



奥赛经典

专题研究系列

湖南省数学会 | 组编
湖南师范大学数学奥林匹克研究所

奥林匹克数学中的真题分析

◇张 垚 沈文选 / 编著

◆湖南师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

奥林匹克数学中的真题分析 / 张垚, 沈文选编著. —长沙: 湖南师范大学出版社, 2005

(奥赛经典丛书·专题研究系列)

ISBN 7-81081-520-2

I. 奥... II. ①张... ②沈... III. 数学课—高中—解题 IV. G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 055372 号

奥林匹克数学中的真题分析

张 垚 沈文选 编著

-
- ◇丛书策划: 周玉波 陈宏平 廖建军 廖小刚
 - ◇组 稿: 廖小刚
 - ◇责任编辑: 廖小刚
 - ◇责任校对: 刘琼琳 蒋旭东
 - ◇出版发行: 湖南师范大学出版社
地址/长沙市岳麓山 邮编/410081
电话/0731. 8853867 8872751 传真/0731. 8872636
 - ◇经销: 湖南省新华书店
 - ◇印刷: 湖南航天长宇印刷有限责任公司

-
- ◇开本: 730×960 1/16 开
 - ◇印张: 31.25 插页: 0.25
 - ◇字数: 680 千字
 - ◇版次: 2005 年 7 月第 1 版 2005 年 7 月第 1 次印刷
 - ◇印数: 1—5000 册
 - ◇书号: ISBN 7-81081-520-2/G·271
 - ◇定价: 35.00 元
-

奋发图强，力争上游，
为提高我国数学水平
而共同努力。

王梓坤题书

湖南中学生在国际数学奥林匹克中的获奖情况

届次	获奖情况
第28届 (1987)	刘 雄 (湖南湘阴一中) 金牌
第32届 (1991)	郭早阳 (湖南师大附中) 银牌
第34届 (1993)	刘 炆 (湖南师大附中) 金牌
第35届 (1994)	彭建波 (湖南师大附中) 金牌
第39届 (1998)	艾颖华 (湖南师大附中) 进国家队, 该届国家队未参赛
第40届 (1999)	孔文彬 (湖南师大附中) 银牌
第41届 (2000)	刘志鹏 (长沙市一中) 金牌
第42届 (2001)	张志强 (长沙市一中) 金牌 余 君 (湖南师大附中) 金牌
第43届 (2002)	肖 维 (湖南师大附中) 金牌
第44届 (2003)	王 伟 (湖南师大附中) 金牌 向 振 (长沙市一中) 金牌
第45届 (2004)	李先颖 (湖南师大附中) 金牌

前 言

数学奥林匹克是起步最早、规模最大、类型多种、层次较多的一项学科竞赛活动。多年来的实践表明：这项活动可以激发青少年学习数学的兴趣，焕发青少年的学习热情，吸引他们去读一些数学小册子，促使他们寻找机会去听一些名师的讲座；这项活动可以使参与者眼界大开，跳出一个班、一个学校或一个地区的小圈子，去与其他“高手”互相琢磨，激励并培养他们喜爱有挑战性数学问题的素养与精神；这项活动可以使参与者求知欲望大增，使得他们的阅读能力、理解能力、交流能力、表达能力等诸能力与日俱进。这是一种有深刻内涵的文化现象，因此，越来越多的国家或地区除组织本国或本地区的各级各类数学奥林匹克外，还积极地参与到国际数学奥林匹克中。

我国自1986年参加国际数学奥林匹克以来，所取得成绩举世公认，十多年来一直保持世界领先的水平。其中，到2004年止，湖南的学生已取得10块金牌、2块银牌的好成绩。这优异的成绩，是中华民族精神的体现，是国人潜质的反映，是民族强盛的希望。为使我国数学奥林匹克事业可持续发展，一方面要继续吸引越来越多的青少年参与，吸引一部分数学工作者扎实地投入到这项活动中来；另一方面要深入研究奥林匹克数学的理论体系，要深入研究数学奥林匹克教育理论与教学方略，研究数学奥林匹克教育与中学数学教育的内在联系。为此，在中国数学奥林匹克委员会领导的大力支持与热情指导下，湖南师范大学成立了“数学奥林匹克研究所”。研究所组建近两年来，我们几位教授都积极投身到研究所的工作中，除深入进行奥林匹克数学与数学奥林匹克教育理论研究外，还将我们多年积累的辅导讲座资料进行了全面、系统的整理，以专题讲座的形式编写成了这套专题研究丛书，分几何、代数、组合、真题分析四卷。这些丰富、系统的专题知识不仅是创新地解竞赛题所不可或缺的材料，而且还可直接激发解竞赛题的直觉或灵感。从教育心理学角度上说，只有具备了充分的专题知识与逻辑推理知识，才能有目的、有方向、有成效地进行探究性活动。

