

普通高中课程标准实验教科书

数学 选修 4-5

不等式选讲

教师教学用书

人民教育出版社 课程教材研究所 编著
中学数学课程教材研究开发中心



人民教育出版社

A 版

普通高中课程标准实验教科书

数学 选修 4-5

不等式选讲

教师教学用书

人民教育出版社 课程教材研究所 编著
中学数学课程教材研究开发中心



人民教育出版社

A 版

普通高中课程标准实验教科书

数 学

选修 4-5 不等式选讲

A 版

教师教学用书

人民教育出版社 课程教材研究所 编著
中学数学课程教材研究开发中心

*

人民教育出版社 出版发行

网址: <http://www.pep.com.cn>

北京中科印刷有限公司印装 全国新华书店经销

*

开本: 890 毫米 $\times$ 1 240 毫米 1/16 印张: 3.75 字数: 90 000

2005 年 10 月第 1 版 2005 年 12 月第 1 次印刷

ISBN 7-107-19154-3 定价: 4.20 元
G · 12244(课)

著作权所有 · 请勿擅用本书制作各类出版物 · 违者必究

如发现印、装质量问题, 影响阅读, 请与出版科联系调换。

(联系地址: 北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼 邮编: 100081)

主 编：刘绍学

副 主 编：钱珮玲 章建跃

主要编者：俞求是 田载今 章建跃

责任编辑：李龙才

美术编辑：王俊宏 王 艾

封面设计：李宏庆

说明

人教版普通高中课程标准实验教材·数学(A版),是以教科书为基础的系列化教材,包括基本教材和配套教学资源。基本教材是教科书和教师教学用书,配套教学资源包括新课程导学·数学、教学设计与案例、教学投影片、信息技术支持系统等。

人教版《普通高中课程标准实验教科书·数学(A版)》包括教育部制定的《普通高中数学课程标准(实验)》中规定的全部内容。本套教科书在坚持我国数学教育优良传统的前提下,认真处理继承、借鉴、发展、创新之间的关系,体现基础性、时代性、典型性和可接受性等,具有如下特点:

1. “亲和力”:以生动活泼的呈现方式,激发兴趣和美感,引发学习激情。

尽量选取与内容密切相关的、典型的、丰富的和学生熟悉的素材,用生动活泼的语言,创设能够体现数学的概念、结论及其思想方法发生发展过程的学习情境,使学生感到数学是自然的,水到渠成的,激发学生对数学的亲切感,引发学生“看个究竟”的冲动,兴趣盎然地投入学习。

在体现知识归纳概括过程中的数学思想、解决各种问题中数学的力量、数学探究和论证方法的优美和精彩之处、数学的科学和文化价值等地方,将作者的感受用“旁批”等方式呈现,与学生交流,增强了教科书的“亲和力”,启发学生更深入的数学思考,不断引发学习激情。

2. “问题性”:以恰时恰点的问题引导数学活动,培养问题意识,孕育创新精神。

在知识形成过程的“关键点”上,在运用数学思想方法产生解决问题策略的“关节点”上,在数学知识之间联系的“联结点”上,在数学问题变式的“发散点”上,在学生思维的“最近发展区”内,通过“观察”“思考”“探究”等栏目,提出恰当的、对学生数学思维有适度启发的问题,引导学生的思考和探索活动,使他们经历观察、实验、猜测、推理、交流、反思等理性思维的基本过程,切实改进学生的学习方式。

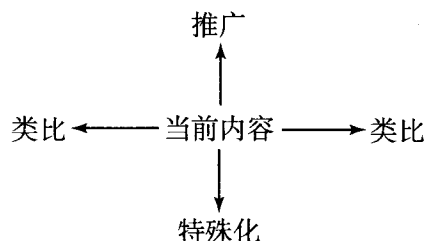
提问是创新的开始。“看过问题三百个,不会解题也会问”,通过恰时恰点地提出问题,提好问题,给学生示范提问的方法,使他们领悟发现和提出问题的艺术,引导他们更加主动、有兴趣地学,富有探索性地学,逐步培养学生的问题意识,孕育创新精神。

