JS

虞金龙 主编

高中数学竞赛 2000题

GAOZHONG
SHUXUE JINGSAI
2000TI

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

高中数学竞赛 2000题

主　　编　虞金龙
副 主 编　王卫华　唐作明
编委名单　王卫华　王希年　王　琛
马洪炎　孔祥新　占章根
孙惠华　沈虎跃　李　辉
何关保　张　杰　周顺钿
范培养　金松松　金畅云
陈守湖　陈尧明　宣秋苗
袁宗钦　陶文强　唐建新
唐作明　虞关寿　虞金龙
斯理炯　梁新潮　项成天

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学竞赛 2000 题 / 虞金龙主编. —杭州：浙江大学出版社，2006. 4
ISBN 7-308-04692-3

Ⅰ. 高… Ⅱ. 虞… Ⅲ. 数学课－高中－习题
Ⅳ. G634. 605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 029156 号

高中数学竞赛 2000 题

虞金龙 主编

责任编辑	伍秀芳 杨晓鸣
出版发行	浙江大学出版社
	(杭州天目山路 148 号 邮政编码 310028)
	(E-mail：zupress@ mail. hz. zj. cn)
	(网址：http://www. zjupress. com)
排 版	浙江大学出版社电脑排版中心
印 刷	杭州出版学校印刷厂
开 本	787mm × 1092mm 1/16
印 张	35. 75
字 数	920 千
版 印 次	2006 年 6 月第 1 版 2006 年 6 月第 1 次印刷
书 号	ISBN 7-308-04692-3/G · 1054
定 价	40. 00 元

浙江大学出版社发行部邮购电话 (0571)88072522

前言

随着科学技术的发展、人类文明的推进，知识迅速更新，华夏子孙正在为中华民族的伟大复兴孜孜以求。数学作为基础学科，备受莘莘学子的喜爱，很多人“为伊消得人憔悴”，更有一大批参加数学奥赛的学生“齐上高楼，望尽天涯路”。然而，要达到“蓦然回首，那人却在灯火阑珊处”的境界，就得有一本好书，正所谓“书山有路”。路靠我们去探索，靠我们去挖掘。为满足广大奥赛爱好者的需要，也为广大从事中学数学教学的同仁们在指导学生冲刺时提供有益的集训资料，我们特请从事竞赛指导的一线特、高级教师，结合新编的高中数学教材内容，编写了这本针对高中数学竞赛的最新用书——《高中数学竞赛 2000 题》。

本书精选了 2000 道典型例题，每一例题都有详尽的讲解，旨在揭示解题规律，提高学生分析问题和解决问题的能力。本书每个章节的内容根据历年竞赛的情况而精选，难度与高中数学竞赛一致，主观题与客观题也视历年竞赛情况搭配，每一小节还配备了五道反思练习题。本书体现以下特点：

一、针对性、实战性

本书全部由从事竞赛指导的一线教师编写，他们都是有一定知名度的中学特、高级教师和优秀竞赛教练。本书倾注了他们多年的教学经验和心血，所选试题具有很好的针对性和实战性。

二、新颖性、综合性

本书注重试题的创新，既保持传统性，又注意前瞻性，重视灵活性、创新性，加强专题知识的综合运用的力度。

三、简洁性、互动性

本书的栏目设计简洁明了，方便教师教学，有利于师生双向操作，既有赛题精讲，又设计了反思练习，便于师生互动。

紧张而有序的编写工作，已经告一段落。您手中的这本书，凝聚了众多知名学者和一线教师的心血，受到了上上下下的众多领导和教育工作者的关注。在此，谨向所有为该书作出贡献、提供方便和关注该书出版的人们致以真诚的谢意，但愿该书为您的工作和学习助一臂之力。新书付梓在即，不免惶恐，错误或不当之处在所难免，还望大方之家赐教。

虞金龙

目录 [redacted]

第一章 集 合

第一节 集合的概念与运算

【赛题精讲】

例 1 已知 $P=\{x|x=3k,k\in\mathbf{Z}\}$，$Q=\{x|x=3k+1,k\in\mathbf{Z}\}$，$R=\{x|x=3k+2,k\in\mathbf{Z}\}$．若 $a\in P$，$b\in Q$，$c\in R$．则 $ac^2+b^3\in$（　　）．

A. P　　B. Q　　C. R　　D. $Q\cup R$

解 选 B.

因为 $a\in P,b\in Q,c\in R$，所以 $b^3\in Q,c^2\in Q,ac^2\in P$，所以 $ac^2+b^3\in Q$.

例 2 对集合 M,N，定义 $M-N=\{x|x\in M 且 x\notin N\}$，则 $M-(M-N)$ 等于（　　）．

A. $M\cup N$　　B. $M\cap N$　　C. M　　D. N

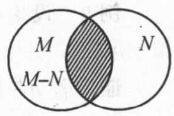

图 1-1

解 选 B，如图 1-1.

由韦恩图：$M-N$ 为左边 M 区域，$M-(M-N)$ 为阴影区域，即 $M\cap N$.

例 3 已知 $A=\{y|y=x^2-4x+3,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{y|y=-x^2-2x+2,x\in\mathbf{R}\}$．求 $A\cap B$.

解 $y=(x-2)^2-1\geqslant-1$，又 $y=-(x+1)^2+3\leqslant3$，

所以 $A=\{y|y\geqslant-1\}$，$B=\{y|y\leqslant3\}$，故 $A\cap B=\{y|-1\leqslant y\leqslant3\}$.

注：此题应避免如下错误解法：

联立方程组 $\begin{cases}y=x^2-4x+3\\y=-x^2-2x+2\end{cases}$，消去 y，$2x^2-2x+1=0$．因方程无实根，故 $A\cap B=\varnothing$.

这里的错因是将 A,B 的元素误解为平面上的点了．这两条抛物线没有交点是实数．但这不是抛物线的值域．

例 4 求点集 $\left\{(x,y)\,|\,\lg\left(x^3+\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{9}\right)=\lg x+\lg y\right\}$ 中元素的个数．

解 由所设知 $x>0,y>0$，及 $x^3+\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{9}=xy$，

由平均值不等式，有 $x^3+\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{9}\geqslant3\sqrt[3]{(x^3)\cdot\left(\frac{1}{3}y^3\right)\cdot\left(\frac{1}{9}\right)}=xy$.

当且仅当 $x^3=\frac{1}{3}y^3=\frac{1}{9}$，即 $x=\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$，$y=\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$（虚根舍去）时，等号成立，

故所给点集仅有一个元素．

例 5 集合 $A=\{8,x,y,z\}$，$B=\{1,yx,zy,zx\}$，若 $A=B\subset\mathbf{N}$，则 $x+y+z=$______.

解 7．由 $A=B\subset\mathbf{N}$ 知 x,y,z 有一个为 1．不妨设 $x=1$，则 $A=\{8,1,y,z\}$，$B=\{1,y,zy,z\}$，故 $8=yz$，所以 $y=2,z=4$（或 $y=4,z=2$）．于是有 $x+y+z=1+2+4=7$.

例 6 以正整数为元素的集合 S 满足：如果 $x\in S$，则 $8-x\in S$.

(1)求出只有一个元素的集合 S；(2)求所有含 2 个元素的集合 S；(3)求满足条件的所有集合 S.