由于这套丛书篇幅较大，有些部分整理欠完善，敬请专家、同行和读者不吝指正。

编者

2005年7月

目 录

第一篇 高中数学联赛第一试基本问题解法分析

第 1 章 函数	(1)
第 2 章 方程(组)	(18)
第 3 章 三角	(31)
第 4 章 不等式	(44)
第 5 章 数列	(81)
第 6 章 解析几何	(115)
第 7 章 立体几何	(140)
第 8 章 向量	(155)
第 9 章 复数	(169)
第 10 章 导数	(181)
第 11 章 排列与组合	(193)
第 12 章 概率与统计	(229)
第 13 章 初等数论	(249)

第二篇 湖南省历年高中数学竞赛试题汇编

1988 年湖南省高中数学夏令营试题	(283)
1990 年湖南省高中数学夏令营试题	(285)
1990 年湖南省高中数学冬季集训试题	(286)
1991 年湖南省高中数学夏令营试题	(287)
1991 年湖南省高中数学冬季集训试题	(288)
1992 年湖南省高中数学夏令营试题	(289)
1992 年湖南省高中数学竞赛试题	(292)
1994 年湖南省高中数学夏令营试题	(295)
1994 年湖南省高中数学冬季集训试题	(296)



1995 年湖南省高中数学夏令营试题	(298)
1996 年湖南省高中数学夏令营试题	(300)
1997 年全国高中数学竞赛试题(湖南省命制)	(302)
1998 年湖南省高中数学竞赛试题	(305)
2000 年湖南省高中数学夏令营试题	(307)
2000 年湖南省高中数学竞赛试题	(309)
2001 年湖南省高中数学夏令营试题	(312)
2001 年湖南省高中数学竞赛试题	(314)
2002 年湖南省高中数学夏令营试题	(317)
2002 年湖南省高中数学竞赛试题	(319)
2003 年湖南省高中数学夏令营试题	(322)
2003 年湖南省高中数学竞赛试题	(324)
2004 年湖南省高中数学夏令营试题	(328)
2004 年湖南省高中数学竞赛试题	(330)
 参考答案	 (333)



第一篇

高中数学联赛第一试
基本问题解法分析

第1章 函数

【基础知识】

函数既是高中数学学习的主线、重点,也是历年来全国高中数学联赛的基本内容、重点.指数函数、对数函数、幂函数、二次函数、无理函数以及三角函数等常常是主要的联赛试题载体.考查函数的单调性、有界性、极(最)值性、周期性、奇偶性以及图象的对称性等的灵活运用是联赛试题的主要题型.求解这类问题除了需熟练掌握函数的单调性、奇偶性、周期性、有界性等基本性质之外,还需要熟悉由这些基本性质推导出的一些结论,诸如下面的:

结论 1 设函数 $y = f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数.

- (1) 若 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上为单调函数,则 $|f(x_1)| < |f(x_2)| \Leftrightarrow |x_1| < |x_2|$;
- (2) 若 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上为增函数,则 $|f(x_1)| < f(x_2) \Leftrightarrow |x_1| < x_2$;
- (3) 若 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上为减函数,则 $|f(x_1)| < f(x_2) \Leftrightarrow |x_1| < -x_2$.

结论 2 设函数 $y = f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的偶函数.

- (1) 若 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上为增函数,则 $f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow |x_1| < |x_2|$;
- (2) 若 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上为减函数,则 $f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow |x_1| > |x_2|$.

奇、偶函数的概念可以推广:

定义 1 对于函数 $f(x)$ ($x \in \mathbf{R}$),若存在常数 a ,使得其函数定义域内任意一个 x , 都有

$$f(a-x) = f(a+x), \text{ 或 } f(2a-x) = f(x), \quad (1-1)$$

则称 $f(x)$ 为广义(I)型偶函数. 显然, 当 $a=0$ 时, $f(x)$ 为一般(即通常意义下)的偶函数.

$$\text{对于函数 } f(x)(x \in \mathbf{R}), \text{ 若存在常数 } a, \text{ 使得其函数定义域内任意一个 } x, \text{ 都有} \\ f(a-x) = -f(a+x), \text{ 或 } f(2a-x) = -f(x), \quad (1-2)$$

则称 $f(x)$ 为广义(I)型奇函数. 显然, 当 $a=0$ 时, $f(x)$ 为一般(即通常意义下)的奇函数.

定义 2 对于函数 $f(x)(x \in \mathbf{R})$, 若存在常数 a, b , 使得其函数定义域内任意一个 x , 都有

$$f(a-x) = f(b+x), \quad (1-3)$$

则称 $f(x)$ 为广义(II)型偶函数. 显然, 当 $a=b$ 时, $f(x)$ 为广义(I)型偶函数; 当 $a=b=0$ 时, $f(x)$ 为一般的偶函数.

$$\text{对于函数 } f(x)(x \in \mathbf{R}), \text{ 若存在常数 } a, b, \text{ 使得其函数定义域内任意一个 } x, \text{ 都有} \\ f(a-x) = -f(b+x), \quad (1-4)$$

则称 $f(x)$ 为广义(II)型奇函数. 显然, 当 $a=b$ 时, $f(x)$ 为广义(I)型奇函数; 当 $a=b=0$ 时, $f(x)$ 为一般的奇函数.

