动力学
振动与控制新进展

◇主　编　马兴瑞
◇副主编　郑钢铁 段广仁 崔平远

中国宇航出版社

动力学 振动与控制新进展

主 编 马兴瑞

副主编 郑钢铁 段广仁 崔平远

中国宇航出版社

·北京·

ISBN 7-80218-137-2
9 787802 181373 >

图书在版编目(CIP)数据

动力学 振动与控制新进展/马兴瑞主编 .—北京:中国宇航出版社,2006.7
ISBN 7-80218-137-2

Ⅰ.动...　Ⅱ.马...　Ⅲ.①动力学②振动理论③控制理论
Ⅳ.O3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 068943 号

责任编辑 张艳艳　**装帧设计** 03 工舍　**责任校对** 王　妍

出版发行 中国宇航出版社
地　址 北京市阜成路 8 号　邮　编 100830
(010)68768548
网　址 www.caphbook.com / www.caphbook.com.cn
经　销 新华书店
发行部 (010)68371900　(010)88530478(传真)
(010)68768541　(010)68767294(传真)
零售店 读者服务部　北京宇航文苑
(010)68371105　(010)62529336
承　印 北京智力达印刷有限公司

版　次 2006 年 7 月第 1 版
2006 年 7 月第 1 次印刷
规　格 787×1092
开　本 1/16
印　张 23
字　数 569 千字
定　价 89.00 元

序

我怀着十分激动与十分感激的心情来为《动力学 振动与控制新进展》一书写序。之所以十分激动,是因为这本书既是对我国在近10余年来有关方面的研究进展的介绍和总结,也是祝贺黄文虎院士的80华诞;之所以十分感激,是因为黄文虎院士是我的老师,而且是我在学术上、事业上能取得一些成就的几位关键老师之一。

黄文虎院士是浙江永康人,1926年7月生于上海,今年刚好是他的80华诞之年。我国南方地区发蒙较早,黄先生6岁就进入永康县小学读书,后考入金华中学,这是浙江省一所著名的中学,师资力量很强、学风很好。1945年抗日战争胜利后,他考入浙江大学电机系学习,这里有很多国内外知名的教授、学者,使他受到了当时我国最先进的科学和技术的熏陶。1949年杭州解放后,他被分配到天津中央电工二厂工作。1950年9月,他被招入哈尔滨工业大学研究生班学习,并因教学需要抽调担任大学理论力学的教学工作。1954年研究生结业时,他的结业论文是与振动理论有关的课题,从此他与振动工程结下了不解之缘。

1959年哈尔滨工业大学成立工程数理力学系,黄文虎老师担任系副主任。1962年哈尔滨工业大学直属国防科委后,建立了工程力学系(即航天工程系),他担任飞行器结构强度专业教研室主任,从此又专注于航空航天事业。同年他晋升为副教授,主讲振动理论及气动弹性力学等课程。当时哈尔滨工业大学只有50几位副教授,他们被称为800壮士的排头兵。此后的几年,一直到文化大革命,他把主要精力都放在国防新专业的建设上。

1977年,经历了10年文化大革命的浩劫后,他虽已身心疲惫,但仍满腔热情地投入到国防科研事业上。他和吴瑶华、刘暾、邵成勋等老师一起,创建了飞行器总体研究室,把原来从事航天工程的教师又团结到了一起,为以后恢复飞行器设计专业和航空航天学科打好了基础。1979年,他以丰硕的科研成果和优秀的教学经历晋升为教授。1981年,他担任哈尔滨工业大学副校长,代理负责全校工作。黄教授领导的一般力学学科,被国家首批批准为博士学位授予点,他也成为了我国首批博士生导师。1983年,他担任哈尔滨工业大学校长。1985年,已年近花甲的黄教授,从繁重的校长岗位上退下来以后,仍继续担任研究生院院长、校学术委员会主任等职。社会兼职有国务院学位委员会学科评议组成员、国家自然科学基金委委员、中国振动工程学会副理事长、理事长、黑龙江省科协主席等职。1995年,黄文虎教授以力学家、航天工程专家的斐然成

就被选为中国工程院院士。

黄文虎院士的主要研究方向是非线性动力学、飞行器及复杂结构动力学与控制、设备故障诊断等。出版的专著有《振动与冲击手册》(主编,国防工业出版社,1988),《一般力学(动力学、振动与控制)的最新进展》(主编,科学出版社,1994)等。众所周知,动力学、振动以及控制在工业领域具有广泛的应用,是技术发展的基础,特别是近些年我国航天技术的快速发展,更是促进了相关研究的发展。

早在1972年,黄教授就到哈尔滨汽轮机厂参加了我国当时最大的60万千瓦汽轮机的设计及关键技术研究工作。并对整圈连接长叶片振动设计,提出了独到的计算方法和“三重点”调频理论,为国内有关厂家所普遍采用,有效地指导了我国新型长叶片设计。“三重点”调频理论于1981年发表在世界著名杂志《美国航空航天学报》(AIAA Journal)上。

在航天器结构动力学与控制方面的研究是黄文虎教授投入精力最多的工作。其中,他完成了多项国家高技术发展规划项目、国防重大基础研究项目和国防预研项目,如“复杂组合体结构动力分析与试验”、“天地往返运输系统的结构动力学稳定性分析”和“具有挠性太阳帆板的三轴稳定卫星动力学与控制”等,并荣获多项航天工业部科技进步奖。在“十五”计划期间,黄教授又老当益壮,在古稀之年积极主持、指导和参与了诸如“星箭耦合振动分析与隔振技术”等一系列重大的科学技术项目的研究工作。在这方面的著作有《多柔体系统动力学》(主编,科学出版社,1996)。