解 (1)因 S 中只有一个元素 x，所以 $8-x=x$，$x=4$，这时集合 $S=\{4\}$；

(2)设 $S=\{x,y\}$，$8-x=y$，即 $x+y=8$，知含有 2 个元素的集合 $S=\{1,7\}$，$\{2,6\}$，$\{3,5\}$有 3 个．

(3)同上法，含有 3 个元素的 S 有$\{1,4,7\}$，$\{2,4,6\}$，$\{3,4,5\}$．含有 4 个元素的 S 有$\{1,2,6,7\}$，$\{1,3,5,7\}$，$\{2,3,5,6\}$．含有 5 个元素的 S 有$\{1,2,4,6,7\}$，$\{1,3,4,5,7\}$，$\{2,3,4,5,6\}$．含有 6 个元素的 S 有$\{1,2,3,5,6,7\}$．含有 7 个元素的 S 有$\{1,2,3,4,5,6,7\}$．以上满足条件的 S 共有 15 个．

例 7 设 $M=\{a\mid a=x^2-y^2,x,y\in\mathbf{Z}\}$．求证：(1)一切奇数属于 M；(2)偶数 $4k-2$ $(k\in\mathbf{Z})$不属于 M；(3)属于 M 的两个整数，其积仍属于 M.

解 (1)设奇数 $a=2k-1=k^2-(k-1)^2$，所以 $a\in M$.

(2)设 $4k-2=x^2-y^2$，即 $2(2k-1)=(x+y)(x-y)$，因 $x+y$ 与 $x-y$ 同奇偶，故等式右边为奇数或 4 的倍数，而等式左边为偶数但不是 4 的倍数，等式不能成立．故 $4k-2\notin M$.

(3)设 $a=x_1^2-y_1^2$，$b=x_2^2-y_2^2$，$ab=(x_1^2-y_1^2)(x_2^2-y_2^2)=(x_1x_2-y_1y_2)^2-(x_1y_2-x_2y_1)^2$．故 $ab\in M$.

例 8 已知集合 $P=\{(x,y)\mid x=\sin\theta+\cos\theta,y=\sin2\theta,\theta\in\mathbf{R}\}$，$Q=\{(x,y)\mid x-y+1=0\}$．用列举法表示 $P\cap Q=$__________.

解 P 中消去 θ：$x^2=1+y$……①

Q 中方程化为：$y=x+1$……②

解方程组：$x=-1$，$y=0$($x=2$ 舍去，因 $\sin\theta+\cos\theta<2$)．所以 $P\cap Q=\{(-1,0)\}$.

例 9 设集合 $M=\{u\mid u=12m+8n+4l,m,n,l\in\mathbf{Z}\}$，$N=\{v\mid v=20p+16q+12r,p,q,r\in\mathbf{Z}\}$．求证：$M=N$.

证 若 $u\in M$，则存在 $m,n,l\in\mathbf{Z}$，使得 $u=12m+8n+4l=20n+16l+12(m-n-l)\in N$.

从而 $M\subseteq N$……①

若 $v\in N$，则存在 $p,q,r\in\mathbf{N}$，使得 $v=20p+16q+12r=12r+8\times(2q)+4\times(5p)\in M$.

从而 $N\subseteq M$……②

由①，②得 $M=N$.

例 10 $A=\{1,2,\cdots,n\}$，对 $X\subseteq A$，记 X 各元素之和为 N_x，求 N_x 的总和 $\sum\limits_{x\subseteq A}N_x$.

解 A 中每一个元素在非空子集中都出现 2^{n-1}次(这样的非空子集是由 A 去掉该元素后的集合的 2^{n-1}个子集添上该元素构成的)，因而求 A 的子集元素和 N_x 的总和时，A 中每一个元素都加了 2^{n-1}次，得 $\sum\limits_{x\subseteq A}N_x=(1+2+\cdots+n)\cdot2^{n-1}=n(n+1)2^{n-2}$.

例 11 设 M 是集合 $S=\{1,2,3,\cdots,2003\}$的子集，且 M 中每一个自然数(元素)仅含有一个数字 0，则集合 M 所含元素最多有(　　).

A. 324 个　　B. 243 个　　C. 495 个　　D. 414 个

解 选 D.

将集合 S 划分为 4 个子集：$S_1=\{1,2,\cdots,9\}$，$S_2=\{10,11,\cdots,99\}$，$S_3=\{100,101,\cdots,999\}$，$S_4=\{1000,1001,\cdots,2003\}$．用 M_i 表示 $S_i(i=1,2,3,4)$中仅含一个数字 0 的所有元素组成的子集，显然，S_1 中每一个元素都不含 0，则$|M_1|=0$；在 S_2 中仅个位为 0 的元素有 9 个，则$|M_2|=9$；在 S_3 中仅个位或十位为 0 的元素各有 9^2 个，则$|M_3|=2\times9^2$；在 S_4 中仅个位或十位或百位为 0 的各 9^2 个，则$|M_4|=3\times9^2$ 个，故 $M_{\max}=|M_1|+|M_2|+|M_3|+|M_4|=414$.

例 12 设集合 $T=\{x_1,x_2,\cdots,x_{10}\}$的五元子集满足：$T$ 的任意两个元素最多在两个子集内出现，这样的五元子集最多个数为(　　).

A. 252　　B. 10　　C. 8　　D. 18

解 选 C.

一元素与另外9个元素之一组成的“二元素组”在所有满足题设的五元子集中出现的机会不多于两次，因此，它参与组成的“二元素组”出现的总次数不多于18次．由于是五元子集，所以该元素出现的次数不多于4次，n个5元素共$5n$个数．于是$5n\leqslant 4\times 10$，$n\leqslant 8$.

此外，集合$\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$，$\{x_1,x_6,x_7,x_8,x_9\}$，$\{x_1,x_3,x_5,x_6,x_8\}$，$\{x_1,x_2,x_4,x_7,x_9\}$，$\{x_2,x_3,x_6,x_7,x_{10}\}$，$\{x_3,x_4,x_7,x_8,x_{10}\}$，$\{x_4,x_5,x_8,x_9,x_{10}\}$，$\{x_2,x_5,x_6,x_9,x_{10}\}$是符合条件的8个5元素集．故最多个数为8.

例13 已知$A=\{x||x-a|\leqslant 3\}$，$B=\{x|x^2+7x-8>0\}$，分别就下面条件求a的取值范围：(1)$A\cap B=\varnothing$；(2)$A\cap B=A$.

解 (1)因为$A=\{x||x-a|\leqslant 3\}=\{x|a-3\leqslant x\leqslant a+3\}$，$B=\{x|x^2+7x-8>0\}=\{x|x<-8$或$x>1\}$，而$A\cap B=\varnothing$，

所以$\begin{cases}a-3\geqslant -8,\\a+3\leqslant 1.\end{cases}$解不等式组，得$-5\leqslant a\leqslant -2$.

(2)因为$A=\{x|a-3\leqslant x\leqslant a+3\}$，$B=\{x|x<-8$或$x>1\}$，

又由$A\cap B=A$，知$A\subseteq B$.

所以$a+3<-8$，或$a-3>1$.解之得$a<-11$，或$a>4$.

例14 关于实数的不等式$\left|x-\dfrac{(a+1)^2}{2}\right|\leqslant\dfrac{(a-1)^2}{2}$与$x^2-3(a+1)x+2(3a+1)\leqslant 0$ $(a\in\mathbf{R})$的解集分别为A与B，求使$A\subseteq B$的a的取值范围.