定义 3 对于函数 $f(x)(x \in \mathbf{R})$, 若存在常数 $a, b, m, n(m > 0, n > 0)$, 使得其定义域内任意一个 x , 都有

$$f(a-mx) = f(b+nx), \quad (1-5)$$

则称 $f(x)$ 为广义(III)型偶函数. 显然, 当 $m=n=1$ 时, $f(x)$ 为广义(II)型偶函数; 当 $a=b=0$, 且 $m=n$ 时, $f(x)$ 为一般的偶函数.

对于函数 $f(x)(x \in \mathbf{R})$, 若存在常数 $a, b, m, n(m > 0, n > 0)$, 使得其定义域内任意一个 x , 都有

$$f(a-mx) = -f(b+nx), \quad (1-6)$$

则称 $f(x)$ 为广义(III)型奇函数. 显然, 当 $m=n=1$ 时, $f(x)$ 为广义(II)型奇函数; 当 $a=b=0$, 且 $m=n$ 时, $f(x)$ 为一般的奇函数.

结论 3 设 $f(x)$ 为定义在 \mathbf{R} 上的广义(II)型偶函数.

(1) 若 $f(x)$ 在 $[\frac{a+b}{2}, +\infty)$ 上为增函数, 则

$$f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow |x_1 - \frac{a+b}{2}| < |x_2 - \frac{a+b}{2}|;$$

(2) 若 $f(x)$ 在 $[\frac{a+b}{2}, +\infty)$ 上为减函数, 则

$$f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow |x_1 - \frac{a+b}{2}| > |x_2 - \frac{a+b}{2}|.$$

结论 4 设 $f(x)$ 为定义在 \mathbf{R} 上的广义(II)型奇函数.

(1) 若 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上为单调函数, 则

$$|f(x_1)| < |f(x_2)| \Leftrightarrow \left| x_1 - \frac{a+b}{2} \right| < \left| x_2 - \frac{a+b}{2} \right|;$$

(2) 若 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上为增函数, 则

$$|f(x_1)| < f(x_2) \Leftrightarrow \left| x_1 - \frac{a+b}{2} \right| < x_2 - \frac{a+b}{2};$$

(3) 若 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上为减函数, 则

$$|f(x_1)| < f(x_2) \Leftrightarrow \left| x_1 - \frac{a+b}{2} \right| < \frac{a+b}{2} - x_2.$$

结论 5 设 a, b 是两个相异的常数, 则

(1) 当 $f(x)$ 关于 a, b 均为广义(I)型偶函数时, $f(x)$ 为周期函数, 且 $2|b-a|$ 为其一个正周期;

(2) 当 $f(x)$ 关于 a, b 均为广义(I)型奇函数时, $f(x)$ 为周期函数, 且 $2|b-a|$ 为其一个正周期;

(3) 当 $f(x)$ 关于 a, b , 一个为广义(I)型奇函数, 另一个为广义(I)型偶函数时, $f(x)$ 为周期函数, 且 $4|b-a|$ 为其一个正周期.

结论 6 设 $f(x)$ 为定义在 \mathbf{R} 上的函数, 对任意 $x \in \mathbf{R}$, 恒有

(1) $f(a-x) = f(b-x)$ (或 $f(a+x) = f(b+x)$) ($a \neq b$) 成立, 则 $f(x)$ 为周期函数, 且 $|b-a|$ 为其一正周期;

(2) $f(a+x) = -f(b+x)$ (或 $f(a-x) = -f(b-x)$) ($a \neq b$) 成立, 则 $f(x)$ 为周期函数, 且 $2|b-a|$ 为其一正周期;

(3) $f(x-a) + f(x+a) = f(x)$ ($a \neq 0$) 成立, 则 $f(x)$ 为周期函数, 且 $6|a|$ 为其一正周期.