3. “思想性”:螺旋上升地安排核心数学概念和重要数学思想,加强数学思想方法的渗透与概括。

以数及其运算、函数、空间观念、数形结合、向量、导数、统计、随机观念、算法等数学核心概念和基本思想为贯穿整套教科书的“灵魂”,体现寻求一般性模式的思想 and 追求简洁与形式完美的精神等,引导学生领悟数学本质,体验数学中的理性精神,加强数学形式下的思考和推理训练,从而提高教科书的“思想性”。

4. “联系性”：通过不同数学内容的联系与启发，强调类比、推广、特殊化、化归等思想方法的运用，学习数学地思考问题的方式，提高数学思维能力，培育理性精神。

利用数学内容的内在联系，使不同的数学内容相互沟通，提高学生对数学的整体认识水平。特别地，在教科书中强调类比、推广、特殊化、化归等思想方法，尽最大可能展示以下常用的逻辑思考方法：



以使学生体会数学探索活动的基本规律，逐步学会借助数学符号和逻辑关系进行数学推理和探究，推求新的事实和论证猜想，从而发展学生认识事物的“数”、“形”属性和规律、处理相应的逻辑关系的悟性和潜能，养成逻辑思维的习惯，能够有条理地、符合逻辑地进行思考、推理、表达与交流。

教科书力求使数学内容的呈现做到脉络清晰，重点突出，体系简约，在学生原有认知结构基础上，依据数学学习规律、相关内容在不同模块中的要求以及数学内在的逻辑联系，以核心知识（基本概念和原理，重要的数学思想方法）为支撑和联结，循序渐进、螺旋上升地组织学习内容，形成结构化的教材体系。

选修系列4的教师教学用书，按照相应的教科书内容顺序编排，包括总体设计、教科书分析、习题解答、教学设计案例、自我检测题、拓展资源等栏目。

1. 总体设计是对整个专题作概括性介绍，重点说明教科书设计思想，包括：课程目标、学习目标、本专题知识结构框图、内容安排说明、课时安排建议等。

(1) 课程目标与学习目标说明学生通过学习本专题内容应达到的要求，表述时关注了目标的可测性；

(2) 本专题知识结构框图展示了本专题的知识结构，以利于教师从整体上把握本专题知识发生、发展的脉络；

(3) 内容安排说明按照教科书内容的编排顺序，说明内容的前后逻辑关系，并对本专题的重点、难点进行说明；

(4) 课时安排建议根据教科书的具体内容提出课时分配的建议，教师可以根据自己的教学实际进行调整。

2. 教科书分析按照教科书内容顺序、以讲为单位进行分析，着重说明了编写意图。主要包括：本讲知识结构、教学重点与难点、编写意图与教学建议等。

(1) 本讲知识结构讲述本讲知识点及其发生、发展过程(逻辑关系),说明学习本讲内容时,涉及的前后相关知识,采用“知识框图”或“表格”的方式表述;

(2) 重点不仅指数学概念、数学结论,而且包括数学思想方法、数学能力等方面的内容;难点说明学生在学习过程中可能遇到的困难和问题;

(3) 编写意图与教学建议主要对教科书“为什么要这样写”进行分析,包括学习相应内容应具备的认知发展基础,如何理解其中的一些关键词句,知识中蕴含的数学思想方法,突破重点、难点的建议,如何激发学生学习兴趣,渗透能力培养,以及数学应用意识、创新意识的培养等;对例题要达到的目的进行说明;对“观察”“思考”“探究”中的内容以及边空中的问题,给出解释或解答.

教学建议主要对教师如何引导学生学习进行分析,从教科书编写者的角度结合具体内容给教师提出一些建议.