解法1 由已知，$A=\{x|2a\leqslant x\leqslant a^2+1\}$.

设$f(x)=x^2-3(a+1)x+2(3a+1)$，$A\subseteq B$的充分必要条件是$f(x)=0$的根分别在区间$(-\infty,2a]$与$[a^2+1,+\infty)$，于是$\begin{cases}f(2a)=-2a^2+2\leqslant 0,\\f(a^2+1)=(a+1)\cdot a(a-1)(a-3)\leqslant 0,\end{cases}$

解得$1\leqslant a\leqslant 3$，或$a=-1$. 所以$1\leqslant a\leqslant 3$，或$a=-1$. 所以$a\in\{a|1\leqslant a\leqslant 3$，或$a=-1\}$.

解法2 由已知，$A=\{x|2a\leqslant x\leqslant a^2+1\}$，所以$a^2+1\geqslant 2a$恒成立，所以$A\neq\varnothing$.

若$3a+1\geqslant 2$，则$B=\{x|2\leqslant x\leqslant 3a+1\}$.

若$3a+1\leqslant 2$，则$B=\{x|3a+1\leqslant x\leqslant 2\}$.

$A\subseteq B$的充分必要条件是：$\begin{cases}3a+1\geqslant a^2+1,\\2a\geqslant 2,\end{cases}$或$\begin{cases}a^2+1\leqslant 2,\\3a+1\leqslant 2a,\end{cases}$

解得$1\leqslant a\leqslant 3$，或$a=-1$.所以$a\in\{a|1\leqslant a\leqslant 3$，或$a=-1\}$.

例15 已知集合$A=\{x,xy,\lg(xy)\}$，$B=\{0,|x|,y\}$，若$A=B$，则$\left(x+\dfrac{1}{y}\right)+\left(x^2+\dfrac{1}{y^2}\right)+\cdots+\left(x^{2003}+\dfrac{1}{y^{2003}}\right)$的值是多少？

解 因为$A=B$，所以$\begin{cases}x+xy+\lg(xy)=|x|+y.\\x\cdot xy\cdot\lg(xy)=0.\end{cases}$

根据元素的互异性，由B知$x\neq 0$，$y\neq 0$.

因为$0\in B$，且$A=B$，所以$0\in A$，故只有$\lg(xy)=0$，从而$xy=1$.

又由$1\in A$及$A=B$得$1\in B$，

所以有$\begin{cases}xy=1,\\|x|=1\end{cases}$或$\begin{cases}xy=1,\\y=1.\end{cases}$其中$x=y=1$与元素互异性矛盾，

所以$x=y=-1$，代入得

$\left(x+\dfrac{1}{y}\right)+\left(x^2+\dfrac{1}{y^2}\right)+\cdots+\left(x^{2003}+\dfrac{1}{y^{2003}}\right)=-2+2-2+\cdots+2-2=-2.$

例16 平面点集$M=\{(x,y)|x^2-2x+2\leqslant y\leqslant 6x-x^2-3$，且$x,y\in\mathbf{Z}\}$中元素的个数为________

第一章 集合

________________.

解 由 $x^2-2x+2=6x-x^2-3$，可得 $x=2\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$.

又 $x^2-2x+2\leqslant y\leqslant 6x-x^2-3$，且 $x,y\in\mathbf{Z}$，所以 $x=1,2,3$.

当 $x=1$ 时，$1\leqslant y\leqslant 2$，即 $y=1$ 或 2.

当 $x=2$ 时，$2\leqslant y\leqslant 5$，即 $y=2,3,4,5$.

当 $x=3$ 时，$5\leqslant y\leqslant 6$，即 $y=5,6$.

所以满足题意的元素个数为 $2+4+2=8$.

例 17 (1)已知全集 $U=\{30$ 以内的质数$\}$，它的子集 A,B 满足 $\complement_U A\cap B=\{2,7,17\}$，$A\cap\complement_U B=\{3,23\}$，$\complement_U A\cap\complement_U B=\{5,13,29\}$，求集合 A 与 B；

(2)已知集合 A,B 满足 $A\cup B=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. 求满足条件的有序二元组$(A,B)$的个数.

解 (1)**解法 1** 由 $\complement_U A\cap B=\{2,7,17\}$ 及 $\complement_U A\cap\complement_U B=\{5,13,29\}$，得 $\complement_U A=\{2,5,7,13,17,29\}$. 再由 $A\cap\complement_U B=\{3,23\}$ 及 $\complement_U A\cap\complement_U B=\{5,13,29\}$，又得 $\complement_U B=\{3,5,13,23,29\}$. 又全集 $U=\{2,3,5,7,11,13,17,19,23,29\}$. 所以 $A=\{3,11,19,23\}$，$B=\{2,7,11,17,19\}$.

解法 2 因为全集 $U=\{2,3,5,7,11,13,17,19,23,29\}$，我们画出韦恩图(如图 1-2). 从图中可以立即求得 $A=\{3,11,19,23\}$，$B=\{2,7,11,17,19\}$.

(2)利用韦恩图，我们可将 $A\cup B$ 划分成(1)，(2)，(3)三个区域，于是 1，2，3，4，5，6，7，8，9 中的每个数都可以有 3 种选择方法，故有序二元组(A,B)的个数应等于 3^9.

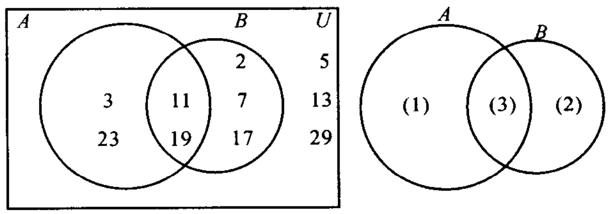

图 1-2

例 18 已知集合 $M=\{x\mid f(x)-x=0,x\in\mathbf{R}\}$ 与集合 $P=\{x\mid f[f(x)]-x=0,x\in\mathbf{R}\}$，其中 $f(x)$ 是一个二次项系数为 1 的二次函数.

(1)讨论 M 与 P 的关系；(2)若 M 是单元素集，求证 $P=M$.

解 (1)设 $x_0\in M$，则 $f(x_0)=x_0$，于是 $f[f(x_0)]=f(x_0)=x_0$，这说明 $x_0\in P$，由此得 $M\subseteq P$.

(2)由题意可设 $M=\{a\}(a\in\mathbf{R})$，则关于 x 的一元二次方程 $f(x)-x=0$ 有两个相同的实根，即有 $f(x)-x=(x-a)^2$. 由此得表达式 $f(x)=(x-a)^2+x$.

再由方程 $f[f(x)]-x=0$，得 $x=\{[(x-a)^2+x]-a\}^2+[(x-a)^2+x]$. 整理得$[(x-a)^2+(x-a)]^2+(x-a)^2=0$，即$(x-a)^2[(x-a+1)^2+1]=0$. 因为 $x,a\in\mathbf{R}$，所以$(x-a+1)^2+1\neq 0$，于是 $x=a$. 这说明方程 $f[f(x)]-x=0$ 也仅有一实根 a，即 $P=\{a\}$，所以 $P=M$.