非线性动力学是力学学科近期取得研究成果最多的领域,黄文虎院士从做研究生时就致力于这方面的研究,他重视把研究成果应用于工程实际中,从20世纪末开始,他就和天津大学陈予恕院士一起主持了国家自然科学基金重大项目“大型旋转机械的非线性动力学设计”和国家重大基础研究项目“多跨转子高维非线性动力学系统约化及求解方法研究”。2005年,由于这方面的研究成果卓著,黄先生荣获国家科技进步二等奖。在此期间,他还主编了“Advances in Nonlinear Dynamics in China”一书,并由荷兰 Swets & Zeitlinger Publishers 出版公司于2002年出版发行,将中国的非线性动力学研究全面系统地介绍到了国外。

设备故障诊断是近30年发展起来的一门新兴学科,它可以说是大工业设备的医学。黄文虎教授是我国在设备故障诊断方面较早开展研究的先驱者之一。从“六五”计划开始,他就承担了省和国家科技攻关项目“汽轮发电机组振动监测与故障诊断方法的研究”,在故障诊断方面较早地引入了模糊数学,提出了模糊诊断的新方法;同时又把人工智能、专家系统、神经网络等新技术引入故障诊断的研究中,开发了多套具有中国特色的振动监测和故障诊断系统。该项

目于1987年和1992年分别荣获航天工业部和机械电子工业部科技进步一等奖。以后，黄先生又对卫星和空间站开展了大量的故障诊断研究工作，发展了故障诊断的理论和方法，1999年获国防科工委科学技术二等奖。1996年他在科学出版社出版了《设备故障诊断原理、技术及应用》一书，系统地总结了在这方面的研究成果。

我热烈祝贺本书的出版！我更衷心祝贺黄文虎院士80华诞！长江、黄河，浩浩荡荡，一泻千里，奔流不息；松花江畔、太阳岛上，春色盎然，生机勃勃！谨为之序。

中国科学院院士

华中科技大学教授 杨叔子

2006年6月

前　　言

自从1994年《一般力学(动力学、振动与控制)最新进展》(黄文虎、陈滨、王照林主编,科学出版社出版)出版发行至今已有10余年,跨越了20和21世纪之间的门槛。其间,正逢我国航天事业发展的关键时期,我国不仅成功实现两次载人航天飞行,取得了举世瞩目的成就,而且正式启动了包括绕月探测工程在内的一批重大科技专项工程。因一般力学学科包含动力学、振动与控制三个主要的研究方向,是航空、航天、机械和土木等工程领域的关键理论与技术基础之一,所以结合我国科学技术发展需求,通过一些重要研究计划与工程项目的支持,力学领域研究在这一时期同样取得了重要进展。本书是对最近10余年相关研究工作的介绍与总结。

哈密顿理论体系的发展和非线性动力学的研究进展是这一时期动力学和振动在理论研究方面取得的主要成果。哈密顿理论体系从单纯的分析力学的研究发展到分析结构力学的研究,并随之发展到控制理论方面的研究,以及非线性随机动力学与控制方面的研究,为一些关键理论与计算问题的解决提供了崭新而有效的方法和手段。在国家自然科学基金重大项目和国家重大基础研究项目等计划和项目的资助下,非线性动力学的研究在非线性现象机理研究和理论研究方面取得了重要的进展,提出了一系列非线性动力学计算的新方法,并将非线性动力学的研究和工程问题相结合,应用于转子等高维非线性动力学系统中,发展了新的研究和处理工程问题的理论与方法。在振动的研究方面,除非线性振动和随机振动的理论与方法研究外,隔振与减振一直是研究的重点,为提高效果和克服单纯被动控制的不足,主动控制理论与技术得到了快速发展,尤其是结合工程的实际应用所进行的研究工作,使主动控制更加接近工程实用化。同样,控制理论与方法在这期间也取得了较大的进展,特别是结合航天技术等领域的研究工作,提出了许多具有重要实际工程价值的理论与方法。另外需要提出的是,结合微纳米技术的发展,动力学、振动和控制等领域对微纳米机构和机械装置的相关问题开展了细致而深入的研究,取得了一些令人鼓舞的研究结果,反过来又促进了微纳米技术的发展。

航空、航天和机械等工程领域是动力学、振动与控制的传统工程应用领域,诸如飞行器的轨道与姿态控制、交会对接等是动力学与控制的典型问题,而航天器动力学环境的预示和试验则是振动领域的重要理论与应用研究课题。近年来,结合空间计划和一些重大工程项目,国内外在相关方面进行了大量的应用研究工作,本书介绍了一些研究和应用成果。此外,结构与机械装置的状态

监测与故障诊断是动力学与振动的另一个重要的应用领域，和诸如人工智能、计算机和电子技术的研究相结合，许多研究成果已经工程化，并取得了较好的经济效益，其中非线性动力学的研究成果应用于故障诊断，显著提高了人们对故障的诊断和分析能力。在此期间，有关的研究工作突破了传统的研究范畴，和其他相关学科相结合，在一些交叉学科的研究课题中取得了重要的进展。

由于篇幅所限，本书无法包含一般力学范畴内的动力学、振动与控制的全部研究进展情况，但希望能够借此为读者提供主要研究方向的进展情况。相信随着科学技术的发展，特别是人类在探索未知世界方面的不断努力，在未来的10年中，相关的研究工作将会取得更快、更好的发展。本书难免有一些不妥之处，敬请读者批评指正。