结论 7 对于实数 a_i, b_i, m_i, n_i ($i=1, 2$), 且 $m_1 \cdot m_2 = n_1 \cdot n_2, m_1(a_2 - b_1) \neq n_1 \cdot (a_1 - b_2)$, 若对于定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$, 且对于任意 $x \in \mathbf{R}$, 有

(1) $f(a_i - m_i x) = f(b_i + n_i x)$ ($i=1, 2$), 则 $f(x)$ 为周期函数, 且 $|(a_2 - b_1) + \frac{m_2}{n_2} \cdot (b_2 - a_1)|$ 为其一正周期;

(2) $f(a_i - m_i x) = -f(b_i + n_i x)$ ($i=1, 2$), 则 $f(x)$ 为周期函数, 且 $|(a_2 - b_1) + \frac{n_1}{m_1} \cdot (b_2 - a_1)|$ 为其一正周期;

(3) $f(a_1 - m_1 x) = f(b_1 + n_1 x), f(a_2 - m_2 x) = -f(b_2 + n_2 x)$, 则 $f(x)$ 为周期函数, 且 $2|(a_2 - b_1) + \frac{n_1}{m_1} \cdot (b_2 - a_1)|$ 为其一正周期.

结论 8 设 T 为非零常数, 若对于函数定义域内的任意 x , 恒有

$$f(x+T) = M[f(x)], \quad (1-7)$$

其中 $M(x)$ 满足 $M[M(x)] = x$, 且 $M(x) \neq x$, 则 $f(x)$ 为周期函数, 且 $2T$ 为其一个周期.

以上结论 3 ~ 8 均由周期函数的定义即可推证.

在结论 8 中, 若取 $M(x) = -x$, 则有 $f(x+T) = -f(x)$; 若取 $M(x) = \pm \frac{1}{x}$, 则有

$$f(x+T) = \pm \frac{1}{f(x)}; \text{ 若取 } M(x) = \frac{ax+b}{cx-a} (a^2+bc \neq 0), \text{ 则有 } f(x+T) = \frac{af(x)+b}{cf(x)-a} (a^2+bc \neq 0) \text{ 等.}$$

满足这些条件的 $f(x)$ 均为周期函数, 且 $2T$ 为其一个周期.

在结论 8 中, 若取 $M(x) = \frac{1}{2} + \sqrt{x-x^2}$, 则有 $f(x+T) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x)-[f(x)]^2}$, 此即为 IMO 第 10 届中的一道试题.

我们知道, 对于奇函数, 其图象关于原点 $(0,0)$ 成中心对称; 对于偶函数, 其图象关于 y 轴 $(x=0)$ 成轴对称. 一般地, 我们有

结论 9 函数 $f(x)$ 定义在 \mathbf{R} 上, 对于定义域内任一实数 x , 都有

$$f(a+x) + f(b-x) = c \quad (1-8)$$

成立的充要条件是函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{a+b}{2}, \frac{c}{2})$ 成中心对称.

结论 10 函数 $f(x)$ 定义在 \mathbf{R} 上, 对于定义域内任一实数 x , 都有

$$f(a+x) - f(b-x) = 0 \quad (1-9)$$

成立的充要条件是函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{a+b}{2}$ 成轴对称.

以上两结论的证明留作练习 (参见模拟实战—B 组第 6、7 题).

【基本问题与求解方法】

例 1 (1999 年全国高中联赛题) 若 $(\log_2 3)^x - (\log_5 3)^x \geq (\log_2 3)^{-y} - (\log_5 3)^{-y}$, 则().

A. $x-y \geq 0$ B. $x+y \geq 0$ C. $x-y \leq 0$ D. $x+y \leq 0$

解 选 B. 理由: 因 $0 < \log_5 3 < 1 < \log_2 3$, 知 $y_1 = (\log_2 3)^x$ 为 \mathbf{R} 上的增函数.

又由 $(\log_5 3)^x$ 为 \mathbf{R} 上的减函数, 知 $y_2 = -(\log_5 3)^x$ 为 \mathbf{R} 上的增函数, 从而 $y = y_1 + y_2 = (\log_2 3)^x - (\log_5 3)^x$ 为 \mathbf{R} 上的增函数.

由已知 $(\log_2 3)^x - (\log_5 3)^x \geq (\log_2 3)^{-y} - (\log_5 3)^{-y}$, 得 $x \geq -y$, 即有 $x+y \geq 0$.

例 2 (第 9 届“希望杯”邀请赛题) 设函数 $y = f(x)$ 是周期为 2 的偶函数, 且在区

间 $[0, 1]$ 内单调递减, 则 $f(-1)$ 、 $f(0)$ 、 $f(2.5)$ 的大小关系为()。

- A. $f(-1) < f(2.5) < f(0)$ B. $f(-1) < f(0) < f(2.5)$
 C. $f(0) < f(2.5) < f(-1)$ D. $f(2.5) < f(0) < f(-1)$

解 选 A. 理由: 由 $f(x)$ 的周期性可得, $f(-1) = f(1)$, $f(2.5) = f(0.5)$, 再由 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 内单调递减, 知 $f(1) < f(0.5) < f(0)$, 故有 $f(-1) < f(2.5) < f(0)$.

