21世纪财经专业规划教材

高等数学（下册）

线性代数

赵白云 王建明 赵 辉 编著

Gaodeng Shuxue
Xianxing Daishu

立信会计出版社
LIXIN KUAIJI CHUBANSHE

21 世纪财经专业规划教材

高等数学(下)

线性代数

赵白云　王建明　赵　辉　编著

立信会计出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学．下册．线性代数/赵白云主编.—上海：立信会计出版社,2005.9

21世纪财经专业规划教材

ISBN 7-5429-1554-1

Ⅰ.高… Ⅱ.赵… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材 ②线性代数—高等学校—教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第112810号

出版发行	立信会计出版社
经　　销	各地新华书店
电　　话	(021)64695050×215
	(021)64391885(传真)
	(021)64388409
网上书店	*www.Lixinbook.com*
	(021)64388132
地　　址	上海市中山西路2230号
邮　　编	200235
网　　址	*www.lixinaph.com*
E-mail	*lxaph@sh163.net*
E-mail	*lxzbs@sh163.net*(总编室)

印　　刷	郑州铁路局印刷厂
开　　本	850×1168毫米 1/32
印　　张	10
字　　数	243千字
版　　次	2005年9月第1版
印　　次	2005年9月第1次
印　　数	3000
书　　号	ISBN 7-5429-1554-1/O·0005
定　　价	39.80元

前　　言

随着市场经济的发展和现代化管理水平的提高，数学方法在各分支学科的渗透更加广泛和深入，社会对大学生的数学素质要求也更高。作者在多年教学经验的基础上，吸收多种教材的精华，编写了这套高等数学教材，本教材适合大学非数学专业学生使用。本教材有以下特点：

1. 难易适当，深入浅出，举一反三，易教易学。

2. 各章都配备了 A、B 两套习题，可供不同基础、不同层次的学生选用，题型丰富、涵盖面广，能使学生通过练习，牢固掌握所学知识点。本书还精心编选了部分应用例题和习题，能使学生开阔知识面，提高应用数学知识的能力。

3. 按照中学新课改要求，注意与中学内容相衔接。考虑到学生各类考试需要，本教材基本涵盖了高等数学考核知识点的所有内容，为学生进一步深造提供必要的知识准备。

4. 本教材编选进了数学文化方面的阅读材料，以此提高学生学习高等数学的兴趣和数学文化修养。

5. 本书分上、下两册。上册为微积分，下册为线性代数，书中带 * 号章节为选学内容，不同专业和基础的学生可以根据实际情况有所侧重地选学教材有关章节。

本书由赵白云、秦素平、李万军、王建明、宿金勇、薛庆平、赵辉合作编著。其中李万军执笔上册预备知识、第一、第六章；秦素平执笔上册第二、第三章；宿金勇执笔上册第四、第五章；薛庆平执笔上册第七、第八章；王建明执笔下册第一、第二章；赵白云执笔下册

第三、第四章；赵辉执笔下册第五、第六章。上册中阅读材料由秦素平、李万军摘编。本书上册由秦素平统稿，下册由赵白云统稿。

在本书的编写过程中，作者参考了国内众多院校教师和数学工作者编写的教材和书籍，摘编、引用了部分数学同行的文章，在此一并表示感谢。

在编写过程中尽管作者都付出了艰辛的劳动，但由于水平和时间所限，疏漏之处在所难免，恳请同行、专家及读者指正，在此表示深切谢意。

作者

2005 年 6 月 10 日

目　　录

第一章 行列式

在生产经营管理活动中，特别是在商品的流通和交换过程中所遇到的问题，有许多可以直接或近似地表示成一些变量间的线性关系，因此研究变量间的线性关系是非常重要的。例如，解线性方程组等。而行列式、矩阵、向量又是研究线性方程组的重要工具。本章在二阶、三阶行列式的基础上，引出 n 阶行列式的概念，讨论 n 阶行列式的性质，以及行列式的计算方法，最后应用 n 阶行列式解 n 元 n 个线性方程组。

§1.1 二阶、三阶行列式

一、二元线性方程组与二阶行列式

行列式的概念是从解线性方程组的问题中引入的。我们把未知量的最高次数是一次的方程组称为线性方程组。

含有两个未知量两个方程的线性方程组的一般形式为：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

用加减消元法分别消去方程组(1.1)中的 x_2, x_1，当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，得