3. 教学设计案例选取了一些具有典型性的、教学难度大、新增知识、适宜使用信息技术的内容,包括概念课、研究(探究)课、习题课、复习课等不同课型.具体包括了下面一些内容:

(1) 教学任务分析重点对学习相应内容时的认知要求进行分析;

(2) 教学基本流程以框图的形式表示出教学的基本进程;

(3) 教学重点、难点表述了本课内容的重点,以及学习中可能碰到的困难;

(4) 教学情境设计以“问题串”为主线,在提出问题的同时,说明了设计意图.

4. 习题解答不仅给出解答过程,讲清楚“可以这样解”,而且还对一些典型问题分析了解答中的数学思想方法,说明“为什么可以这样解”,从而体现了习题作为巩固知识,深化概念学习,深刻理解知识,开展研究性学习,应用知识实际问题,培养学生的数学能力、创新精神和实践能力等功能.

5. 拓展资源为教师提供了一些教学中有用的资料,既有知识性的,又有数学历史、数学文化方面的资料.同时,在适当的地方,对数学教学中如何使用科学计算器、计算机、网络等进行说明或解释.

另外,我们专门制作了一套“信息技术支持系统”,教学中有需求的可以从人教网上下载.网址:<http://www.pep.com.cn> 新课标教材·高中·数学.

本书是选修课程数学4-5的教师教学用书,包含不等式和绝对值不等式、证明不等式的基本方法、柯西不等式与排序不等式、数学归纳法证明不等式等四讲内容.全书共18课时,具体分配如下(仅供参考):

第一讲 不等式和绝对值不等式	约5课时
第二讲 证明不等式的基本方法	约4课时
第三讲 柯西不等式与排序不等式	约4课时



第四讲 数学归纳法证明不等式
学习总结报告

约 4 课时
约 1 课时

我们在广泛听取广大教师、教学研究人员意见的基础上，对教师教学用书进行了较大的改进，希望它能够较好地满足广大教师的教学需要。由于是对教师教学用书编写工作的一次新尝试，因此其中肯定存在许多值得改进的地方，希望广大教师在使用过程中提出宝贵意见，我们愿意根据大家的意见作出修正，使其更好地为教师教学服务。

目录

I 总体设计 1

II 教科书分析 3

第一讲 不等式和绝对值不等式 3

(一) 不等式 5

(二) 绝对值不等式 8

第二讲 证明不等式的基本方法 15

(一) 比较法 16

(二) 综合法与分析法 18

(三) 反证法与放缩法 20

第三讲 柯西不等式与排序不等式 28

(一) 二维形式的柯西不等式 29

(二) 一般形式的柯西不等式 31

(三) 排序不等式 32

第四讲 数学归纳法证明不等式 38

(一) 数学归纳法 39

(二) 用数学归纳法证明不等式 40

III 自我检测题 46

IV 拓展资源 48

I 总体设计

一、课程目标与学习目标

1. 课程目标

自然界中存在着大量的不等量关系和等量关系. 不等关系和相等关系是基本的数学关系, 它们在数学研究和数学应用中起着重要的作用.

本专题将介绍一些重要的不等式和它们的证明、数学归纳法和它的简单应用. 本专题特别强调不等式及其证明的几何意义与背景, 以加深学生对这些不等式的数学本质的理解, 提高学生的逻辑思维能力和分析解决问题的能力.

2. 学习目标

(1) 回顾和复习不等式的基本性质和基本不等式.

(2) 理解绝对值的几何意义, 并能利用绝对值不等式的几何意义证明以下不等式:

① $|a+b| \leq |a| + |b|$;

② $|a-b| \leq |a-c| + |c-b|$;

③ 会利用绝对值的几何意义求解以下类型的不等式:

$$|ax+b| \leq c;$$

$$|ax+b| \geq c;$$

$$|x-c| + |x-b| \geq a.$$

(3) 认识柯西不等式的几种不同形式. 理解它们的几何意义.

① 证明柯西不等式的向量形式: $|\alpha| |\beta| \geq |\alpha \cdot \beta|$.