今年恰逢黄文虎教授80寿辰，作为他的学生，我们也借此机会和书中收录论文的作者一道将此书献给他，祝他健康长寿！

编　者

2006年6月

目 录

状态空间控制理论与计算简介

钟万勰，吴志刚

（大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室，大连 116024）

摘 要:现代控制论所奠基的状态空间法的起点至少也应回溯到经典分析力学的Hamilton正则方程体系。Hamilton正则方程体系是辛对偶变量、辛对偶方程的体系,针对Hamilton体系初值问题的保辛积分算法属于保留系统本质特征的数值方法。与之相对应,动力系统的最优控制和鲁棒控制需要求解Hamilton正则方程的边值问题,自然也需要有基于Hamilton体系特征的数值求解方法。应用近年来发展的分析结构力学理论及精细积分算法,可以在保持Hamilton体系特征的前提下对上述控制问题进行离散和数值求解,目前的研究涉及状态空间最优控制和鲁棒控制中多方面的问题。

本文的内容取材于作者最近完成的讲义。文中首先简要介绍了分析结构力学的基本内容,然后介绍线性定常系统最优控制和滤波、鲁棒控制和滤波的理论与计算,进而给出非线性系统、时变线性系统、时滞系统、输入饱和系统的最优控制理论与计算,以及大系统分散 H_∞ 鲁棒控制中的问题。

关键词:Hamilton体系 分析结构力学 最优控制 鲁棒控制 精细积分

0 引言

20世纪50年代,计算机及高级语言问世,有限元首先在工程力学中出现[1],在工程力学体系的理论基础上,用线性方程描述的结构力学、固体力学等很快就发展出通用、灵活的有限元数值方法,并系统化为大规模有限元程序系统,成为工程师手中强大的分析工具。有限元法在工程与科学计算的各个方面都取得了极大的成功。

经典自动控制理论用尽量消元而成为单输入－单输出的高阶常微分方程来表述。现代控制理论在计算技术的冲击下出现,但其理论体系并不只是在原有经典控制论上加以延伸,而是使控制论的基本理论体系发生了根本性的更迭,即采用状态空间描述[2]。

分析力学在Lagrange方程之后,由Hamilton提出了其正则方程体系[3,4],其实这就是状态空间法的开始。数学分析常微分方程组的基本理论也是奠基于一阶联立微分方程组的。控制论即已按其自身的发展而做出了体系换代,粗略想来在理论体系上离开应用力学更远了。然而情况并非如此,现代控制论的数学问题与结构力学的某类问题是一一对应地互相模拟的[5-7]。从数学角度看,模拟关系是建筑在Hamilton体系理论基础上的。既然控制论以状态空间法为基础发展出整套新的理论体系,则应用力学也理应有对偶变量状态空间法应用的前景。

"行成于思,毁于随"。从以铁木辛柯《弹性力学》为代表的求解体系看,历来的求解都是在一类变量的范围之内进行的。从数学的角度观察,一类变量求解属拉格朗日体系的方法,因此必然导致高阶偏微分方程,从而分离变量等有效的方法未能实施。沿用该思路,半逆法求解长期未能获得突破。然而转变方法论的道路,将原变量与对偶变量组成的状态空间引入弹性力学,弹性柱体的圣维南问题就可导出新的一套基本方程,于是分离变量法就可顺利实施了。过去一套半逆法解,在状态空间中都可用直接法求解出来[8]。直接法通过理性的推导,使读者便于理解。既然控制理论与结构力学互相模拟,则分析结构力学的方法论必然也可对控制理论与计算发挥作用。

状态空间控制与结构力学模拟关系的数学基础是 Hamilton 体系理论。分析力学的方法可以用于非线性课题,有利于非线性控制系统的分析。本文第 1 节将讲述分析动力学与分析结构力学,这是理论基础。最优控制理论导出的 Hamilton 系统是保守的,适用分析力学方法,其中尤其要注意近似方法的保辛。运用正则变换进行乘法摄动是保辛的。非线性系统求解困难,要运用摄动法、叠代法等各种近似方法,而线性系统的解可作为摄动的出发点,故应先将线性课题的求解做好,精细积分法在求解 Riccati 微分方程及线性 H_∞ 鲁棒控制方面有独特的优势。对这些线性系统的论述构成了第 2 节。

在精细地求解线性定常系统的基础上方可考虑时变和非线性控制系统的分析。通过控制理论与分析结构力学的学科交叉,可将多种有效手段引入控制系统的计算,第 3 节介绍时变系统的保辛分析方法,这是非线性系统分析的基础。在此基础上,第 4 节介绍非线性系统的计算。

分析结构力学[10,11]表明,对于离散系统,可直接将区段变形能与 Lagrange 括号、Poisson 括号联系起来,表明离散系统也适用分析力学的方法论。传统分析力学是用于等维数、同时间的连续体系的[3,4];但正则变换则可通过等价的势能变分原理与混合能变分原理,拓广到可变维数且不同时间的离散体系。离散体系将有限元与分析力学、辛数学等连接起来,建立起分析力学与有限元之间的密切联系。这些有特色的发展,与传统分析力学有很大的差别,故需要分析结构力学[10]的发展新层次。离散系统分析与控制在第 5 节讲述。时滞因素是控制系统必然要面对的,物性也往往有时间滞后,化成离散系统分析计算是必要的。物质多层次分析的发展,也必然走向离散体系,第 6 节介绍时滞系统的离散近似分析。