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \qquad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \tag{1.2}$$

是线性方程组(1.1)的解。

我们用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

表示代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$。这是由 4 个元素($2^2$ 个元素)a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}排成的二行二列的记号,称为二阶行列式。其中横排叫行,纵排叫列。每个元素 a_{ij}都有两个下标,第一个下标表示元素所在的行,叫行标,第二个下标表示元素所在的列,叫列标。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

二阶行列式所表示的代数和,可根据图 1 - 1 确定。即实线联结的两个元素的乘积减去虚线联结的两个元素的乘积。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$-$ $\qquad$ $+$

图 1 - 1

用二阶行列式的记号,线性方程组(1.1)的解(1.2)可以表示为:当 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ 时,

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \tag{1.3}$$

(1.3)式中分母是方程组(1.1)的系数按它们在方程组中的次序排列组成的行列式,称为方程组的系数行列式;分子是用常数项 b_1,b_2 分别替换行列式中 x_1 所在列的系数和 x_2 所在列的系数后构成的行列式。

若记

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\qquad D_1=\begin{vmatrix}b_1 & a_{12}\\ b_2 & a_{22}\end{vmatrix}\qquad D_2=\begin{vmatrix}a_{11} & b_1\\ a_{21} & b_2\end{vmatrix}$$

则方程组(1.1)的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}\qquad x_2=\frac{D_2}{D}\qquad (D\neq 0)$$

【例1】 解二元线性方程组

$$\begin{cases}2x_1+x_2=5\\ x_1-3x_2=-1\end{cases}$$

解 因为

$$D=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -3\end{vmatrix}=-6-1=-7\neq 0$$

$$D_1=\begin{vmatrix}5 & 1\\ -1 & -3\end{vmatrix}=-15+1=-14$$

$$D_2=\begin{vmatrix}2 & 5\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2-5=-7$$

所以方程组的解是

$$x_1=\frac{D_1}{D}=2\quad x_2=\frac{D_2}{D}=1$$

二、三元线性方程组与三阶行列式

含有三个未知量三个方程的线性方程组的一般形式为:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\end{cases}\qquad(1.4)$$

用加减消元法分别消去方程组(1.4)中的 x_2 与 x_3,x_3 与 x_1,x_1 与 x_2;当 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\neq 0$ 时,得

$$
\begin{cases}
x_1 = \dfrac{b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-a_{13}a_{22}b_3-a_{12}b_2a_{33}-b_1a_{23}a_{32}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}} \\
x_2 = \dfrac{a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{13}b_2a_{31}-b_1a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}} \\
x_3 = \dfrac{a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-b_1a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}b_3-a_{11}b_2a_{32}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}}
\end{cases} \tag{1.5}
$$

是线性方程组(1.3)的解。

我们用记号

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
$$

表示代数和

$$
a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}
$$

并称之为三阶行列式。它由 9 个元素(3^2 个元素)$a_{ij}(i,j=1,2,3)$ 排成三行三列,横排叫行,纵排叫列。即

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31} -a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}
$$

三阶行列式表示的代数和中,各项符号可以由图 1-2 确定。

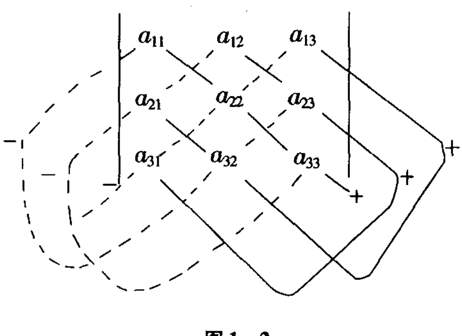

图 1-2

其中各实线联结的三个元素的乘积是代数和中的正项，各虚线联结的三个元素的乘积是代数和中的负项。

【例 2】 计算三阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1\times1\times(-1)+0\times3\times(-2)+(-2)\times2\times3-(-2)\times1\times(-2)-0\times2\times(-1)-1\times3\times3=-26$$

【例 3】 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=13 \\ x_1+x_2+x_3=10 \\ 2x_1+3x_2-x_3=1 \end{cases}$$