例 3 (1989 年全国高中联赛题) 对任意的函数 $y = f(x)$, 在同一个直角坐标系中, 函数 $y = f(x-1)$ 与函数 $y = f(-x+1)$ 的图象恒()。

- A. 关于 x 轴对称 B. 关于直线 $x = 1$ 对称
 C. 关于直线 $x = -1$ 对称 D. 关于 y 轴对称

解 选 B. 理由: 由于 $f(t)$ 和 $f(-t)$ 的图象关于直线 $t = 0$ 对称, 从而 $f(x-1)$ 与 $f(-x+1) = f[-(x-1)]$ 的图象关于直线 $x-1 = 0$ 即 $x = 1$ 对称.

例 4 (1988 年全国高中联赛题) 设有三个函数, 第一个是 $y = \varphi(x)$, 它的反函数就是第二个函数, 而第三个函数的图象与第二个函数的图象关于直线 $x + y = 0$ 对称, 那么第三个函数是()。

- A. $y = -\varphi(x)$ B. $y = -\varphi(-x)$ C. $y = -\varphi^{-1}(x)$ D. $y = -\varphi^{-1}(-x)$

解 选 B. 理由: 第一个函数的图象与第二个函数的图象关于 $x - y = 0$ 对称, 第二个函数的图象与第三个函数的图象关于 $x + y = 0$ 对称, 所以第一个函数的图象与第三个函数的图象关于原点对称.

例 5 (1984 年全国高中联赛题) 若 $F\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = x$, 则下列等式中正确的是()。

- A. $F(-2-x) = -2 - F(x)$ B. $F(-x) = F\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$
 C. $F\left(\frac{1}{x}\right) = F(x)$ D. $F[F(x)] = -x$

解 选 A. 理由: 由题设 $F\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = x$, 知 $F(x) = \frac{1-x}{1+x}$, 其图象关于点 $(-1, -1)$ 成中心对称. 根据结论 9, 有 $F(x) + F(-2-x) = -2$.

或者由 $F(-2-x) = \frac{1-(-2-x)}{1+(-2-x)} = -\frac{3+x}{1+x} = -2 - \frac{1-x}{1+x} = -2 - F(x)$ 即得.

或者用特殊值验证排除: 由 $F\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = x$, 令 $x = 1$ 得 $F(0) = 1$, 令 $x = 0$ 得 $F(1) = 0$. 而在 B 的等式中, 令 $x = 0$, 有 $F(0) = F(1)$, 可排除 B; 在 C 的等式中, $x = 0$ 无意义, 排除 C; 在 D 的等式中, 左边 $F[F(1)] = F(0) = 1 \neq -1$, 排除 D.

例 6 (1996 年全国高中联赛题) 如果在区间 $[1, 2]$ 上, 函数 $f(x) = x^2 + px + q$ 与

$g(x) = x + \frac{1}{x^2}$ 在同一点取相同的最小值, 那么 $f(x)$ 在该区间上的最大值是().

A. $4 + \frac{11}{2} \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$

B. $4 - \frac{5}{2} \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$

C. $1 - \frac{1}{2} \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{4}$

D. 以上答案都不对

解 选 B. 理由: 因为 $1 \leq x \leq 2$, 则知

$$g(x) = \frac{x}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{x^2} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{x^2}} = \frac{3}{2} \sqrt[3]{2}, \text{ 当且仅当 } \frac{x}{2} = \frac{1}{x^2}, \text{ 即 } x = \sqrt[3]{2} \text{ 时,}$$

$g(x)$ 有最小值 $\frac{3}{2} \sqrt[3]{2}$.

$$\text{于是由题设有} \begin{cases} -\frac{p}{2} = \sqrt[3]{2}, \\ q - \frac{p^2}{4} = \frac{3}{2} \sqrt[3]{2}, \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} p = -2 \sqrt[3]{2}, \\ q = \frac{3}{2} \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}. \end{cases}$$

$$\text{故 } f(x) = x^2 - 2 \sqrt[3]{2}x + \frac{3}{2} \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} = (x - \sqrt[3]{2})^2 + \frac{3}{2} \sqrt[3]{2}.$$

又 $2 - \sqrt[3]{2} > \sqrt[3]{2} - 1$, 知 $f(x)$ 在 $x \in [1, \sqrt[3]{2}]$ 上为减函数, $x \in [\sqrt[3]{2}, 2]$ 上为增函数, 故 $f(x)$ 有最大值 $f(2) = 4 - \frac{5}{2} \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$.

例 7 (2003 年全国高中联赛题) 已知 x, y 都在区间 $(-2, 2)$ 内, 且 $xy = -1$, 则函数 $u = \frac{4}{4-x^2} + \frac{9}{9-y^2}$ 的最小值是().