② 证明: $(a^2+b^2)(c^2+d^2) \geq (ac+bd)^2$.

③ 证明:

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} + \sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2} \geq \sqrt{(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2}.$$

(通常称作平面三角不等式).

(4) 用参数配方法讨论柯西不等式的一般情况:

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n b_i^2 \geq (\sum_{i=1}^n a_i b_i)^2.$$

(5) 用向量递归方法讨论排序不等式.

(6) 了解数学归纳法的原理及其使用范围, 会用数学归纳法证明一些简单问题.

(7) 会用数学归纳法证明贝努利不等式:

$$(1+x)^n > 1+nx \quad (x > -1, n \text{ 为正整数}).$$

了解当 n 为实数时贝努利不等式也成立.

(8) 会用上述不等式证明一些简单问题. 能够利用平均值不等式、柯西不等式求一些特定函数的极值.

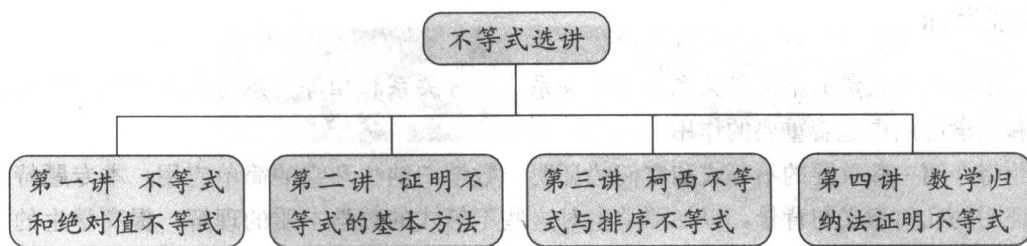
(9) 通过一些简单问题了解证明不等式的基本方法：比较法、综合法、分析法、反证法、放缩法。

(10) 完成一个学习总结报告。报告应包括三方面的内容：① 知识的总结，对本专题介绍的不等式中蕴涵的数学思想方法和数学背景进行总结；② 拓展，通过查阅资料、调查研究、访问求教、独立思考，进一步探讨不等式的应用；③ 对不等式学习的感受、体会。



二、内容安排

1. 本专题知识结构框图



2. 对内容安排的说明

本书共分四讲。

第一讲，“不等式和绝对值不等式”。这是本专题的最基本内容，是其余三讲的基础。本讲的第一部分类比等式的基本性质，先讨论不等式的基本性质，这是关于不等式在运算方面的一些最基本法则。接着讨论基本不等式，并将其推广到一般形式的均值不等式。在介绍基本性质和基本不等式的过程中，强调了用它们解决一些简单问题。第二部分中，类比不等式基本性质得出过程，采用数形结合思想方法，讨论有关绝对值不等式的性质及绝对值不等式的解法。

第二讲，“证明不等式的基本方法”。本讲介绍证明不等式的几种常用方法：比较法、综合法、分析法、反证法和放缩法。其中比较法是证明不等式的最基本方法。教科书结合证明方法的介绍，对相应的数学思想进行及时概括。本讲内容对进一步讨论不等式提供了思想方法的基础。

第三讲，“柯西不等式和排序不等式”。本讲介绍两个经典不等式：柯西不等式和排序不等式，以及它们的简单应用。柯西不等式是基本而重要的不等式，是推证其他许多不等式的基础，有着广泛的应用。教科书首先介绍二维形式的柯西不等式，再从向量的角度来认识柯西不等式，引入向量形式的柯西不等式，再介绍一般形式的柯西不等式。排序不等式也是基本而重要的不等式，一些重要不等式可以看成是排序不等式的特殊情形。

第四讲，“数学归纳法证明不等式”。本讲介绍数学归纳法及其在证明不等式中的应用。教科书首先结合具体例子，提出寻找一种用有限步骤处理无限多个对象的方法的问题。然后，类比多米诺骨牌游戏，引入用数学归纳法证明命题的方法，并分析数学归纳法的基本结构和用它证明命题时应注意的问题（两个步骤缺一不可）。第二部分举例说明用数学归纳法证明不等式。

