奥博丛书

组合数学

ZUHE SHUXUE

上海教育出版社

奥博丛书

组合数学

ZUHE SHUXUE

上海教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学联赛一试．组合数学／徐士英编著．—上海：
上海教育出版社，2006.7
(奥博丛书)
ISBN 7-5444-0694-6

Ⅰ.高... Ⅱ.徐... Ⅲ.代数课—高中—解题
Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 066183 号

组合数学

徐士英　编著

上海世纪出版股份有限公司
上　海　教　育　出　版　社　出版发行

易文网：www.ewen.cc

(上海永福路 123 号　　邮政编码：200031)

各地新华书店经销　　浙江新华印刷集团淳安印刷厂印刷

开本 850×1156　1/32　印张 6.25

2006 年 7 月第 1 版　　2006 年 7 月第 1 次印刷

印数 1－6,000 本

ISBN 7-5444-0694-6/O·0013　定价：12.00 元

丛书序言

一本武功秘籍!

找到它,勤加练习,就能成为武林高手.

这是金庸等人常写的故事.

这套奥博丛书,其中就有若干本或许可以称为解题秘籍.当然,得到它之后,要成为解题高手,还得注意:

一、勤加练习.因为解题是实践性的技能,只能通过模仿和实践来学到它.

二、循序渐进.孔子说:"欲速则不达."不能操之过急.一个问题或一种方法,彻底弄清楚了,再往下看.切忌囫囵吞枣,食而不化.

三、不要迷信书本."尽信书,则不如无书."作者也有可能出错."乾坤大挪移"第七层心法的一十九句就是"单凭空想而想错了的."其实要成为真正的高手,不能依赖秘籍,而要自创新招.

这套奥博丛书,不只是解题的秘籍,而是以各种不同的视角,或综述,或专题;或讲思想,或谈策略;或提供翔实材料,或介绍背景知识;…….

据了解,奥博丛书原本也并不是一套丛书,它没有宏伟的出书规划,也未能保证其中的每一本都同样精彩,时间,才是考验它们的唯一准则.它不像其他丛书那样,追求在同一时间出齐;而是细水长流,渐渐汇聚成河.除已出的、即出的十余种外,想必还会继续推出新的品种.

开卷有益.相信这套丛书能很好地普及数学知识,增加读者对数学的理解,提高数学的品味(taste),也就是鉴赏能力.祝愿这套丛书能够伴随读者度过一段愉快的时光.

单 墫

2006年3月16日

前　　言

组合数学主要研究一组离散对象满足一定条件的安排，讨论的内容大致有四方面：

1. 存在性：有没有满足条件的安排？

2. 计数：满足条件的安排有多少种？

3. 构造：给出满足条件安排的具体构造.

4. 优化：在众多满足要求的安排中，按一定的标准挑出最优的安排.

对组合数学的研究可以追溯到很早的年代，四千多年前我国古代的“洛书”中就已给出了三阶幻方的解.组合数学的发展与数论及概率计算密切相关，有些问题最初是以数学游戏的形式出现的.近年来由于计算机科学的快速发展，给组合数学的研究和发展增添了丰富的源泉和极大的动力.计算机求解一个问题总要涉及到设计离散数据结构并对其进行运算，评价算法有两个基本标准：时间复杂度（算法所需的运算次数）和空间复杂度（算法所需的存储单元量），组合数学为算法分析和计算复杂性的讨论提供了方法和技巧.

组合数学的解题方法灵活多样，不同于中学数学的常规解法.学生初次涉及组合数学问题，往往有不知从何着手的困惑.解组合问题需要知识，更需要智能，因此组合数学问题也成为数学竞赛的热门试题.

本书以组合数学主要内容为经线，以解题思想为纬线，以具体问题为载体展开讨论，希望大家在求解组合问题的过程中，注意解题方法、积累解题经验、创新解题思路，不断提高解题能力.

由于作者水平有限，书中难免存在缺点和错误，诚恳希望广大读者批评指正.