例 19 已知集合 $A=\{(x,y)\mid ax+y=1\}$，$B=\{(x,y)\mid x+ay=1\}$，$C=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$，问：

(1)当 a 取何值时，$(A\cup B)\cap C$ 为含有 2 个元素的集合？

(2)当 a 取何值时，$(A\cup B)\cap C$ 为含有 3 个元素的集合？

解 $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$. $A\cap C$ 与 $B\cap C$ 分别为方程组：

(Ⅰ)$\begin{cases}ax+y=1,\\x^2+y^2=1;\end{cases}$(Ⅱ)$\begin{cases}x+ay=1,\\x^2+y^2=1.\end{cases}$ 的解集.

由(Ⅰ)解得$(x,y)=(0,1)$，$\left(\frac{2a}{1+a^2},\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)$；由(Ⅱ)解得$(x,y)=(1,0)$，$\left(\frac{1-a^2}{1+a^2},\frac{2a}{1+a^2}\right)$.

(1)使$(A\cup B)\cap C$ 恰有 2 个元素的情况只有两种可能：

①$\begin{cases}\dfrac{2a}{1+a^2}=0,\\\dfrac{1-a^2}{1+a^2}=1;\end{cases}$ ②$\begin{cases}\dfrac{2a}{1+a^2}=1,\\\dfrac{1-a^2}{1+a^2}=0.\end{cases}$

由①得 $a=0$;由②得 $a=1$.

故当 $a=0$ 或 1 时,$(A\cup B)\cap C$ 恰有 2 个元素.

(2)使 $(A\cup B)\cap C$ 恰有 3 个元素的情况是 $\frac{2a}{1+a^2}=\frac{1-a^2}{1+a^2}$,解得 $a=-1\pm\sqrt{2}$. 故当 $a=-1\pm\sqrt{2}$ 时,$(A\cup B)\cap C$ 恰有 3 个元素.

例 20 已知 $M=\{(x,y)\mid y\geqslant x^2\}$,$N=\{(x,y)\mid x^2+(y-a)^2\leqslant 1\}$. 求 $M\cap N=N$ 成立时,a 需满足的充要条件.

解 $M\cap N=N\Leftrightarrow N\subseteq M$. 由 $x^2+(y-a)^2\leqslant 1$ 得,

$x^2\leqslant y-y^2+(2a-1)y+(1-a^2)$. 于是,若 $-y^2+(2a-1)y+(1-a^2)\leqslant 0$ ①

必有 $y\geqslant x^2$,即 $N\subseteq M$. 而①成立的条件是 $y_{\max}=\frac{-4(1-a^2)-(2a-1)^2}{-4}\leqslant 0$,

即 $4(1-a^2)+(2a-1)^2\leqslant 0$,解得 $a\geqslant 1\frac{1}{4}$.

例 21 设集合 $M=\{1,2,3,\cdots,1995\}$,A 是 M 的子集且满足条件:当 $x\in A$ 时,$15x\notin A$,则 A 中元素的个数最多是________.

解析 由于 $1995=15\times 133$,所以只要 $n\geqslant 133$,就有 $15n\geqslant 1995$. 故取出所有大于 133 而不超过 1995 的整数. 由于这时已取出了 $15\times 9=135,\cdots,15\times 133=1995$. 故 9 至 133 的整数都不能再取,还可取 1 至 8 这 8 个数. 即共取出 $1995-133+8=1870$(个)数,这说明所求数 $\geqslant 1870$.

另一方面,把 k 与 $15k$ 配对(k 不是 15 的倍数,且 $1\leqslant k\leqslant 133$),共得 $133-8=125$(对). 每对数中至多能取 1 个数为 A 的元素,这说明所求数 $\leqslant 1870$. 综合可知 A 中元素最多 1870 个.

例 22 已知 $A=\{(x,y)\mid x=n,y=na+b,n\in\mathbf{Z}\}$,$B=\{(x,y)\mid x=m,y=3m^2+15,m\in\mathbf{Z}\}$,$C=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 144\}$ 都是坐标平面内的三个点集,试问是否存在实数 a,b,使得 $A\cap B\neq\varnothing$,点 $(a,b)\in C$ 同时成立? 如存在请求出 a,b 的值;若不存在则说明理由.

解法 1 假设存在实数 a,b,同时满足题意中的两个条件,则必存在整数 n,使 $3n^2-an+(15-b)=0$,于是它的判别式 $\Delta=(-a)^2-12(15-b)\geqslant 0$,即 $a^2\geqslant 12(15-b)$. 又由 $a^2+b^2\leqslant 144$ 得 $a^2\leqslant 144-b^2$. 由此便得 $12(15-b)\leqslant 144-b^2$,即 $(b-6)^2\leqslant 0$,故 $b=6$. 代入上述的 $a^2\geqslant 12(15-b)$ 及 $a^2\leqslant 144-b^2$ 得 $a^2=108$,所以 $a=\pm 6\sqrt{3}$. 将 $a=\pm 6\sqrt{3}$,$b=6$ 代入方程 $3n^2-an+(15-b)=0$,求得 $n=\pm\sqrt{3}\notin\mathbf{Z}$. 这说明满足已知两个条件的实数 a,b 是不存在的.

解法 2 假设存在实数 a,b,同时满足题意中的两个条件,即有 $\begin{cases}na+b=3n^2+15,\\ a^2+b^2\leqslant 144.\end{cases}$ 从中消去 b 得

$(1+n^2)a^2-2n(3n^2+15)a+(3n^2+15)^2-144\leqslant 0$. 它的判别式

$$\begin{aligned}\Delta_a&=[-2n(3n^2+15)]^2-4(1+n^2)[(3n^2+15)^2-144]\\&=-4(3n^2+15)^2+576(1+n^2)=-36n^4+216n^2-324=-36(n^2-3)^2,\end{aligned}$$

因为 $n\in\mathbf{Z}$,所以 $\Delta_a<0$,又二次项系数 $1+n^2>0$,所以上述关于 a 的二次不等式无解. 这说明同时满足题意中两个条件的实数 a,b 是不存在的.

解法 3 假设存在实数 a,b,使得关于 m,n 的方程组 $\begin{cases}n=m\\ na+b=3m^2+15\end{cases}$ 至少有一组整数解,由此可知点 $P(a,b)$ 在直线 $nx+y-(3n^2+15)=0(n\in\mathbf{Z})$ 上. 可知原点 $O(0,0)$ 到此直线的距离

$$d=\frac{|3n^2+15|}{\sqrt{n^2+1}}=\frac{3(n^2+1)+12}{\sqrt{n^2+1}}=3\sqrt{n^2+1}+\frac{12}{\sqrt{n^2+1}}\geqslant 2\sqrt{3\sqrt{n^2+1}\cdot\frac{12}{\sqrt{n^2+1}}}=12.$$

其中当且仅当 $3\sqrt{n^2+1}=\frac{12}{\sqrt{n^2+1}}$,即 $n^2=3$ 时取等号. 但 $n\in\mathbf{Z}$,所以 $n^2\neq 3$,于是 $d>12$. 由此可知原点 $O(0,0)$,$P(a,b)$ 两点间距离 $\sqrt{a^2+b^2}>12$,即 $a^2+b^2>144$. 这与所要求的"$a^2+b^2\leqslant 144$"相矛盾,所

以同时满足题中两个条件的实数 a,b 是不存在的．

例 23 已知集合 $A=\{(x,y)\mid |x|+|y|=a,a>0\}$，$B=\{(x,y)\mid |xy|+1=|x|+|y|\}$．若 $A\cap B$ 是平面上正八边形的顶点所构成的集合，则 a 的值为__________．

解 点集 A 是顶点为 $(a,0)$，$(0,a)$，$(-a,0)$，$(0,-a)$ 的正方形的四条边构成(如图 1-3)．

将 $|xy|+1=|x|+|y|$ 变形为 $(|x|-1)(|y|-1)=0$，

所以，集合 B 是由四条直线 $x=\pm1$，$y=\pm1$ 构成．

欲使 $A\cap B$ 为正八边形的顶点所构成，只有 $a>2$ 或 $1<a<2$ 这两种情况．

(1)当 $a>2$ 时，由于正八形的边长只能为 2，显然有 $\sqrt{2}a-2\sqrt{2}=2$，故 $a=2+\sqrt{2}$.