第 7 节讲述控制矢量饱和因素对系统的影响,应用力学中有塑性力学,就是考虑物性饱和的。结构力学与控制理论的模拟表明,塑性力学的方法论也可运用于考虑饱和因素的控制系统。参变量变分原理是塑性力学与接触力学等强非线性问题分析的有力手段[12]。本节将此方法引入考虑饱和因素的控制系统分析。第 8 节将介绍自适应滤波的方法,属于自适应控制的基础。基于模型的控制系统设计需要给出确定的系统矩阵参数,这给实际应用带来一些困难。自适应滤波考虑了给出的系统矩阵不够准确的因素,故不仅将量测到的数据用于估计最优的状态矢量,还用来修改系统矩阵的某些参数。第 9 节考虑分散控制问题,这相当于结构力学的子结构分析。

这些内容是面向实际控制系统设计中可能面临的问题,属于跨学科的发展。控制理论需要与有关学科共同发展,尤其是计算。2005 年 6 月提交给美国总统的咨询报告[13]指出:"21 世纪众多的挑战是显著的多学科的","计算科学已经成为与理论和物理实验同等的科

学事业的第三根支柱”。这说明只从理论上对问题加以理解是不够的，重要的是还要进一步改造世界，不进行科学计算并得出数值结果是不行的，数据是工程师的依据，因此本文所介绍的内容强调算法，尤其是微分方程的数值求解。精细积分算法[6-8]不仅对于时间历程的发展性方程，而且对于两端边值问题及派生出来的 Riccati 微分方程，都可求得在计算机上的“精确解”，这完全不同于传统的有限差分方法。

1 分析动力学与分析结构力学

分析力学历来是在动力学范围内讲述的，故也称分析动力学(Analytical Dynamics)。结构力学与最优控制间的模拟关系[4]的共同基础就是分析力学。故在结构力学与最优控制理论的架构内也应有分析力学的整套理论。本节就结构力学的架构讲述分析力学，可称为分析结构力学[10,11]。

在物理与力学中有大量保守体系的分析。保守体系可用 Hamilton 体系描述，其特点是保辛。保辛就是保持体系结构最重要的特性。对动力学系统积分，冯康指出保守体系的差分格式应当保辛[9]，取得很好的效果。应扩展讲，一切保守体系的数学近似方法皆应保辛。其实，通常五花八门的差分格式并非错误，而是对真实解的逼近不够好。保辛的优点是更好地逼近。

迄今，分析动力学讨论的系统都是确定维数的系统。因分析力学对空间长度坐标 z 也可运用[7]，故可用于结构力学。求解要积分以使求解的区段伸长，结构力学的区段合并也使区段伸长，然而结构力学并不限定横截面位移的数目；有限元适用离散坐标体系，有限元节点也没有同一长度坐标的要求，这是与分析动力学很大的差别。故将分析动力学的方法论与结构力学结合是很重要的理论问题。将长度坐标离散就是有限元。

从区段变形能 $U(\boldsymbol{q}_a,\boldsymbol{q}_b;z_a,z_b)$ 只是两端位移的函数的性质，可以导出 Poisson 括号与 Lagrange 括号、传递辛矩阵、正则变换以及正则方程，这是分析结构力学的结果，也是经典分析力学的主要内容。根据势能原理，也可证明从 $\boldsymbol{q}_a,\boldsymbol{p}_a$ 到 $\boldsymbol{q}_b,\boldsymbol{p}_b$ 再到 $\boldsymbol{q}_c,\boldsymbol{p}_c$ 的正则变换，给出的合成变换仍是正则变换。正则变换要求维数不变，这是其局限性，结构力学变分原理并无维数不变的限制。于是有等维数系统的正则变换与变分原理的一致性的问题。

下面通过单纵向坐标柱形域弹性体系有限元来阐明有限元法的保辛特性。有限元法是从结构力学发展而来的，有限元工作者熟知，单元刚度阵应保持对称性，其实这就是保辛。有限元将连续坐标转化为离散坐标。例如 Timoshenco 梁问题，设长度区段为 $0<z<L$，沿长度划分 m 个单元。第 k 号单元有左、右两端 a,b，即 $k-1,k$ 站，其位移分别为 n 维的矢量 $\boldsymbol{q}_a,\boldsymbol{q}_b$。有限元采用精确列式就是精确解，采用近似就是有限元近似解。设在 $k-1,k$ 站的位移 $\boldsymbol{q}_a,\boldsymbol{q}_b$ 就是单元的边界条件。有限元常用于线性系统，需要建立每个单元的刚度阵，其单元变形能(作用量函数)为 $\boldsymbol{q}_a,\boldsymbol{q}_b$ 的二次齐次函数

$$U_k(\boldsymbol{q}_a,\boldsymbol{q}_b;z_a,z_b)=\frac{1}{2}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{q}_a\\ \boldsymbol{q}_b\end{Bmatrix}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_k\begin{Bmatrix}\boldsymbol{q}_a\\ \boldsymbol{q}_b\end{Bmatrix}=[\boldsymbol{q}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_{aa}^{(k)}\boldsymbol{q}_a+\boldsymbol{q}_b^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_{bb}^{(k)}\boldsymbol{q}_b]/2+\boldsymbol{q}_b^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_{ba}^{(k)}\boldsymbol{q}_a,$$

$$\boldsymbol{K}_k=\begin{bmatrix}\boldsymbol{K}_{aa}^{(k)} & \boldsymbol{K}_{ab}^{(k)}\\ \boldsymbol{K}_{ba}^{(k)} & \boldsymbol{K}_{bb}^{(k)}\end{bmatrix}\tag{1.1}$$