徐士英

2005 年国庆于杭州

目　录

第一章　组合数学中的存在性问题

一、抽 屉 原 理

抽屉原理是一件简单明了的事实：$n+1$ 个物品放入 n 个抽屉中，则至少有一个抽屉，其中有两个或更多的物品.

一般地：m 个物品放入 n 个抽屉中，则至少有一个抽屉的物品不少于 l 个，

其中
$$l=\begin{cases}\dfrac{m}{n}, & n\mid m;\\ \left[\dfrac{m}{n}\right]+1, & n\nmid m.\end{cases}$$

证明：$n\mid m$，若结论不真，每个抽屉中物品至多有 $\dfrac{m}{n}-1$ 个，n 个抽屉中物品

总数$\leqslant n\left(\dfrac{m}{n}-1\right)=m-n<m$ 个，矛盾.

$n\nmid m$，若否，n 个抽屉中物品总数$\leqslant n\cdot\left[\dfrac{m}{n}\right]<n\dfrac{m}{n}=m$，也得矛盾.

抽屉原理还有其他变式，列举几种如下：

① 无穷多个物品放入有限个抽屉中，则至少有一个抽屉中有无穷多个物品.

② m 个物品放入 n 个抽屉中，则至少有一个抽屉中的物品不多于 l 个，其中
$$l=\begin{cases}\dfrac{m}{n}, & n\mid m;\\ \left[\dfrac{m}{n}\right], & n\nmid m.\end{cases}$$

③ n 个实数的和 $s=x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n$，则 $\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}x_i\leqslant\dfrac{s}{n}$，$\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}x_i\geqslant\dfrac{s}{n}$.

④ 设 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 都是正整数，如果把 $q_1+q_2+\cdots+q_n-n+1$ 个物品放入 n 个抽屉中，则或者第 1 个抽屉至少有 q_1 个物品，或者第 2 个抽屉至少有 q_2 个物品，……，或者第 n 个抽屉中至少有 q_n 个物品，即至少有一个 i，第 i 个抽屉中至少有 q_i 个物品.

抽屉原理道理简单明白，它是解决组合数学存在性问题的有力武器，运用抽屉原理关键在于根据讨论的问题选好"抽屉"和"物品"，下面我们举例说明.

例 1.1.1 单位圆内任意投放六点，求证至少有两点距离不大于 1.

分析：单位圆分成六个圆心角为 60°的扇形，这些扇形中若某个扇形含有两点，此两点距离必不大于 1. 但本题仅有六点，投放到六个扇形（抽屉）中，未必能保证某一扇形必有两点，故不能对六点和六个扇形直接应用抽屉原理. 注意到若有一点在两相邻扇形的公共半径上，如果此两扇形中另有一点，即可得到有两点距离不大于 1；若没有其他点在此两相邻扇形中呢？此时另五点必在另四个扇形内. 也可运用抽屉原理证得结论.

解：取六点中一点 A，若 A 为单位圆的圆心 O，结论显然成立.

若 A 不是圆心 O，则如图 1－1 将单位圆划分成六个中心角为 60°的扇形，若阴影部分内尚有六点中另一点，则结论成立. 若阴影部分内没有六点中除 A 外的点，则另五点（物品）在其余四个扇形（抽屉）中，由抽屉原理，必有某个扇形（抽屉）含有至少两个点（物品），故结论也成立.

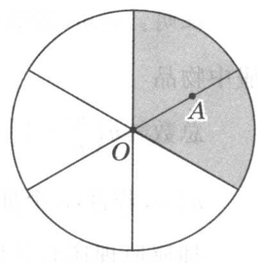

图 1－1

例 1.1.2 对正 2 005 边形的顶点两染色，求证至少有 101 个同色等腰三角形，它们彼此全等且颜色全同.

分析：先讨论正五边形，正五边形五顶点两染色，至少有一个同色等腰三角形，正 2 005 边形含有 401 个无公共顶点的正五边形，故可得到 401 个同色等腰三角形，用抽屉原理证明可在其中挑出至少 101 个，它们彼此全等且同色.