(2)当 $1<a<2$ 时，设正八形边长为 l，则 $l\cos45^\circ=\dfrac{2-l}{2}$，$l=2\sqrt{2}-2$，这时，$a=1+\dfrac{l}{2}=\sqrt{2}$.

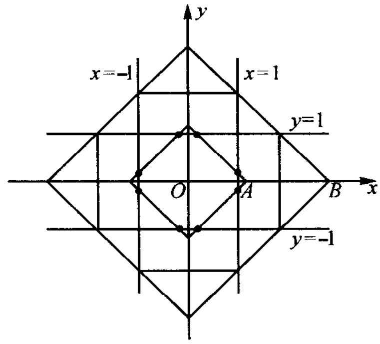

图 1-3

综上所述，a 的值为 $2+\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{2}$，如图 1-3 中 $A(\sqrt{2},0)$，$B(2+\sqrt{2},0)$．

例 24 设集合 $M=\{1,2,\cdots,1000\}$．现对 M 的任一非空子集 X，令 a_x 表示 X 中最大数与最小值之和，那么，所有这样的 a_x 的算术平均值为__________．

解 将 M 中非空子集进行配对，对每个非空子集 $X\subset M$，令 $X'=\{1001-x\mid x\in M\}$，则当 X_1 也是 M 的非空子集且 $X\neq X_1$ 时，有 $X'\neq X'_1$，于是所有非空子集除 $\{1,2,\cdots,1000\}$ 以外分为两类：

(1) $X'\neq X$；(2) $X'=X$.

对于(2)中的 X，必有 $a=1001$.

对于(1)中的一对 X 与 X'，有 $a_x+a'_x=1001\times2=2002$.

由此可见，所有 a_x 的算术平均值为 1001.

例 25 集合 $A=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$，其中 $x_1<x_2<x_3<x_4<x_5$，把 A 中的所有二元子集两元素之和组成集合 $B=\{3,4,5,\cdots,11,13\}$，求集合 A.

解 依题意得 $\begin{cases}x_1+x_2=3. & ①\\ x_4+x_5=13. & ②\end{cases}$

因为在 A 的所有二元子集中，每个元素都出现 4 次，

所以集合 B 的元素之和为 $4(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)=\dfrac{3+11}{2}\times9+13=76$. ③

由 $x_1+x_3>x_1+x_2$，$x_3+x_5<x_4+x_5$，以及①，②，③得 $x_1=1$，$x_2=2$，$x_3=3$，$x_4=5$，$x_5=8$.

例 26 一个集合含有 10 个互不相同的两位数，试证：这个集合必有 2 个无公共元素的子集合，这两个子集合的各数之和相等．

解 已知集合含有 $2^{10}-1=1023$ 个不同的非空子集，每个子集内各数之和不超过 $99+98+\cdots+90=945<1023$．由抽屉原理，故一定存在 2 个不同的子集，其元素之和相等，划去它们共有的数字，可得两个无公共元素的非空子集，其所含各数之和相等．

例 27 有限集 S 的全部元素的乘积，称为数集 S 的"积数"，今给出数集 $M=\left\{\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{4},\cdots,\dfrac{1}{99},\dfrac{1}{100}\right\}$，试确定 M 的所有偶数个(2 个，4 个，…，98 个)元素子集的"积数"之和的值．

解 数集 M 中共有 99 个不同元素．设 M 的所有偶数个元素子集的"积数"之和为 G，所有奇数个元素子集"积数"之和为 H．由公式 $(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)=1+a_1+a_2+\cdots+a_n+a_1a_2+\cdots+a_{n-1}a_n+a_1a_2a_3+\cdots+a_{n-2}a_{n-1}a_n+\cdots+a_1a_2\cdots a_n$ 易知

$$G+H=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{99}\right)\left(1+\frac{1}{100}\right)-1,$$

$$G-H=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{99}\right)\left(1-\frac{1}{100}\right)-1.$$

化简上面两式，得$G+H=\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{5}{4}\times\cdots\times\frac{100}{99}\times\frac{101}{100}-1=\frac{99}{2}$.

$$G-H=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{98}{99}\times\frac{99}{100}-1=-\frac{99}{100}.$$

两式相加，得 $G=24.255$.

故 M 的所有偶数个元素子集“积数”之和为 24.255.

例 28 以某些整数为元素的集合 P 具有下列性质：①P 中的元素有正数，有负数；②P 中的元素有奇数，有偶数；③$-1\notin P$；④若 $x,y\in P$，则 $x+y\in P$. 试证明：(1)$0\in P$；(2)$2\notin P$.

解 (1)设存在正整数 m 与负整数 n，且 $m,n\in P$，则 $m\cdot n\in P$，$(-n)\cdot m\in P$，$0=m\cdot n-m\cdot n\in P$.

(2)(反证法)若 $2\in P$，则 P 中的负数全为偶数，若不然的话，存在奇数 $-2k-1\in P$，$k\in\mathbf{N}$.

但 $-1=(-2k-1)+2\cdot k\in P$ 与③矛盾.

由②必有正奇数 $2n-1\in P$，负偶数 $-2m\in P$，$m,n\in\mathbf{N}$.

取 K，使 $K\cdot|-2m|>2n-1$，则负奇数 $-2m\cdot k+(2n-1)\in P$ 矛盾. 故 $2\notin P$.

例 29 S_1,S_2,S_3 为非空整数集合. 对于 1,2,3 的任意一个排列 i,j,k，若 $x\in S_i$，$y\in S_j$，则 $x-y\in S_k$. (1)证明：S_1,S_2,S_3 这三个集合中至少有两个相等；

(2)三个集合中是否可能有两个集合无公共元素？

解 (1)若 $x\in S_i$，$y\in S_j$，则 $y-x\in S_k$. 从而 $-x=(y-x)-y\in S_i$，说明每个集合均含有非负元素. 当 3 个集合中元素均为 0 时，命题显然成立. 否则，设 S_1,S_2,S_3 中最小正元素为 a，不妨设 $a\in S_1$，b 是 S_2,S_3 中最小非负元素，不妨设 $b\in S_2$，则 $b-a\in S_3$.

若 $b>0$，则 $b\geqslant a$，于是 $b>b-a\geqslant 0$，与 b 取法矛盾，所以 $b=0$. 于是任取 $x\in S_1$，因 $0\in S_2$，故 $x=x-0\in S_3$，即有 $S_1\subseteq S_3$，同理 $S_1\supseteq S_3$，故 $S_1=S_3$.