其中，K_k是对称矩阵。最小总势能原理与平衡方程分别为

$$\min\Big(\sum_{k=1}^{m} U_k\Big),\boldsymbol{K}_{ba}^{(k-1)}\boldsymbol{q}_{k-1}+[\boldsymbol{K}_{bb}^{(k-1)}+\boldsymbol{K}_{aa}^{(k)}]\boldsymbol{q}_k+\boldsymbol{K}_{ab}^{(k)}\boldsymbol{q}_{k+1}=0 \tag{1.2}$$

单元变形能就是作用量函数。引入对偶矢量

$$\boldsymbol{p}_k^{(k)}=\partial U_k/\partial \boldsymbol{q}_k=\boldsymbol{K}_{bb}^{(k)}\boldsymbol{q}_k+\boldsymbol{K}_{ba}^{(k)}\boldsymbol{q}_{k-1} \tag{1.3a}$$

$$\boldsymbol{p}_{k-1}^{(k)}=-\partial U_k/\partial \boldsymbol{q}_{k-1}=-[\boldsymbol{K}_{aa}^{(k)}\boldsymbol{q}_{k-1}+\boldsymbol{K}_{ab}^{(k)}\boldsymbol{q}_k] \tag{1.3b}$$

则平衡方程成为 $\boldsymbol{p}_k^{(k)}=\boldsymbol{p}_k^{(k+1)}$。引入各站的状态矢量

$$\boldsymbol{v}_k=\{\boldsymbol{q}_k^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{p}_k^{\mathrm{T}}\}^{\mathrm{T}} \tag{1.4}$$

于是从式(1.3a)和式(1.3b)可导出

$$\begin{gathered}\boldsymbol{v}_k=\boldsymbol{S}_k\boldsymbol{v}_{k-1},\quad \boldsymbol{S}_k=\begin{bmatrix}\boldsymbol{S}_{11}^{(k)} & \boldsymbol{S}_{12}^{(k)}\\ \boldsymbol{S}_{21}^{(k)} & \boldsymbol{S}_{22}^{(k)}\end{bmatrix},\\ \boldsymbol{S}_{11}^{(k)}=-[\boldsymbol{K}_{ab}^{(k)}]^{-1}\boldsymbol{K}_{aa}^{(k)},\quad \boldsymbol{S}_{12}^{(k)}=-[\boldsymbol{K}_{ab}^{(k)}]^{-1},\\ \boldsymbol{S}_{21}^{(k)}=\boldsymbol{K}_{ba}^{(k)}-\boldsymbol{K}_{bb}^{(k)}[\boldsymbol{K}_{ab}^{(k)}]^{-1}\boldsymbol{K}_{aa}^{(k)},\quad \boldsymbol{S}_{22}^{(k)}=-\boldsymbol{K}_{bb}^{(k)}[\boldsymbol{K}_{ab}^{(k)}]^{-1}\end{gathered} \tag{1.5}$$

可验证 $\boldsymbol{S}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\boldsymbol{S}_k=\boldsymbol{J}$，故 $\boldsymbol{S}_k$ 是辛矩阵。从而状态矢量由 $\boldsymbol{v}_{k-1}$到 $\boldsymbol{v}_k$ 是正则变换。以上的推导只用到 $\boldsymbol{K}_k$ 是对称矩阵的性质，故知有限元列式保证其刚度阵对称，就是保辛。有限元刚度阵的对称性是最基本的规则，故有限元是自动保辛的。有限元法解的稳定性、有效性奠基于此基本性质。

2 线性定常系统的最优控制与 H_∞鲁棒控制

定常系统的 LQ 控制(线性二次控制)和 Kalman 滤波分别是最优控制和最优滤波的基本问题，由 LQ 控制器和 Kalman 滤波器可以构成 LQG 控制系统。定常系统的分析是进一步研究的基础。精细积分法不仅对线性定常系数 Hamilton 两端边值问题的求解提供了有力支持，也可作为摄动解的出发点。

对于 LQG 控制问题，在控制时间区段$[t_0,t_f]$中，设当前时间为 $t(t_0<t<t_f)$，可以将时间划分为过去时段$[t_0,t)$与未来时段$(t,t_f]$。过去时段已经成为历史，对过去时段可做的分析是认识系统、进行滤波以得出 $\hat{x}(t)$及其方差阵 $\boldsymbol{P}(t)$，或者进一步对系统本身也进行识别。未来时段是可以控制的。在最优控制理论中，要求在动力方程得到满足的条件下，使其二次型指标函数取最小；满足该准则的解便当成是最优。虽然过去时段的滤波以及未来时段的 LQ 控制本是互相无关的两个课题，但它们是整个控制分析的两个组成部分，其相互连接之处便是当前时刻 t。

按照分离性原理，设计 LQG 控制系统需要求解两个 Riccati 方程(微分方程或代数方程)，它们分别对应于 LQ 控制问题和 Kalman 滤波问题。求解这两个 Riccati 方程需计算区段混合能矩阵 $\boldsymbol{F}(\eta),\boldsymbol{G}(\eta),\boldsymbol{Q}(\eta)$，其中 η 是合理的区段长。对它们的计算有两种方法：1)精细积分法，其好处是不需寻求 Hamilton 矩阵的本征值，但矩阵运算有一定的计算工作量；2)分析法，只要找到相应 Hamilton 矩阵的全部本征值与本征矢量，就可算得 $\boldsymbol{Q}(\eta)$，$\boldsymbol{G}(\eta),\boldsymbol{F}(\eta)$。由于 Hamilton 矩阵为非对称矩阵，因此可能有 Jordan 型重根出现，此时本