解　因为

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1\times1\times(-1)+(-1)\times1\times2+2\times1\times3-2\times1\times2-(-1)\times1\times(-1)-1\times1\times3 = -5\neq0$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 13 & -1 & 2 \\ 10 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}=-5$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & 13 & 2 \\ 1 & 10 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-10$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1 & -1 & 13\\1 & 1 & 10\\2 & 3 & 1\end{vmatrix}=-35$$

所以,方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1 \qquad x_2=\frac{D_2}{D}=2 \qquad x_3=\frac{D_3}{D}=7$$

§1.2 n 阶行列式的定义

前面我们用二阶、三阶行列式表示二元、三元线性方程组的解,那么 n 元 n 个线性方程组的解是否也能利用行列式表示呢?这就需要把二阶、三阶行列式的意义推广到一般的 n 阶行列式。为此我们介绍 n 级排列的概念。

一、n 级排列及其逆序数

由数码 $1,2,\cdots,n$ 组成的每个有序数组,都称为一个 n 级排列。

例如,2143 和 1324 都是 4 级排列;12345 和 32145 都是 5 级排列。

又如,321 和 312 是 3 级排列。显然,由数码 1,2,3 组成的所有 3 级排列共有 $3!=6$ 个,它们是 123,132,213,231,312,321。

n 级排列的总数为 $n(n-1)(n-2)\cdots3\times2\times1=n!$

在一个 n 级排列中,可能有较大的数码排在较小的数码前面,构成与自然顺序相反的顺序,我们称之为逆序。

定义 1.1 在一个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中,如果有较大的数 i_t 排在较小的数 i_s 前面($i_s<i_t$),则称 i_t 与 i_s 构成一个逆序。一个 n 级排列中逆序的总数,称为它的逆序数,记为 $N(i_1i_2\cdots i_n)$。

例如,在 4 级排列 4132 中,4 在 1 前面,3 在 2 前面,4 在 2 前面,4 在 3 前面,共有 4 个逆序,所以 $N(4132)=4$。

5 级排列 12345 中没有逆序，其逆序数 $N(12345)=0$。

如果排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数 $N(i_1i_2\cdots i_n)$ 是奇数，则称 $i_1i_2\cdots i_n$ 为奇排列；若 $N(i_1i_2\cdots i_n)$ 是偶数，则称 $i_1i_2\cdots i_n$ 为偶排列。

排列 $123\cdots n$ 的逆序数是零，我们规定它是偶排列。

例如，三级排列中，因为

$N(123)=0, N(231)=2, N(312)=2,$

$N(132)=1, N(213)=1, N(321)=3$

所以 3 级排列 123，231，312 是偶排列，132，213，321 是奇排列。

在一个 n 级排列 $i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$ 中，如果仅将它的两个数码 i_t 与 i_s 对调，得到另一个排列 $i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$，这样的变换称为一个对换，记为对换 (i_t,i_s)。

例如，对排列 51432 施以对换 $(1,3)$ 后得排列 53412；再对排列 53412 施以对换 $(5,4)$ 后得排列 43512。因为，

$N(51432)=7, N(53412)=8, N(43512)=7$

所以排列 51432 是奇排列，经过一个对换 $(1,3)$ 后变为偶排列 53412，53412 经过一个对换 $(5,4)$ 后又变为奇排列 43512。

定理 1.1 任意一个 n 级排列经过一个对换后奇偶性改变。

证 (1) 首先证明对换相邻两个数码的特殊情形。设排列为

$$AijB$$

其中 A,B 表示除 i,j 两个数码外其余的数码。经过对换 (i,j)，变为排列

$$AjiB$$

比较以上两个排列中的逆序，显然，A,B 中数码的次序没有改变，而且 i,j 与 A,B 中数码的次序也没有改变，改变的仅仅是 i 与 j 的次序，因此，当 $i>j$ 时，经过对换 (i,j) 后新排列比原排列减少了一个逆序；当 $i<j$ 时，经过对换 (i,j) 后新排列比原排列增加了一个逆序，所以对换前后两个排列的奇偶性相反。