解：先讨论正五边形，正五边形五顶点两染色，由抽屉原理，必有

三点同色即必有一个同色三角形.而正五边形任两顶点间连线只有两种长度(边和对角线),三角形三条边(物品)只有两种长度(抽屉),再用抽屉原理,知必有二边等长,所以此同色三角形必为同色等腰三角形.

正 2 005 边形含有 401 个无公共顶点的正五边形,所以至少有 401 个同色等腰三角形,三角形颜色只有两种,故至少有 201 个等腰三角形颜色全同,而正五边形所含三角形只有两种:二边一对角线和二对角线一边,再用抽屉原理,至少有 101 个同色等腰三角形,彼此全等且颜色全同.

引申与思考:

1. 对圆周上的点任意两染色,求证必有无穷多个等腰三角形,它们彼此全等且颜色全同.

2. 对圆周上的点任意两染色,若讨论同色等边三角形,结论如何?

例 1.1.3 将平面上的每个点以红蓝两色之一染色,求证必存在两个相似三角形,它们的相似比为 2 005,并且每个三角形的三顶点同色.

分析 1:作两个半径为 1 和 2 005 的同心圆,并过圆心作若干条射线,由于小圆上五点染色必有三点同色,如在大圆上对应的五点已经同色,则即可得到两个同色相似三角形.

解法 1:作同心圆,内圆半径为 1,外圆半径为 2 005,过同心圆圆心作九条射线,与两圆相交于 A_i 和 $A'_i(i=1,2,3,\cdots,9)$.

外圆上九点 $A'_i(i=1,2,3,\cdots,9)$ 两染色,必有五点 $A'_{i_1},A'_{i_2},A'_{i_3},A'_{i_4},A'_{i_5}$ 同色;

小圆上对应五点 $A_{i_1},A_{i_2},A_{i_3},A_{i_4},A_{i_5}$ 两染色,必有三点同色.

不妨设$\triangle A_{i_1}A_{i_2}A_{i_3}$为同色三角形,则$\triangle A_{i_1}A_{i_2}A_{i_3}$与$\triangle A'_{i_1}A'_{i_2}A'_{i_3}$为两个同色相似三角形,相似比为 2 005.

分析 2:如对任何 $a\in\mathbf{R}^+$,证明必有边长为 $a,\frac{a}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}a$ 的同色三角形,则结论成立.

解法 2:先证对任何 $a\in\mathbf{R}^+$,有长为 a 的线段两端点同色.

作边长为 a 的等边三角形,三顶点两染色,由抽屉原理必有二点同色.

以边长为 a 两端点同色(设为红)的线段为直径作一圆,如图 1—2,再在此圆上取 A,B,C,D 四点,使其与线段两端点构成圆周上的六等分点.

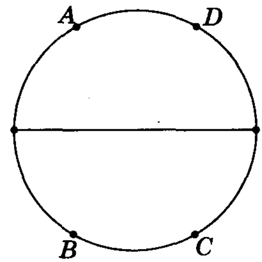

图 1—2

若 A,B,C,D 中有一红点,则结论成立;

若 A,B,C,D 中无红点,则$\triangle ABC$ 为满足条件的蓝三角形,结论也成立.

也可用反证法证明,若此类同色三角形不存在,由于任意边长的同色线段存在,设 AB 为长为$\frac{\sqrt{3}}{2}a$ 的同色(设为红)线段,则如图 1—3,C,D 为蓝色,E 为红色,F 为蓝色,G 为红色,从而$\triangle ABG$ 为边长是 $a,\frac{a}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}a$ 的红色三角形,矛盾.

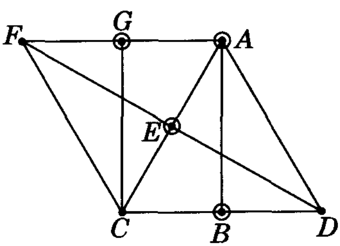

图 1—3

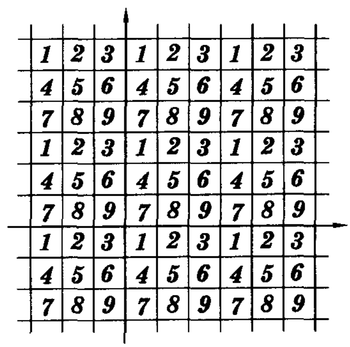

图 1—4

例 1.1.4　平面上任给 2 005 个点,其中任两点距离均大于$\sqrt{2}$,求证必有 223 个点彼此之间距离都不小于 2.