(2)可能. 例如 $S_1=S_2=\{$奇数$\}$，$S_3=\{$偶数$\}$，显然满足条件，但 S_1,S_2 与 S_3 无公共元素.

例 30 已知集合 $S=\{1,2,\cdots,1997\}$，$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$是 S 的子集，具有下述性质：A 中任意两个不同元素的和不能被 117 整除. 试确定 k 的最大值，并证明你的结论.

解 由 $1997=117\times17+8$，把 S 中的元素按被 117 除的余数分类. 所有被 117 除余 r ($0\leqslant r\leqslant 116$，$r\in\mathbf{N}$)的元素归为一类，记为$[r]$类，则可知：$[1]$，$[2]$，$[3]$，$[4]$，$[5]$，$[6]$，$[7]$，$[8]$这 8 类各有 18 个元素，其余各类分别有 17 个元素.

现取出$[1]$，$[2]$，…，$[58]$类的所有元素，$[0]$类中任取 1 个元素，共得 $18\times8+17\times50+1=995$ 个元素. 这 995 个数中没有任何二数的和是 117 的倍数. 这说明 $k\geqslant995$.

若任取 S 中 m 个元素，$m\geqslant996$，把$[1]$类与$[116]$类并为一个“抽屉”，$[2]$类与$[115]$类并为一个“抽屉”，…，一般地，$[r]$类与$[117-r]$类并为一个“抽屉”($r=1,2,\cdots,58$). 如果取出的 m 个数中有 2 个数为$[0]$类的数，则此二数的和为 117 的倍数，故$[0]$类中至多可取出 1 个数，从而至少有 $m-1\geqslant995$ 个数落入这 58 个抽屉，而 $995=58\times17+9$. 若某个抽屉中至少有 19 个数，例如$[i]$类与$[117-i]$类组成的抽屉中至少有 19 个数($1\leqslant i\leqslant58$)，由于$[i]$类中至多 18 个数，$[117-i]$类中至多 17 个数，故$[i]$类与$[117-i]$类中都至少有 1 个数，再在每类中取 1 数，此二数为 117 的倍数，若任一抽屉中都不超过 18 个数，于是至少有 9 个抽屉，每个抽屉中有 18 个数. 这说明至少有一个 i ($9\leqslant i\leqslant58$)，在$[i]$类与$[117-i]$类组成的抽屉中有 18 个数. 但$[i]$类与$[117-i]$类都只有 17 个数，故$[i]$类与$[117-i]$类中都至少有一个数，再在每类中取 1 数，此二数的和为 117 的倍数. 综上可知，当 $k\geqslant996$ 时，A_k 中必有二数和为 117 的倍数，这说明 $k\leqslant995$. 综上可知，$k=995$.

【反思练习】

1. 若集合 $M=\{(x,y)\mid|\tan\pi y|+\sin^2\pi x=0\}$，$N=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant2\}$，则 $M\cap N$ 的元素个数是（　　）

A. 4　　B. 5　　C. 8　　D. 9

2. 已知 $A=\{x\mid x^2-4x+3<0,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x\mid 2^{1-x}+a\leqslant0,x^2-2(a+7)x+5\leqslant0,x\in\mathbf{R}\}$，若 $A\subseteq B$，则实数 a 的取值范围是________.

3. 集合 $S=\{1,2,3,\cdots,18\}$ 的五元子集 $S_5=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$ 中，任何两个元素之差不为1，这样的子集 S_5 的个数共有________个.

4. 已知集合 X,Y 满足 $X\cup Y=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$.

(1)若 $X\cap Y=\varnothing$，求有序二元组 (X,Y) 的个数；

(2)若 $X\cap Y=\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$（这里 $k\leqslant n$），求有序二元组 (X,Y) 的个数；

(3)求有序二元组 (X,Y) 的个数.

5. 设 $I=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，$I\subsetneqq\mathbf{N}$ 且 $n>1$，对 $A\subseteq I,A\neq\varnothing$. 定义 $\pi(A)$ 为 A 中所有元素的乘积，设 $m(I)$ 表示 I 的所有 $\pi(A)$ 的值的算术平均数. 已知 $m(I)=9$，$k=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,a_{n+1}\}$，$a_{n+1}\in\mathbf{N}$，$m(k)=81$，求 $a_1,a_2,\cdots,a_n,a_{n+1}$.

第二节　集合的性质及应用

【赛题精讲】

例1　在不大于600的正整数中，至少可被3,5,7之一整除的个数为（　　）

A. 5　　B. 85　　C. 405　　D. 325

解　选D.

设 $S=\{1,2,3,\cdots,600\}$，A_3,A_5,A_7 分别表示 S 中的3,5,7的倍数集，则

$\operatorname{card}(A_3\cup A_5\cup A_7)=\operatorname{card}(A_3)+\operatorname{card}(A_5)+\operatorname{card}(A_7)-\operatorname{card}(A_3\cap A_5)-\operatorname{card}(A_5\cap A_7)-\operatorname{card}(A_3\cap A_7)+\operatorname{card}(A_3\cap A_5\cap A_7)=\left[\frac{600}{3}\right]+\left[\frac{600}{5}\right]+\left[\frac{600}{7}\right]-\left[\frac{600}{3\times5}\right]-\left[\frac{600}{5\times7}\right]-\left[\frac{600}{3\times7}\right]+\left[\frac{600}{3\times5\times7}\right]=200+120+85-40-17-28+5=325.$

例2　在全国高中数学联赛第二试中只有三道题. 已知(1)某校25个学生参加竞赛，每个学生至少解出一道题；(2)在所有没有解出第一题的学生中，解出第二题的人数是解出第三题的人数的2倍；(3)只解出第一题的学生比余下的学生中解出第一题的人数多1；(4)只解出一道题的学生中，有一半没有解出第一题. 问共有多少学生只解出第二题?

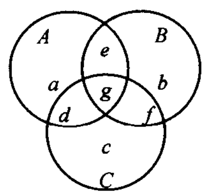

图1-4

解　本题的条件较多，可利用韦恩图. 设解出第一、二、三道题的学生的集合为 A,B,C，并用三个圆分别表示，如图1-4，则重叠部分表示同时解出两道题或三道题的集合，这样得到七个部分，其人数分别用 a,b,c,d,e,f,g 表示. 然后，根据已知条件列出方程组求出 b.