(2) 再证明一般情形。设排列为

$$Aik_1k_2\cdots k_sjB$$

经过对换(i,j)后得到新的排列

$$Ajk_1k_2\cdots k_siB$$

新排列可以由原排列中的数码 i 依次与数码 $k_1,k_2,\cdots,k_s,j$ 作 $S+1$ 次相邻对换得排列

$$Ak_1k_2\cdots k_sjiB$$

再将 j 依次与 $k_s,k_{s-1},\cdots,k_2,k_1$ 作 S 次相邻对换而得到。即新排列可以由原排列作 $2S+1$ 次相邻对换而得到。由(1)可知,它们的奇偶性相反。

二、n 阶行列式的定义

为了给出 n 阶行列式的定义,我们先分析二阶、三阶行列式的结构,找出一般规律。

观察二阶和三阶行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

容易看出:

(1)二阶行列式右边的每一项都是两个元素的乘积,这两个元素位于不同的行、不同的列。因此,二阶行列式右边的任意项除正负号外可以写为 $a_{1j_1}a_{2j_2}$ 的形式,其中第一个下标(即行标)组成自然数顺序的排列12,而第二个下标(即列标)排成 j_1j_2,它是1、2二个数的二级排列。二级排列共有2种,对应二阶行列式右端共有2项。

三阶行列式右边的每一项都是三个元素的乘积,这三个元素

位于不同的行、不同的列。因此,三阶行列式右边的任意项除正负号外可以写为 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 的形式,其中行标组成自然数顺序的排列 123,而列标排成 $j_1j_2j_3$,它是 1、2、3 三个数的三级排列。三级排列共有 6 种,对应的三阶行列式右端共有 6 项。

(2)各项的正负号与列标的排列对照:在二阶行列式中,带正号的一项列标排列是 12,带负号的一项列标排列是 21。显然带正号的项的列标排列是偶排列,带负号的项的列标排列是奇排列。

在三阶行列式中,带正号的三项列标排列是:123,231,312;带负号的三项列标排列是:132,213,312。经计算可知前三个排列都是偶排列,而后三个排列都是奇排列。因此各项所带的正负号可以表示为 $(-1)^{N(j_1j_2j_3)}$。其中 $N(j_1j_2j_3)$ 为列标排列的逆序数。

综合以上分析,三阶行列式可以写成:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3} (-1)^{N(j_1j_2j_3)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

$\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 表示对 1、2、3 三个数的所有排列 $j_1j_2j_3$ 求和。

根据以上二阶、三阶行列式的规律,可给出 n 阶行列式的定义如下。

定义 1.2 用 n^2 个元素 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,n)$ 排成 n 行 n 所组成的列记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式,其中横排称为行,纵排称为列。它表示所有取自不同行不同列的 n 个元素乘积的代数和,各项的符号是:当这一项中元素的行标按自然数顺序排列后,如果对应的列标构成的排列

是偶排列则取正号，是奇排列则取负号。因此，n 阶行列式所表示的代数和中的一般项可以写为：

$$(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

其中，$j_1j_2\cdots j_n$ 为 n 级排列。当 $j_1j_2\cdots j_m$ 取遍所有 n 级排列时，就得到 n 阶行列式表示的代数和中所有的项，共为 $n!$ 项。

即
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

当 $n=2$ 时就得到二阶行列式，当 $n=3$ 时就得到三阶行列式，一阶行列式 $|a|$ 就是 a，但要注意不要与绝对值记号相混淆。

元素为 a_{ij} 的行列式有时简记为 $|a_{ij}|$。

【例 1】 下列各项是不是四阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 中的项？如果是，取什么符号？

(1) $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ (2) $a_{13}a_{24}a_{33}a_{42}$ (3) $a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}$

解 (1) $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ 的列标排列是 1234，所以它是 D 的一项。由于 $N(1234)=0$，所以它应取正号。

(2) $a_{13}a_{24}a_{33}a_{42}$ 的列标顺序是 3432，它有两个元素同时取自第三列，所以它不是 D 的项。

(3) $a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}$ 的列标排列是 2143，所以它是 D 的一项。由于 $N(2143)=2$，所以它应取正号。

【例 2】 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{24} \\ a_{31} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & 0 \end{vmatrix}$$

解 根据定义