分析:平面坐标方格网中,每个方格中任两点距离不大于$\sqrt{2}$,故 2 005个点在每个方格中至多含一点.因 $2\,005=222\times 9+7$,如能做成合适的九个抽屉,即其中至少有一抽屉含有 223 个点.

解:将平面按图 1—4 分成九个抽屉,i 号小方格全体为第 i 个抽屉,$(i=1,2,\cdots,9)$.2 005 个点分放在九个抽屉中,至少有一个抽屉含

有 223 个点，由于 2 005 个点中任两点距离均大于$\sqrt{2}$，所以此 223 个点距离均大于$\sqrt{2}$，它们中没有两点属于同一小方格，而同号方格又不在同一方格中的任两点距离都不小于 2.

例 1.1.5 设 $S=\{1,2,\cdots,2\,005\}$，A 为 S 的 15 元子集，求证 A 必有两个不交的子集，每个子集中各数之和相等.

分析：本题牵涉到 A 的子集以及子集中各数之和两个讨论对象，分别讨论它们有多少种. 15 元子集 A 的子集共 2^{15} 个，不空真子集共 $2^{15}-2=32\,766$ 个，真子集中各数之和 S 满足

$$1\leqslant S\leqslant 1\,992+1\,993+\cdots+2\,005=27\,979,$$

子集中各数和的种数不超过 27 979，将 32 766 个子集放入 27 979 类和（抽屉）中，至少有一类和中含有两个子集，即有 $B\subseteq A$，$C\subseteq A$，B 与 C 中各数和相等. 若 $B\cap C=\varnothing$，则结论成立；若 $B\cap C\neq\varnothing$，则以 $B\setminus(B\cap C)$，$C\setminus(B\cap C)$代替 B，C，结论亦成立.

例 1.1.6 对于整数 $n\geqslant 4$，求出最小的整数 $f(n)$，使得对于任何正整数 m，集合$\{m,m+1,\cdots,m+n-1\}$的任一个 $f(n)$元子集中，均有至少 3 个两两互素的元素.

分析：考察 $T_n=\{t;t\leqslant n+1,2|t$ 或 $3|t\}$，则 T_n 为$\{2,3,\cdots,n+1\}$的子集，T_n 中任三个元素不能两两互素，所以 $f(n)\geqslant|T_n|+1=\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n+1}{3}\right]-\left[\frac{n+1}{6}\right]+1$，能否证明 $f(n)=\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n+1}{3}\right]-\left[\frac{n+1}{6}\right]+1$?

解：先求 $f(4)$，$f(5)$，$f(6)$.

$n=4$：$\{m,m+1,m+2,m+3\}$，取其中二偶一奇的三元子集，此三数不能两两互素，故 $f(4)>3$. 而$\{m,m+1,m+2,m+3\}$中取二奇一偶三数必两两互素，故 $f(4)=4$.

$n=5$：$\{m,m+1,m+2,m+3,m+4\}$，如 m 偶，m，$m+2$，$m+4$ 三数均偶，则四元子集$\{m,m+1,m+2,m+4\}$中任三数不能两两互素，故 $f(5)>4$.

五元全集中可取到两两互素的三个数，故 $f(5)=5$.

$n=6$：$\{m,m+1,m+2,m+3,m+4,m+5\}$中有三奇三偶，若取三偶一奇的四元子集，则无三数两两互素，故 $f(6)>4$.

考察五元子集，若五元中有三个奇数，则此三数必两两互素；若五元中三偶二奇，由于三个偶数中至多只有一个被 3 整除，至多只有一个被 5 整除，所以三个偶数中必有一个不被 3 整除也不被 5 整除，此数与其他两个奇数两两互素，故 $f(6)=5$.

再证 $f(n)=\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n+1}{3}\right]-\left[\frac{n+1}{6}\right]+1$.