根据已知条件(1)，(2)，(3)，(4)可得

$$\begin{cases}a+b+c+d+e+f+g=25 & ①\\ b+f=2(c+f) & ②\\ a=d+e+g+1 & ③\\ a=b+c & ④\end{cases}$$

②代入①得　$a+2b-c+d+e+g=25$　⑤

③代入⑤得　$2b-c+2d+2e+2g=24$　⑥

④代人⑤得 $$3b+d+e+g=25 \quad ⑦$$

⑦×2－⑥得 $$4b+c=26 \quad ⑧$$

由于 $c\geqslant 0$，所以 $b\leqslant 6\frac{1}{2}$. 利用②，⑧消去 c，得 $f=b-2(26-4b)=9b-52$. 因为 $f\geqslant 0$，所以 $b\geqslant 5\frac{7}{9}$，则有 $b=6$，即只解出第二题的学生有 6 人．

例 3 某校有学生 1000 人，其中 570 名团员，112 名女生．据统计有 625 人在校住宿．住校生中团员有 147 名，女生有 42 名；女团员有 86 名，在校住宿的女团员有 25 名．上述统计数字是否完全准确？

解 不完全准确，设 $A=\{$住校生$\}$，$B=\{$团员$\}$，$C=\{$女生$\}$，则 $|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|=625+570+112-147-42-86+25=1057>1000$. 这与学校只有学生 1000 人矛盾，表明统计有误．

例 4 任意 n 个自然数构成的集合 $\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\}$ 中，总有一个非空子集，它所含的数之和为 n 的倍数．

证明 考虑 n 个和 $S_1=a_1,S_2=a_1+a_2,\cdots,S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，它们各被 n 除余数为 $0,1,\cdots,n-1$. 如果有某个和被 n 除余数为 0，则结论成立．

如果所有余数都不为 0，由抽屉原理，必有两和 $S_i,S_j(j>i)$ 被 n 除余数相同，于是 $S_j-S_i=(a_1+a_2+\cdots+a_j)-(a_1+a_2+\cdots+a_i)=a_{i+1}+a_{i+2}+\cdots+a_j$ 是 n 的倍数，结论得证．

例 5 把集合 $\{1,2,\cdots,100\}$ 划分为七个子集．证明至少有一个子集中有四个数 a,b,c,d，使 $a+b=c+d$；或有三个数 a,b,c，使得 $a+c=2b$.

证明 由抽屉原理，七个子集中必有一个子集 A 中至少有 15 个元素，A 中任意两数 $a>b$，确定一个差 $1\leqslant a-b\leqslant 99$. 因为每个数至少与其他 14 个数可确定 14 个差，故 A 中至少可确定 15×14 个差．但因 $x-y$ 与 $y-x$ 中只有一个为正，故 A 中至少有正差 $\frac{15\times 14}{2}=105$ 个，每个差都在 $[1,99]$ 之间．由抽屉原理可知，至少有两个差相等，即 $a-b=c-d$ 或 $a-b=b-c$，也即有四个数使 $a+d=b+c$ 或三个数 $a+c=2b$.

例 6 设 A 和 B 是两个集合，又设集合 X 满足 $A\cap X=B\cap X=A\cap B$，$A\cup B\cup X=A\cup B$，求集合 X.

解 由 $A\cap X=B\cap X=A\cap B$ 知，$X\supseteq A\cap B$；由 $A\cup B\cup X=A\cup B$ 知，$X\subseteq A\cup B$. 假设 $x\in X$ 且 $x\notin A\cap B$. 因 $X\subseteq A\cup B$，可得 $x\notin A$ 且 $x\in B$ 或 $x\in B$ 且 $x\notin A$，这时总有 $A\cap X\neq B\cap X$，与题设矛盾，所以 $x\in X$ 时，必有 $x\in A\cap B$，从而 $X\subseteq A\cap B$，所以 $X=A\cap B$.

例 7 西方某国家在某次竞选中，各个政党共作出 p 种不同的许诺($p>0$)，任何两党都至少有一种共同的许诺，但没有两党作出全部相同的许诺．试证：政党的数目不多于 2^{p-1} 个．

证明 将 p 种许诺构成集合 A，则每个政党所作的许诺构成了 A 的一个子集．依题意，这是 A 中的不同子集．又由于任何两党都至少有一种共同的许诺，所以，决不可能有某两党的许诺刚好构成一对互补的子集．这就告诉我们，在每对具有互补关系的子集中，至多只有一者可以成为某个政党的许诺集合，所以政党的数目不超过 A 的子集的一半即 2^{p-1}.

例 8 要求由 1,2,3 组成的 n 位数中，1,2 和 3 每一个至少出现一次，求所有这种 n 位数的个数．

解 把所有由 1,2,3 组成的 n 位数的集合记作全集 S，则 $|S|=3^n$. 把 S 中不含 i $(i=1,2,3)$ 的 n 位数的集合记作 A，则 $|A_i|=2^n$，$|A_i\cap A_j|=1$，$|A_1\cap A_2\cap A_3|=0$，$i\neq j$，$i,j=1,2,3$. $(\complement_S A_1)\cap(\complement_S A_2)\cap(\complement_S A_3)$ 为 S 中同时含有 1,2,3 的 n 位数全体的集合．由容斥原理知：

$$|(\complement_S A_1)\cap(\complement_S A_2)\cap(\complement_S A_3)|=|S|-|A_1\cup A_2\cup A_3|$$
$$=|S|-[|A_1|+|A_2|+|A_3|-|A_1\cap A_2|-|A_2\cap A_3|-|A_3\cap A_1|+|A_1\cap A_2\cap A_3|].$$

故 $|(\complement_S A_1)\cap(\complement_S A_2)\cap(\complement_S A_3)|=3^n-3\cdot 2^n+3$.

例 9 有 A,B,C 三个兴趣小组，分别有成员 5 名，4 名，7 名，其中同时参加 A 和 B 兴趣小组的成

员有 3 名，同时参加 A,B,C 的成员有 2 名．设 $(A\cup B)\cap C$ 由 x 名成员构成，而 $A\cup B\cup C$ 由 y 名成员构成，求 x 和 y 的取值范围．

解 以 A,B,C 分别表示相应小组成员的集合，由题设有 $|A|=5,|B|=4,|C|=7,|A\cap B|=3,|A\cap B\cap C|=2$.

因 $|A\cap B\cap C|=2$，故 $|(A\cup B)\cap C|\geqslant 2$ ①

因 $|A\cap B|=3,|A\cap B\cap C|=2$， ②

所以存在元素 $a\in A$ 且 $a\in B$. 但 $a\notin C$，从而存在元素 $a\in A\cup B$，但 $a\notin C$.

又 $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|=5+4-3=6$，所以 $|(A\cup B)\cap C|\leqslant 5$. ③

$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|B\cap C|-|C\cap A|+|A\cap B\cap C|$

$=5+4+7-3-|B\cap C|-|C\cap A|+2=15-(|B\cap C|+|C\cap A|)$. ④

因 $|A\cap B\cap C|=2$. 有 $|B\cap C|\geqslant 2,|C\cap A|\geqslant 2$.

所以，$|B\cap C|+|C\cap A|\geqslant 4$. 代入④得 $|A\cup B\cup C|\leqslant 11$. ⑤

因②及 $|A|=5,|B|=4,|C|=7$. 所以，$|B\cap C|\leqslant 3,|C\cap A|\leqslant 4$.

所以 $|B\cap C|+|C\cap A|\leqslant 7$，代入④得 $|A\cup B\cup C|\geqslant 8$. ⑥

作图如图 1-5 所示：

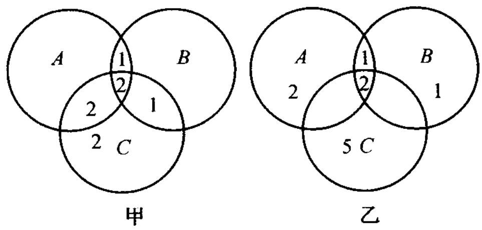

图 1-5

由图 1-5 知出现图甲情形时，③，⑥式中等号成立；出现图乙中情形时，①，⑤式中等号成立．

所以，$2\leqslant x\leqslant 5$，且 $x\in\mathbf{N}$；$8\leqslant y\leqslant 11$，且 $y\in\mathbf{N}$.