征分解会出现数值不稳定性。这里存在的困难与一般矩阵的指数矩阵类同。因此当不出现 Jordan 型时，分析法还是可取的；当发现本征值很接近而产生病态时，采用精细积分法是必要的。精细积分法由于其数值稳定性是很吸引人的[6,7]。

基于结构力学与最优控制的模拟关系和变分原理也可以导出相应线性系统最优滤波和平滑以及最优控制问题的解，下面的表 2.1 和表 2.2 分别给出了结构力学问题与线性二次控制以及 Kalman 滤波问题的对应关系。

表 2.1　结构力学与线性二次控制的模拟关系

结构力学	线性二次控制
位移、内力 $\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}$	对偶矢量 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda}$
空间坐标 z	时间坐标 t
区段$(z_0,z_f]$	时间区段$(t,t_f]$
混合能 $H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$	Hamilton 函数 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda})$
$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{D}$	$\boldsymbol{A},\boldsymbol{C}_z^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_z,\boldsymbol{B}_u\boldsymbol{B}_u^{\mathrm{T}}$
弹性支承矩阵 $\boldsymbol{S}_f$	端部指标矩阵 $\boldsymbol{S}_f$
协调微分方程	动力微分方程
平衡微分方程	协态微分方程
变形能函数，作用量函数	指标函数 J_A
区段变形势能	时段$[0,k_t)$的指标 J_{e,k_t}
……	……

表 2.2　结构力学与 Kalman 滤波的模拟关系

结构力学	Kalman 滤波
位移、内力 $\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}$	对偶矢量 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda}$
区段$[0,k)$的右端 k 以及 $k+1$	k_t,k_{t+1}
$\boldsymbol{F},\boldsymbol{G},\boldsymbol{Q}$	$\boldsymbol{F},\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{C},\boldsymbol{BWB}^{\mathrm{T}}$
等价外力 $\boldsymbol{r}_{bk},\boldsymbol{r}_{ak}$	$\boldsymbol{B}_u\boldsymbol{u}_k,\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{y}_k$
混合能 $V_k(\boldsymbol{q}_a,\boldsymbol{p}_b)$	混合能 $V_k(\boldsymbol{q}_a,\boldsymbol{p}_b)$
对偶方程	对偶方程
区段$[0,k)$的势能$\Pi_k(\boldsymbol{q}_k)$	时段$[0,k_t)$的指标 J_{e,k_t}
……	……

LQG 控制理论是非常优美的，也有许多成功的应用。系统矩阵参数在 LQG 控制的理论分析中被看成为完全确定的，然而在实际应用中，参数的确定往往并不非常精确，系统所受到的实际干扰也不一定是满足某种统计特性的噪声，等等；所有这些因素促进了鲁棒控制理论的发展。在众多的鲁棒控制方法中，H_∞控制是理论发展比较完善、并且得到成功应用的理论之一。

与研究最优控制问题的方法类似，H_∞鲁棒控制问题的分析求解也可以把有限时间区段$[t_0,t_f]$划分为过去时段$[t_0,t)$，未来时段$(t,t_f]$，以及当前时刻 t。对于过去时段仍是作滤波分析，但现在是 H_∞滤波而不是 Kalman 滤波；未来时段则是作鲁棒性全状态反馈控制。在当前时刻则还应当将这两个时段的结果融合在一起，以得到反馈控制矢量 $\boldsymbol{u}(t)$。虽然两个时段的问题是不同的，但依然可以设法予以统一在一个变分原理之下[7]。在该变分原理下，非但可以导出各个时段的方程，还可以将 t 时刻的连接条件一并导出，详细内容见参考文献[7]。

H_∞控制和滤波中的导引模(H_∞范数)对应于结构力学中的本征值，即弹性稳定的 Euler 临界力或结构振动的本征频率[10]。这样就可以把握临界参数 γ_{cr}^{-2}的性质，并且在此基础上可提供 H_∞鲁棒控制 γ_{cr}^{-2}的精细计算。这可运用结构力学中本征值计算的扩展 Wittrick-Williams 算法，再结合 Riccati 方程的精细积分，就可以给出 γ_{cr}^{-2}的算法。临界值 γ_{cr}^{-2}是不能在实际中应用的，它只能提供系统设计中的界限。应用只能选择所谓次优(Suboptimal)参数 $\gamma^{-2}<\gamma_{cr}^{-2}$(即 $\gamma>\gamma_{cr}$)。

3 线性时变系统最优控制

定常线性系统控制器的设计需要求解 Riccati 方程，线性时变系统 LQ 控制器求解的关键也在于如何有效地求解时变系数矩阵 Riccati 微分方程，这个 Riccati 微分方程对应于时变 Hamilton 对偶方程的两端边值问题。目前的文献中求解时变 Riccati 方程的方法有沃尔什函数法、方块脉冲函数法、斜坡函数以及小波法等[14-17]，这些方法的本质是通过一组完备的基函数来逼近该区段上的可积函数，从而完成对连续问题的近似离散。但这些近似离散并未考虑 Hamilton 保守系统的保辛，所以并不理想。