设 $n=6k+r,k\geqslant 1,r=0,1,2,3,4,5$.

$$\begin{aligned}&\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n+1}{3}\right]-\left[\frac{n+1}{6}\right]+1\\&=3k+\left[\frac{r+1}{2}\right]+2k+\left[\frac{r+1}{3}\right]-k-\left[\frac{r+1}{6}\right]+1\\&=4k+\left[\frac{r+1}{2}\right]+\left[\frac{r+1}{3}\right]-\left[\frac{r+1}{6}\right]+1,\end{aligned}$$

易核验$\left[\frac{r+1}{2}\right]+\left[\frac{r+1}{3}\right]-\left[\frac{r+1}{6}\right]=\begin{cases}r & (r=0,1,2,3);\\ r-1 & (r=4,5).\end{cases}$

（ⅰ）$r=0,1,2,3$ 时，将 $n=6k+r$ 个数按$\{m,m+1,\cdots,m+5\}$，$\{m+6,m+7,\cdots,m+11\}$，$\cdots$，$\{m+6(k-1),m+6k-5,\cdots,m+6k-1\}$分成 k 组（k 个抽屉），并余下 r 个数，$m+6k,m+6k+1,\cdots,m+6k+r-1$.

$\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n+1}{3}\right]-\left[\frac{n+1}{6}\right]+1=4k+r+1$ 个数至少有 $4k+1$ 个数分在 k 个抽屉中，至少有一个抽屉中有 5 个数，由于 $f(6)=5$，故必有三数两两互素.

（ⅱ）$r=4,5$ 时，将 $n=6k+r$ 个数按$\{m,m+1,\cdots,m+5\}$，$\cdots$，$\{m+6(k-1),m+6k-5,\cdots,m+6k-1\}$分成 k 组，并余下 r 个数，$m+6k,m+6k+1,\cdots,m+6k+r-1$. 若 $4k+r$ 个数全取余下的 r 个数，则由于 $f(4)=4,f(5)=5$，知其中必有三数两两互素.

若 $4k+r$ 个数不全取余下 r 个数，则至少有 $4k+1$ 个数取自 k 组，由抽屉原理，至少有一组含有五个数，由于 $f(6)=5$，必有三数两两互素.

讨论：若用数学归纳法证明

$$f(n)=\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n+1}{3}\right]-\left[\frac{n+1}{6}\right]+1,$$

设等式对 n 成立，对 $n+6$，由于

$$\begin{aligned}f(n+6)&\geqslant\left[\frac{n+7}{2}\right]+\left[\frac{n+7}{3}\right]-\left[\frac{n+7}{6}\right]+1\\&=\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n+1}{3}\right]-\left[\frac{n+1}{6}\right]+1+4,\end{aligned}$$

要证等号成立，由 $\{m,m+1,\cdots,m+n+5\}=\{m,m+1,\cdots,m+n-1\}\cup\{m+n,m+n+1,\cdots,m+n+5\}$.

$\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n+1}{3}\right]-\left[\frac{n+1}{6}\right]+1+4$ 个数中，若至少有 5 个取自 $\{m+n,m+n+1,\cdots,m+n+5\}$，则由 $f(6)=5$，必有三数两两互素.

若至少有 $\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n+1}{3}\right]-\left[\frac{n+1}{6}\right]+1$ 个数取自 $\{m,m+1,\cdots,m+n-1\}$，则由归纳法假定，也必有三数两两互素.

故 $f(n+6)=\left[\frac{n+7}{2}\right]+\left[\frac{n+7}{3}\right]-\left[\frac{n+7}{6}\right]+1$.

上述归纳法采用大跨步，n 真 $\Rightarrow n+6$ 真，故必须有多起点成立，除 $f(4),f(5),f(6)$ 外，还须验证 $f(7),f(8),f(9)$ 也成立.

二、极 端 原 理

利用讨论“极端”对象来实现问题解决的解题方法称为用极端原理解题，常用的极端原理基于下述简单的事实：

Ⅰ）由实数组成的有限集合，必有一个最大数，也有一个最小数.