A. $\frac{8}{5}$

B. $\frac{24}{11}$

C. $\frac{12}{7}$

D. $\frac{12}{5}$

解 选 D. 理由: 由已知得 $y = -\frac{1}{x}$, 从而

$$u = \frac{4}{4-x^2} + \frac{9}{9-y^2} = \frac{4}{4-x^2} + \frac{9x^2}{9x^2-1} = 1 + \frac{35}{37 - (9x^2 + \frac{4}{x^2})}.$$

而 $x \in (-2, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 2)$, 当 $9x^2 = \frac{4}{x^2}$, 即 $x^2 = \frac{2}{3}$ 时, $9x^2 + \frac{4}{x^2}$ 的值最小, 此时 u 有最小值 $\frac{12}{5}$.

例 8 (2004 年全国高中联赛题) 设函数 $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, 满足 $f(0) = 1$, 且对任意 $x, y \in \mathbf{R}$, 都有 $f(xy+1) = f(x) \cdot f(y) - f(y) - x + 2$, 则 $f(x) =$ _____.

解 填 $x+1$. 理由: 对任意的 $x, y \in \mathbf{R}$,

有 $f(xy+1) = f(x) \cdot f(y) - f(y) - x + 2$,
 $f(xy+1) = f(y) \cdot f(x) - f(x) - y + 2$,
 故 $f(x) \cdot f(y) - f(y) - x + 2 = f(y) \cdot f(x) - f(x) - y + 2$,
 即 $f(x) + y = f(y) + x$.
 由题设, 当 $y = 0$ 时, 有 $f(0) = 1$, 故 $f(x) = x + 1$.

【解题思维策略分析】

1. 注意函数基本性质的灵活运用

例 9 (1994 年全国高中联赛题) 已知 $x, y \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, 且 $\begin{cases} x^3 + \sin x - 2a = 0, \\ 4y^3 + \sin y \cdot \cos y + a = 0, \end{cases}$
 则 $\cos(x+2y) =$ _____.

解 填 1. 理由: 考察函数 $f(t) = t^3 + \sin t$, 它在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上是单调递增的函数.
 令 $f(x) = 2a$, 即 $x^3 + \sin x - 2a = 0$, 及 $f(2y) = -2a$, 即 $4y^3 + \sin y \cdot \cos y + a = 0$.
 由 $f(x) = 2a = f(-2y)$, 得 $x = -2y$.

而 $2y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, 知 $y \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, 故 $\cos(x+2y) = 1$.

例 10 (第 9 届“希望杯”邀请赛培训题) 定义在实数集 \mathbf{R} 上的函数 $y = f(x+1)$ 的反函数是 $y = f^{-1}(x+1)$, 并且 $f(1) = 3997$, 则 $f(1998)$ 的值等于 _____.

解 填 2000. 理由: 由题设 $y = f^{-1}(x+1)$, 得
 $f(y) = x+1$, 即 $x = f(y) - 1$, 故得反函数 $y = f(x) - 1$.
 由题设, 有 $f(x) - 1 = f(x+1)$, 即 $f(x+1) - f(x) = -1$.
 于是 $f(1998) = [f(1998) - f(1997)] + [f(1997) - f(1996)] + \cdots + [f(2) - f(1)] + f(1) = -1997 + 3997 = 2000$.

例 11 (第 10 届“希望杯”邀请赛培训题) $f(x)$ 和 $g(x)$ 的定义域都是 \mathbf{R} , $f(x)$ 是偶函数, $g(x)$ 是奇函数, 且 $f(x) + g(x) = \frac{1}{x^2 - x + 1}$, 那么 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 的取值范围为 _____.

解 填当 $x > 0$ 时, $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 2$; 当 $x < 0$ 时, $\frac{f(x)}{g(x)} \leq -2$. 理由: 由 $f(x) + g(x) = \frac{1}{x^2 - x + 1}$ 及 $g(x)$ 为奇函数, 可得 $f(x) - g(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$.

于是 $f(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^2 - x + 1} + \frac{1}{x^2 + x + 1} \right) = \frac{x^2 + 1}{(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)}$,

$$g(x) = \frac{x}{(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)},$$

从而 $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 + 1}{x} = x + \frac{1}{x}$.

当 $x > 0$ 时, $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 2$; 当 $x < 0$ 时, $\frac{f(x)}{g(x)} \leq -2$.

例 12 (北京大学理科实验班入学考试试题) $f(x)$ 的定义域是 \mathbf{R} , 若 $c \in \mathbf{R}$, 使 $f(c) = c$, 则称 c 是 $f(x)$ 的一个不动点. 设 $f(x)$ 的不动点数目是有限多个, 下述命题是否正确? 若正确, 请给予证明; 若不正确, 请举出一个例子说明.

(1) $f(x)$ 是奇函数, 则 $f(x)$ 的不动点数目是奇数;

(2) $f(x)$ 是偶函数, 则 $f(x)$ 的不动点数目是偶数.

解 由不动点的定义可知, 函数 $f(x)$ 的不动点个数就是函数 $y = f(x)$ 与 $y = x$ 的图象交点的个数. 先可考虑两个特殊的奇、偶函数试探而得结论.