在本文的第 2 节中已经介绍了基于计算结构力学与最优控制理论之间的模拟关系和变分原理，通过引入区段混合能的概念，在同一个框架下求解了线性定常系统二次最优控制中的计算问题，得到了 Riccati 方程和状态反馈闭环系统方程在计算机上的精确解。由于从变分原理出发进行离散，这个方法中的区段合并公式属于保辛算法，并充分避免了初始计算中的有效数位丢失问题，而且通过引入区段混合能的概念，将时间上串行的差分运算转化为结构力学混合能并行的积分运算，另外定常系统区段平移不变的性质，使得 2^N 类算法可以利用，从而将数值解提高到计算机上的最高精度。虽然对于时变系统，2^N 类算法已不能使用，但依然可保持混合能运算的优点。可在定常系统精细积分解的基础上进行保辛摄动，做出时变系统的解。

对于线性系统，可以根据区段混合能的概念建立矩阵微分 Riccati 方程和区段混合能矩阵之间的联系，并且 Riccati 方程和状态反馈方程的解可通过区段混合能矩阵的计算得到。依据结构力学区段混合能矩阵和 Hamilton 对偶方程对应的状态辛传递矩阵之间的转换关系，将区段混合能的计算转化为相应区段状态辛传递矩阵的计算。在 Hamilton 体系下，采用保辛摄动算法对时变 Hamilton 系统的区段传递矩阵进行求解[10]。返回去求得相应的区段混合能矩阵，从而完成时变二次最优控制问题的求解。因保辛摄动的算法具有很好的数值稳定性和精度，将给出较好的数值结果。

考虑线性时变系统的 LQ 控制

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t),\quad \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0 \tag{3.1}$$

二次时变性能指标为

$$J[\boldsymbol{u}(\cdot)]=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R}(t)\boldsymbol{u}(t)]\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t_f)\boldsymbol{S}_f\boldsymbol{x}(t_f) \tag{3.2}$$

典型的 Hamilton 体系变分原理,相应的对偶方程为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{R}^{-1}(t)\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\lambda}(t),\quad \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0\\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}(t)=\boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\lambda}(t),\quad \boldsymbol{\lambda}(t_f)=-\boldsymbol{S}_f\boldsymbol{x}(t_f)\end{cases} \tag{3.3}$$

利用 Riccati 变换

$$\lambda(t)=-\boldsymbol{S}(t)\boldsymbol{x}(t) \tag{3.4}$$

得到 Riccati 方程和状态反馈方程

$$-\dot{\boldsymbol{S}}(t)=\boldsymbol{S}(t)\boldsymbol{A}(t)+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{S}(t)+\boldsymbol{Q}(t)-\boldsymbol{S}(t)\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{R}^{-1}(t)\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{S}(t),\quad \boldsymbol{S}(t_f)=\boldsymbol{S}_f \tag{3.5}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=[\boldsymbol{A}(t)-\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{R}^{-1}(t)\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{S}(t)]\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0 \tag{3.6}$$

线性时变系统二次最优控制问题的求解方法同线性定常系统是一致的,但由于系统时变的特性,增加了 Riccati 方程求解的难度,而这正是控制器求解的关键。

引入标记 $\boldsymbol{v}=\{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\}^{\mathrm{T}},\bar{\boldsymbol{A}}(t)=\boldsymbol{A}(t),\bar{\boldsymbol{B}}(t)=\boldsymbol{Q}(t),\bar{\boldsymbol{D}}(t)=\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{R}^{-1}(t)\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(t)$,对偶方程(3.3)可写为

$$\dot{\boldsymbol{v}}(t)=\boldsymbol{H}(t)\boldsymbol{v}(t) \tag{3.7}$$

式中:$\boldsymbol{H}(t)$为时变的 Hamilton 矩阵,$\boldsymbol{H}(t)=\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{A}}(t) & \bar{\boldsymbol{D}}(t)\\ \bar{\boldsymbol{B}}(t) & -\bar{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}(t)\end{bmatrix}$。

该线性时变方程的解有如下形式

$$\boldsymbol{v}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t;t_0)\cdot\boldsymbol{v}(0) \tag{3.8}$$

式中:$\boldsymbol{\Phi}(t;t_0)$为状态辛传递矩阵。方程(3.7)表示的 Hamilton 动力系统可采用正则变换方法摄动计算,在每一个基本区段$[t_a,t_b]$内,将时变的 Hamilton 矩阵分成两部分

$$\boldsymbol{H}(t)=\boldsymbol{H}_0+\boldsymbol{H}_1(t),\quad \boldsymbol{H}_0=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_0 & \boldsymbol{D}_0\\ \boldsymbol{B}_0 & -\boldsymbol{A}_0^{\mathrm{T}}\end{bmatrix} \tag{3.9}$$

式中:$\boldsymbol{H}_0$ 是定常的;$\boldsymbol{A}_0,\boldsymbol{B}_0,\boldsymbol{D}_0$ 是 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{D}(t)$的区段均值,是区段$[t_a,t_b]$内关于 $\boldsymbol{H}(t)$的零次近似,仍为 Hamilton 矩阵;$\boldsymbol{H}_1(t)$是余下的时变“小量”。

零次近似系统 $\dot{\boldsymbol{v}}_0(t)=\boldsymbol{H}_0\boldsymbol{v}_0(t)$是定常的,它的状态辛传递矩阵为 $\boldsymbol{\Phi}_0(t;t_a)$,满足

$$\dot{\boldsymbol{\Phi}}_0(t;t_a)=\boldsymbol{H}_0\boldsymbol{\Phi}_0(t;t_a),\boldsymbol{\Phi}_0(t_a;t_a)=\boldsymbol{I} \tag{3.10}$$