Ⅱ）由自然数组成的任何非空集合中，必有一个最小的自然数.

为了肯定或否定组合数学问题的存在性，极端原理有着重大的作用. 考察极端情况，讨论极端对象，无形中给问题的讨论增加了一个条件，所以更有利于问题的解决；用反证法时，讨论极端情况，使矛盾更容易暴露.

例 1.2.1 对平面上不全共线的 n 个点，求证必存在一条恰好通过两点的直线.

分析：考察 n 个点的连线 l，及连线外的点 p 到 l 的距离 $d(p,l)$，由于 (p,l) 共有限个，必有 p 和 l 使 $d(p,l)$ 最小者. 考察使 $d(p,l)$ 最小的 l，证明 l 恰好通过 n 点中 2 点.

解：对 n 个点中的任两点作连线 l，并取连线外的点 p（必存在），考察 p 到 l 的距离 $d(p,l)$，由于点为有限个，连线 l 为有限条，组合 (p,l) 也只能有有限个，用极端原理设 $d(p,l)$ 为最小.

下面证明，l 恰通过 n 点中 2 点：

过点 p 作 l 的垂线，设垂足为 A.

若 l 上至少有 n 点中的 3 点，则至少有 2 点在 A 的同侧，设 B，C 在 A 的同侧，且 $AB<AC$，则 $d(B,PC)<d(p,l)$，矛盾.

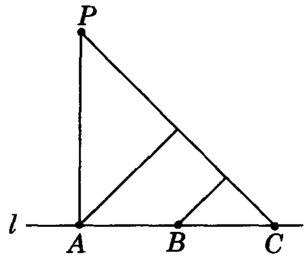

图 1－5

例 1.2.2 n 个点它们之间至少有 $\left[\frac{n^2}{4}\right]+1$ 条连线，则至少有一个三角形.

分析：只需证明 n 个点间有若干条连线，若不存在三角形，则连线至多有 $\left[\frac{n^2}{4}\right]$ 条. 在连线最多的点处考察.

解：设 n 个点为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，不妨设从 A_1 引出的连线最多，共有 k 条，适当调整下标，可认为是 $A_1A_n, A_1A_{n-1}, \cdots, A_1A_{n-k+1}$. 由于不存在三角形，则 $A_{n-k+1}, A_{n-k+2}, \cdots, A_n$ 之间没有连线，从而任何一条连线至少有一个端点是 $A_1, A_2, \cdots, A_{n-k}$ 中的点，故连线总数 $\leqslant \sum\limits_{i=1}^{n-k} d(A_i) \leqslant k(n-k) \leqslant \left(\frac{n}{2}\right)^2$. 连线条数为正整数，故连线总数 $\leqslant \left[\frac{n^2}{4}\right]$.

例 1.2.3 一组砝码具有如下性质：

(1) 其中有 5 个砝码的质量各不相同；

(2) 对于任何 2 个砝码，都可以找到另外 2 个砝码，它们质量之和相等.

问这组砝码至少有多少个？

分析：考察最重的砝码和最轻的砝码.

解：设 A 是其中最重的砝码，B 是次重的砝码，则质量组 $\{A,B\}$ 的质量之和只能与质量分别与它们相等的两个砝码的质量之和相等. 因

此至少有两组这样的砝码. 又砝码$\{A,A\}$的质量之和又只能与质量分别与它们相等的两个砝码的质量之和相等,因此最重的砝码至少有4个,次重的砝码至少有2个.

同理最轻的砝码至少有4个,次轻的砝码至少有2个,因为有5个质量不同的砝码,至少还有另一种质量的砝码,所以砝码个数至少有$4+4+2+2+1=13$个.

另一方面,质量分别为$\{1,1,1,1,2,2,3,4,4,5,5,5,5\}$的13个砝码满足题给条件.

例 1.2.4 已知正整数a和b,使得$ab+1\mid a^2+b^2$,求证$\dfrac{a^2+b^2}{ab+1}$是完全平方数.

证明：设$\dfrac{a^2+b^2}{ab+1}=k$,$ab+1\mid a^2+b^2$,k为正整数.

