数比新手要少.因为当你不断重复地做同一种工作时,你的操作方法会不断得到改善,操作时间也在逐渐地减少并接近于一个确定的时间.

上面两个引例有一个共同的特点:当自变量逐渐增大时,相应的函数值逐渐接近于一个确定的常数.

定义1 如果当 x 的绝对值无限增大(即 $x\to\infty$)时,函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A,那么称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的**极限**,记为

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \text{ 或当 } x\to\infty \text{ 时 } f(x)\to A.$$

例 1 考察当 $x\to\infty$ 时函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的变化趋势.

由图 1－7 可以看出，曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 沿 x 轴的正向和负向无限远伸时，与 x 轴越来越接近. 即当 x 的绝对值无限增大时，$f(x)$ 的值无限接近于零，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

有时，我们仅讨论 $x\to-\infty$ 或 $x\to+\infty$（如引例 1 与引例 2）时，函数的变化趋势.

定义 2 如果当 $x\to+\infty$ 时，函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A，那么称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$ 时的**极限**，记为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 或当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to A$.

如果当 $x\to-\infty$ 时，函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A，那么称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to-\infty$ 时的**极限**，记为 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$ 或当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)\to A$.

由上述定义可知，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

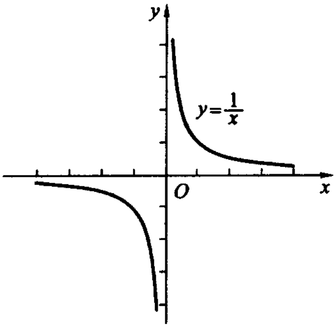


图 1－7

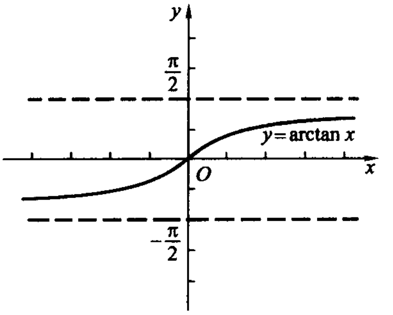


图 1－8

又如，由图 1－8 所示，$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$，而当 $x\to\infty$ 时，$y=\arctan x$ 不能无限接近于一个确定的常数，所以当 $x\to\infty$ 时，$y=\arctan x$ 的极限不存在.

根据定义 1 与定义 2 可以得出以下结论：

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$；

（2）当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=B$，但 $A\neq B$ 或 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 至少有一个不存在时，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 就不存在.

例 2 求 $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}$，$\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}$，$\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x}$.

解 由图 1－9 可看出，$\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$，$\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}$ 不存在，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x}$ 不存在.

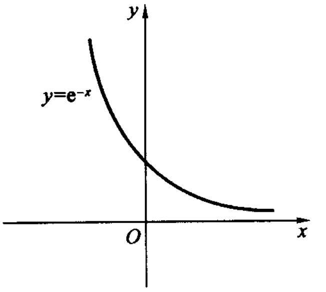


图 1－9

案例 1【设备折旧费】 某工厂对一生产设备的投资额是 1 万元，每年的折旧费为该设备账面价格（即以前各年折旧费用提取后