该定常系统的传递矩阵存在解析解,可用精细积分法求得。利用传递辛矩阵 $\boldsymbol{\Phi}_0(t;t_a)$做正则变换

$$\boldsymbol{v}(t)=\boldsymbol{\Phi}_0(t;t_a)\boldsymbol{v}_1(t) \tag{3.11}$$

考虑到式(3.10),有

$$\boldsymbol{v}(t_a)=\boldsymbol{v}_1(t_a) \tag{3.12}$$

把变换式(3.11)代入式(3.7),并利用式(3.10)整理得

$$\dot{\boldsymbol{v}}_1(t)=\overline{\boldsymbol{H}}_1(t)\cdot\boldsymbol{v}_1(t) \tag{3.13}$$

$$\overline{\boldsymbol{H}}_1(t)=\boldsymbol{\Phi}_0^{-1}(t;t_a)\boldsymbol{H}_1(t)\boldsymbol{\Phi}_0(t;t_a)=-\boldsymbol{J}\boldsymbol{\Phi}_0^{\mathrm{T}}(t;t_a)\cdot\boldsymbol{J}\boldsymbol{H}_1(t)\cdot\boldsymbol{\Phi}_0(t;t_a) \tag{3.14}$$

因 $\boldsymbol{H}(t)$及 $\boldsymbol{H}_0$ 皆为 Hamilton 矩阵,不难验证$[\boldsymbol{J}\overline{\boldsymbol{H}}_1(t)]^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{J}\overline{\boldsymbol{H}}_1(t)$,即 $\overline{\boldsymbol{H}}_1(t)$仍是 Hamilton 矩阵。这说明,正则变换后的微分方程(3.13)仍然是 Hamilton 矩阵的微分方程,仍是保守体系,即保辛了。

方程(3.13)是线性时变的,对应的传递辛矩阵 $\boldsymbol{\Phi}_1(t;t_a)$满足

$$\dot{\boldsymbol{\Phi}}_1(t;t_a)=\overline{\boldsymbol{H}}_1(t)\boldsymbol{\Phi}_1(t;t_a),\quad \boldsymbol{\Phi}_1(t_a;t_a)=\boldsymbol{I} \tag{3.15}$$

其中 $\overline{\boldsymbol{H}}_1(t)$是时变的,$\boldsymbol{\Phi}_1(t;t_a)$的解析解难以求得。但是由于 $\overline{\boldsymbol{H}}_1(t)$已是一次保辛摄动后的结果,可认为是相对“小量”,近似在这一小量的层次做出。很多近似方法都可用于摄动方程(3.15)的求解,如基于 $\boldsymbol{\Phi}_1(t;t_a)$的 Taylor 级数展开和 Peano-Baker 级数展开[20]。

4 非线性系统最优控制

非线性动力系统最优控制问题的数值求解是一个挑战,其多种数值方法可见参考文献[18]的第 10 章,但目前仍远未完善而有待发展。非线性系统要用摄动法迭代求解,每次迭代都将转化成为一个时变系统而求解。从而可以在第 3 节所介绍的时变系统分析求解的基础上进行计算。从分析结构力学[10,11]的角度来观察,系统离散求解时应考虑到保辛。

非线性系统最优控制仍然属于 Hamilton 体系。按分析结构力学,其对偶全状态方程的解是保辛的。但非线性对偶方程求解困难,一般可用摄动法迭代求解。迭代时的摄动应注意保辛,其效果可以改善。按分析结构力学理论,辛矩阵在乘法下构成群,而辛矩阵的加法不能保证仍为辛矩阵。故保辛以采用乘法摄动为佳。但通常的小参数摄动法却总是采用 Taylor 级数展开的加法,保辛与否就成了问题。因此需要采用乘法摄动,进行非线性系统最优控制的保辛摄动求解。

非线性系统的状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t),t],\quad \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0 \tag{4.1}$$

终点条件

$$\boldsymbol{N}(\boldsymbol{x}_{\mathrm{f}},t_{\mathrm{f}})=0 \tag{4.2}$$

指标泛函

$$J=\theta(\boldsymbol{x}_{\mathrm{f}},t_{\mathrm{f}})+\int_0^{t_{\mathrm{f}}}\phi[\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t),t]\mathrm{d}t \tag{4.3}$$

指标 J 应在条件式(4.1)~(4.2)的约束条件下取最小。设这里所讨论的问题有唯一解,引入 Lagrange 参数,将指标扩展为

$$J_{\mathrm{A}}=\Theta(\boldsymbol{x}_{\mathrm{f}},\boldsymbol{v},t_{\mathrm{f}})+\int_0^{t_{\mathrm{f}}}\{\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{x}}-H_3[\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{\lambda}(t),\boldsymbol{u}(t),t]\}\mathrm{d}t,\quad \delta J_A=0 \tag{4.4}$$

其中, $\Theta(\boldsymbol{x}_{\mathrm{f}},\boldsymbol{v},t_{\mathrm{f}})=\theta(\boldsymbol{x}_{\mathrm{f}},t_{\mathrm{f}})+\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}(\boldsymbol{x}_{\mathrm{f}},t_{\mathrm{f}})$

$$H_3[\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{\lambda}(t),\boldsymbol{u}(t),t]=-\phi[\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t),t]+\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t),t] \tag{4.5}$$

因为对控制矢量 $\boldsymbol{u}(t)$取最小不能显式求解,故函数 $H_3[\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{\lambda}(t),\boldsymbol{u}(t),t]$成为 3 类变量的函数,此处仍称为 Hamilton 函数。H_3 对 $\boldsymbol{\lambda}$ 是线性的,H_3 要对 $\boldsymbol{u}$ 取最小,即有必要条件

$$\partial H_3/\partial\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0} \tag{4.6}$$