若k不是完全平方数,我们将导出矛盾.

考虑不定方程 $$a^2-kab+b^2=k. \quad ①$$

此不定方程不能有整数解(a,b,k)使$ab<0$. 否则有$-ab\geqslant 1$,导致$a^2+b^2\leqslant 0$矛盾.

设(a_0,b_0,k)是①的解中适合$a>0,b>0$,且使得$a+b$最小的解,由对称性,不妨设$a_0\geqslant b_0$,固定k与b_0,视①为a的二次方程,它有一根a_0,设它的另一根为a',有$\begin{cases}a_0+a'=kb_0, & ②\\ a_0a'=b_0^2-k. & ③\end{cases}$

由②知a'为整数,由③知$a'\neq 0$,否则$k=b_0^2$,矛盾.

从而(a',b_0,k)必是不定方程①的整数解,应有$a'b_0>0$,故有$a'>0$,$b_0>0$.

又$a'=\dfrac{b_0^2-k}{a_0}\leqslant\dfrac{b_0^2-1}{a_0}\leqslant\dfrac{a_0^2-1}{a_0}<a_0$,可见$(a',b_0,k)$也是①的正整数解,且$a'+b_0<a_0+b_0$,与$a_0+b_0$的最小性矛盾.

例 1.2.5 $n(n>3)$名乒乓球选手单打比赛若干场后,任意两名选手已赛过的对手恰好都不完全相同,求证：总可以从中去掉一名选手,使在余下的选手中,任意两个选手已赛过的对手仍然都不完全相同.

分析：如去掉选手 H，能使余下的选手中，任意两个选手已赛过的对手仍然都不完全相同，我们称 H 为可去选手，设 A 是已赛过的对手最多的选手(极端)，考察 A，证明必存在可去选手.

证明：若不存在可去选手，则 A 不是可去选手，去掉 A 后，至少存在选手 B 和 C，他们赛过的对手完全相同，故 B 和 C 一定没有赛过；B 和 C 中恰有一人(不妨设为 B)与 A 赛过(否则 B 和 C 在未去掉 A 时赛过对手完全相同)，如图 1－6 所示.

同时 C 也不是可去选手，以 C 代替 A，如上述讨论可知有 D 和 E，其中 D 和 C 赛过，E 和 C 未赛过，去掉 C 后，D 和 E 赛过的对手相同.

D 不会是 A，B(因 A，B 与 C 未赛过)，D 与 B 赛过(因 D 和 C 赛过，去掉 A 后，B，C 对手相同)，去掉 C 后，D 和 E 赛过的对手相同，所以 E 与 B 也赛过.

E 和 B 赛过，没有与 C 赛过，E 只能是 A，否则去掉 A 后，B，C 赛过的对手不同. 去掉 C 后，D 和 $E(A)$ 赛过的对手相同，加上 C 后，D 赛过的对手比 $E(A)$ 赛过的对手多 1，与 A 是赛过对手最多的假设矛盾.

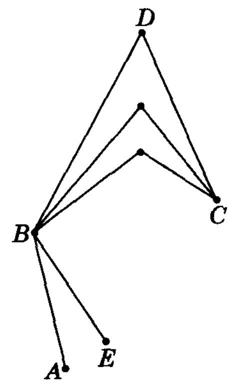

图 1－6

三、构造法和不变性原理

通过直接构作出解答来实现问题的解决称为用构造法解题；对讨论问题分析其变化，找出其中不变的量、不变的关系或不变的性质，抓住变中的“不变”以促使问题的解决称为用不变性原理解题.

对于组合数学的存在性问题，常用构造法给出肯定的答案，而不变性原理常可给出否定的结论. 不变性原理中最简单最实用的是奇偶性分析.

例 1.3.1 有一个凸 n 边形($n \geqslant 4$)所有顶点用红绿蓝三色染色，三种颜色都出现，且任意两相邻顶点不同色，求证可用在 n 边形内不交的对角线将多边形分成 $n-2$ 个三角形，使每个三角形的三顶点都不同色.