(1) 正确. 证明如下: 因 $f(x)$ 为奇函数, 且 $x \in \mathbf{R}$, 则 $f(-0) = -f(0)$, 即 $f(0) = 0$. 因此, 0 是 $f(x)$ 的一个不动点.

假设 $c \neq 0$ 是 $f(x)$ 的不动点, 则由定义知 $f(c) = c$. 因为 $f(x)$ 是奇函数, 所以 $f(-c) = -f(c) = -c$, 从而 $-c$ 也是 $f(x)$ 的不动点. 又因为 $c \neq -c$, 所以 $f(x)$ 的非 0 不动点如果存在, 则必以互为相反数的形式成对出现. 又根据题设, $f(x)$ 只有有限个不动点, 因此, $f(x)$ 的不动点数目为奇数.

(2) 不正确. 反例如下: $f(x) = 1$ 是偶函数. 因为 $f(1) = 1$, 所以 1 是 $f(x)$ 的一个不动点. 设 c 是 $f(x) = 1$ 的不动点, 则 $f(c) = c$. 又 $f(c) = 1$, 所以 $c = 1$. 因此, $f(x) = 1$ 有且只有一个不动点, 故命题不正确.

2. 注意二次函数性质的灵活运用

例 13 (第 13 届“希望杯”邀请赛培训题) 已知二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbf{R}, a \neq 0$). (1) $f(-1) = 0$, (2) 对任意 $x \in \mathbf{R}, x \leq f(x) \leq \frac{1}{2}(x^2 + 1)$, 那么 $a =$ _____, $b =$ _____, $c =$ _____.

解 $a = \frac{1}{4}, b = \frac{1}{2}, c = \frac{1}{4}$. 理由: 由条件(2) 令 $x = 1$ 得 $1 \leq f(1) \leq 1$, 即 $f(1) = 1$. 又 $f(-1) = 0, f(0) = c$, 于是可令^[注] $f(x) = \frac{1}{2}x(x+1) - c(x-1)(x+1) = \frac{1}{2}(1-2c)x^2 + \frac{1}{2}x + c$.

由条件(2), 知下述不等式对一切 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立:

$$\frac{1}{2}(1-2c)x^2 + \frac{1}{2}x + c \geq x, \text{ 即 } \frac{1}{2}(1-2c)x^2 - \frac{1}{2}x + c \geq 0.$$

$$\text{于是 } \begin{cases} \frac{1}{2}(1-2c) > 0, \\ \Delta = \frac{1}{4} - 4 \cdot c \cdot \frac{1}{2}(1-2c) \leq 0, \end{cases} \quad \text{解得 } c = \frac{1}{4}.$$

$$\text{从而 } f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}.$$

注 此处的函数式用到了二次函数的三点式(即拉格朗日多项式表示的函数式): 若二次函数 $f(x)$ 经过三点 $(x_1, f(x_1))$ 、 $(x_2, f(x_2))$ 、 $(x_3, f(x_3))$, 则 $f(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \cdot f(x_1) + \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} \cdot f(x_2) + \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \cdot f(x_3)$.

例 14 (2000年全国高中联赛题) 若函数 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{13}{2}$ 在区间 $[a, b]$ 上的最小值为 $2a$, 最大值为 $2b$, 求 $[a, b]$.

解 分三种情况讨论区间 $[a, b]$.

(1) 若 $0 \leq a < b$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调递减, 故 $f(a) = 2b, f(b) = 2a$, 于是有

$$\begin{cases} 2b = -\frac{1}{2}a^2 + \frac{13}{2}, \\ 2a = -\frac{1}{2}b^2 + \frac{13}{2}, \end{cases} \quad \text{解之得 } [a, b] = [1, 3].$$

(2) 若 $a < 0 < b$, $f(x)$ 在 $[a, 0]$ 上单调递增, 在 $[0, b]$ 上单调递减, 因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取最大值 $2b$, 在 $x=a$ 或 $x=b$ 处取最小值 $2a$. 故 $2b = \frac{13}{2}, b = \frac{13}{4}$.

由于 $a < 0$, 又 $f(b) = -\frac{1}{2}(\frac{13}{4})^2 + \frac{13}{2} = \frac{39}{32} > 0$, 故 $f(x)$ 在 $x=a$ 处取最小值 $2a$, 即 $2a = -\frac{1}{2}a^2 + \frac{13}{2}$, 解得 $a = -2 - \sqrt{17}$. 于是, 得 $[a, b] = [-2 - \sqrt{17}, \frac{13}{4}]$.

(3) 当 $a < b \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调递增, 故 $f(a) = 2a, f(b) = 2b$, 即 $2a = -\frac{1}{2}a^2 + \frac{13}{2}, 2b = -\frac{1}{2}b^2 + \frac{13}{2}$, 由于方程 $\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{13}{2} = 0$ 的两根异号, 故满足 $a < b < 0$ 的区间不存在.