例 10 设集合 $A\subseteq\{1,2,3,\cdots,100\}$，且对任意 $x,y\in A$，必有 $2x\neq y$. 求子集 A 中所含元素的个数的最大值．

解 令 $M_1=\{51,52,\cdots,100\},M_2=\{26,27,\cdots,50\},M_3=\{13,14,\cdots,25\},M_4=\{7,8,\cdots,12\},M_5=\{4,5,6\},M_6=\{2,3\},M_7=\{1\}$，则 $M_1\cup M_3\cup M_5\cup M_7$ 所含元素个数为 $50+13+3+1=67$，且其中每一个元素都不是另一个元素的两倍．

现设 $A\subseteq\{1,2,3,\cdots,100\}$，其中每一个数都不是另一个数的 2 倍，则当 $a\in A\cap M_2$ 时，$2a\notin A$（但 $2a\in M_1$），故 $|A\cap(M_1\cup M_2)|=|A\cap M_1|+|A\cap M_2|\leqslant 50$. 同样，$|A\cap(M_3\cup M_4)|=|A\cap M_3|+|A\cap M_4|\leqslant 13,|A\cap(M_5\cup M_6)|=|A\cap M_5|+|A\cap M_6|\leqslant 3,|A\cap M_7|\leqslant 1$，因此 $|A|\leqslant 67$，故子集 A 所含元素的个数最大值为 67.

例 11 已知集合 $A=\{(x,y)\mid y=-x^2+mx-1,m\in\mathbf{R}^+\},B=\{(x,y)\mid y=-x+3,0\leqslant x\leqslant 3\}$. 若 $A\cap B$ 是单元素集合，求实数 m 的取值范围．

解 由题意知，原命题等价于方程 $-x^2+mx-1=-x+3$. 在 $0\leqslant x\leqslant 3$ 时，只有一解．

对于方程 $-x^2+mx-1=-x+3$，即 $x^2-(m+1)x+4=0$，

(1) 当 $\Delta=(m+1)^2-16=0$ 时，$m=3$ 或 $m=-5$.

若 $m=3$，则 $x=2$ 符合题意；

若 $m=-5$，则 $x=-2$ 不符合题意，应舍去．

(2) 当 $\Delta=(m+1)^2-16>0$ 时，令 $f(x)=x^2-(m+1)x+4$，

则由 $f(0)\cdot f(3)<0$，得 $m>\frac{10}{3}$.

综合(1)，(2)，满足题意的 m 应为 $m=3$，或 $m>\frac{10}{3}$.

例 12 已知集合 P 是 $M=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 2000, x\in\mathbf{N}\}$ 的子集，且 P 中任意两个元素的差都不等于 4 也不等于 7，试问 P 中元素最多可以包含多少个？

解 因为 $4+7=11$，所以我们先观察前 11 个正整数：1，2，3，…，10，11，其中最多只有 1，4，6，7，9 这五个数满足题意，即数集 $\{1,4,6,7,9\}$ 中任意两个元素的差都不等于 4 也不等于 7. 我们记 $P_k=\{1+11k,4+11k,6+11k,7+11k,9+11k\}$（$k\in\mathbf{N}$，且 $9+11k\leqslant 2000$），则数集 P_k 也具有同样的性质，于是所有 P_k 的并集中任意两个元素的差也都不等于 4 且不等于 7. 由于 $2000=11\times 181+9$，我们再记 $P=P_0\cup P_1\cup P_2\cup\cdots\cup P_{181}$，则可知 P 中的元素个数是 $5\times 182=910$ 个．

我们再证明满足条件的集合 P 的元素个数不可能多于 910 个．

假设集合 P 中元素个数多于 910 个，则在数组(1，2，…，11)，(12，13，…，22)，(23，24，…，33)，…，(1981，1982，…，1991)，(1992，1993，…，2000)中至少有一组要取六个数，使得所取的六个数两两之差不等于 4 也不等于 7. 不妨考虑数组(1，2，…，11)，将它划分成(1，8)，(2，6)，(3，10)，(5，9)，(4，7，11)共五组，于是至少有一组必须取两个数. 由于前四组显然都不能取两个数，故只能在(4，7，11)中取 4，7 这两个数．这样，在(3，10)，(2，6)，(5，9)中只能分别取 10，2，5，但此时(1，8)中两数都不能取．这就是说取六个数是做不到的．由此可知，满足条件的子集 P 的元素个数最多是 910 个．

例 13 一个以自然数为元素的集合 C. 如果 C 中至少存在两个数，它们的算术平均数仍属于 C，则称 C 为"好集". 证明：在将自然数任意分为两个不相交的子集中，至少有一个子集是好集．

解 设 $A\cap B=\varnothing$，$A\cup B=\mathbf{N}$，且 A 不是好集，

考虑 6，8，10 三个元素，它们不能同属于 A（否则 A 是好集）.

如果 $6\in A$，$8\in A$，因 A 不是好集，所以 $4\notin A$，$7\notin A$，$10\notin A$，即 $4\in B$，$7\in B$，$10\in B$，而 $7=\frac{10+4}{2}$，所以 B 是好集；

如果 $6\in A$，$10\in A$，因 A 不是好集，所以 $2\in B$，$8\in B$，$14\in B$，而 $8=\frac{2+14}{2}$，所以 B 是好集；

如果 $8\in A$，$10\in A$，因 A 不是好集，$6\in B$，$9\in B$，$12\in B$，而 $9=\frac{6+12}{2}$，所以 B 是好集；

（若 6，8，10 中仅有一个属于 A，同上讨论）

若 $6\notin A$，$8\notin A$，$10\notin A\Rightarrow 6\in B$，$8\in B$，$10\in B$，$B$ 是好集．

故所有情况下，若 A 不是好集，B 必是好集．

例 14 设 $n\geqslant 15$，A，B 都是 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的真子集，$A\cap B=\varnothing$，$A\cup B=\{1,2,\cdots,n\}$，证明：A 或 B 中必有两个不同数的和为完全平方数．

证明 用反证法．假设 A，B 两集合均不存在和为平方数的两个元素，不妨设 $1\in A$，则 $3\in B$，$8\in B$，$15\in B$，从而 $6\in A$.

考虑元素 10，若 $10\in A$，则 $10+6=4^2$ 矛盾；若 $10\in B$，则 $10+15=5^2$ 矛盾．所以原命题成立．

例 15 设 $E=\{1,2,3,\cdots,200\}$，$G=\{a_1,a_2,\cdots,a_{100}\}\subset E$，且 G 具有下列两条性质：

(1)对任何 $1\leqslant i<j\leqslant 100$，恒有 $a_i+a_j\neq 201$；

(2) $\sum\limits_{i=1}^{100}a_i=10080$. 试证明，$G$ 中奇数的个数是 4 的倍数，且 G 中所有数字的平方和为一定值．

证明 由条件(1)知 $\sum\limits_{k=1}^{200}k^2=\sum\limits_{i=1}^{100}a_i^2+\sum\limits_{i=1}^{100}(201-a_i)^2=2\sum\limits_{i=1}^{100}a_i^2-402\sum\limits_{i=1}^{100}a_i+201^2\times 100$.

又由条件(2)知 $\sum\limits_{i=1}^{100}a_i=10080$，为常数，故 $2\sum\limits_{i=1}^{100}a_i^2=\sum\limits_{k=1}^{200}k^2+402\sum\limits_{i=1}^{100}a_i-201^2\times 100$ 为常数．