综上所述, 所求区间为 $[1, 3]$ 或 $[-2 - \sqrt{17}, \frac{13}{4}]$.

例 15 (2002年上海市春季高考题) 对于函数 $f(x)$, 若存在 $x_0 \in \mathbf{R}$, 使 $f(x_0) = x_0$ 成立, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的不动点, 已知函数 $f(x) = ax^2 + (b+1)x + (b-1) (a \neq 0)$.

(1) 当 $a = 1, b = -2$ 时, 求函数 $f(x)$ 的不动点;

(2) 若对任意实数 b , 函数 $f(x)$ 恒有两个相异的不动点, 求 a 的取值范围;

(3) 在(2)的条件下,若 $y = f(x)$ 的图象上 A, B 两点的横坐标是函数 $f(x)$ 的不动点,且 A, B 两点关于直线 $y = kx + \frac{1}{2a^2 + 1}$ 对称,求 b 的最小值.

解 (1) 当 $a = 1, b = -2$ 时, $f(x) = x^2 - x + 3$, 依题意可知 $x^2 - x - 3 = x$, 求得 $x_1 = -1, x_2 = 3$, 从而 $f(x)$ 的不动点为 -1 或 3 .

(2) 由 $f(x) = ax^2 + (b+1)x + (b-1) (a \neq 0)$ 恒有两个相异的不动点, 知 $ax^2 + bx + b - 1 = 0$ 恒有两个相异的实数根, 得 $\Delta = b^2 - 4ab + 4a > 0 (b \in \mathbf{R})$ 恒成立, 于是 $\Delta' = (4a)^2 - 16a < 0$ [注], 解得 $0 < a < 1$.

故当 $b \in \mathbf{R}, f(x)$ 恒有两个相异的不动点时, a 的取值范围为 $0 < a < 1$.

(3) 由题意, A, B 两点应在直线 $y = x$ 上, 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$.

由点 A, B 关于直线 $y = kx + \frac{1}{2a^2 + 1}$ 对称, 知 $k = -1$.

设 AB 的中点 $M(x', y')$, 由 x_1, x_2 是方程 $ax^2 + bx + b - 1 = 0$ 的两根, 知

$$x' = y' = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a}.$$

注意到点 M 在直线 $y = -x + \frac{1}{2a^2 + 1}$ 上, 则 $-\frac{b}{2a} = \frac{b}{2a} + \frac{1}{2a^2 + 1}$, 即

$$b = -\frac{a}{2a^2 + 1} = -\frac{1}{2a + \frac{1}{a}} \geq -\frac{1}{2\sqrt{2a \cdot \frac{1}{a}}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

当且仅当 $2a = \frac{1}{a}$, 即 $a = \frac{\sqrt{2}}{2} \in (0, 1)$ 时, 上式取等号. 故 b 的最小值为 $-\frac{\sqrt{2}}{4}$.

注 此处的判别式是对关于 b 的二次式 $b^2 - 4ab + 4a$ 恒正而言. 一般地, 对于 $f(x) = ax^2 + bx + c (a > 0)$, 若 $f(x) \geq 0$ 恒成立, 则 $\Delta = b^2 - 4ac \leq 0$; 若 $\Delta = b^2 - 4ac \leq 0$, 则 $f(x) \geq 0$ 恒成立; 若存在 x_0 , 使 $f(x_0) \leq 0$, 则 $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$.

3. 注意由函数基本性质推导出的结论的灵活运用

例 16 (美国第 2 届数学邀请赛题) 函数 $f(x)$ 定义在实数域上, 且满足下列条件: 对任何实数 x , 有 $f(2+x) = f(2-x)$, 且 $f(7+x) = f(7-x)$. 若 $x = 0$ 是方程 $f(x) = 0$ 的一个根, 问方程 $f(x) = 0$ 在区间 $-1000 \leq x \leq 1000$ 中至少应有几个根?

解 由函数 $f(x)$ 对任何实数 x , 有 $f(2+x) = f(2-x), f(7+x) = f(7-x)$ 知, $f(x)$ 为广义(II)或(III)型偶函数, $2|2-7| = 10$ 或 $|(2+2) - (7+7)| = 10$ 为其一正周期(结论 5(1)或结论 7(1)).

又由 $0 = f(0) = f(2-2) = f(2+2) = f(4) = f(7-3) = f(7+3) = f(10)$, 知在区间 $-10(k+1) \leq x < -10k$ 及 $10k < x \leq 10(k+1) (k = 0, 1, 2, \dots, 99)$ 中, $f(x) = 0$ 至少有 2 个根, 计有 400 个根, 又 $f(0) = 0$, 故 $f(x) = 0$ 在区间 $-1000 \leq$