教科书重视介绍不等式的几何背景，对于重要不等式，教科书一般给出它们的几何解释，力图让学生从几何上去直观地把握，有些不等式则直接从相关的几何问题引入。此外，教科书注意为学生提供适度的探究空间，对于一些重要结论，通过“观察”“思考”“探究”等，引导学生自己探究得出结论。教科书也比较重视用不等式知识解决实际问题，以培养学生应用数学的意识和能力。



三、课时分配

本专题教学时间约需 18 课时，具体分配如下（仅供参考）：

第一讲 不等式和绝对值不等式

一、不等式

约 5 课时

二、绝对值不等式

约 3 课时

第二讲 证明不等式的基本方法

约 2 课时

一、比较法

约 4 课时

二、综合法与分析法

约 1 课时

三、反证法与放缩法

约 2 课时

第三讲 柯西不等式与排序不等式

约 1 课时

一、二维形式的柯西不等式

约 4 课时

二、一般形式的柯西不等式

约 1 课时

三、排序不等式

约 1 课时

第四讲 数学归纳法证明不等式

约 2 课时

一、数学归纳法

约 4 课时

二、用数学归纳法证明不等式

约 2 课时

学习总结报告

约 2 课时

约 1 课时

II 教科书分析

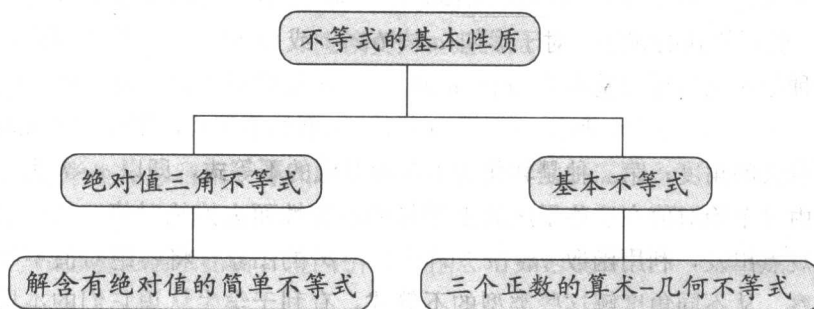
教科书分析

第一讲

不等式和绝对值不等式



一、本讲知识结构





二、教学重点与难点

重点:

1. 不等式的基本性质;
2. 基本不等式及其应用;
3. 绝对值三角不等式.

难点:

1. 三个正数的算术-几何平均不等式及其应用;
2. 绝对值不等式的解法.



三、编写意图与教学建议

本讲的内容是在初中阶段掌握了不等式的基本概念,学会了一元一次不等式、一元一次不等式组的解法,多数学生在学习高中必修课五个模块的基础上展开的.作为一个选修专题,在内容的呈现上保持了相对的完整性.教学中,教师可以根据教学实际掌握内容的深度和广度.

本讲的内容包括不等式的基本性质,基本不等式,绝对值不等式的性质,以及解一些简单的绝对值不等式.

本讲首先复习和回顾了不等式的基本性质和基本不等式,在这个过程中,强调了“如何提出不等式基本性质”的引导,以及用这些知识解决问题时的规范化表述.对于基本不等式,注意引导学生从几何角度进行解释,并把基本不等式推广到三个正数的算术-几何平均不等式.对于一般形式的均值不等式,则只作简单介绍,不给出证明.

本讲的第二部分内容是绝对值不等式.绝对值是与实数有关的一个基本而重要的概念,讨论关于绝对值的不等式具有重要的意义.

关于绝对值的三角不等式是一个基本的结论,教科书首先引导学生借助于实数在数轴上的表示和绝对值的几何意义,通过探究发现并归纳出绝对值三角不等式

$$|a+b| \leq |a| + |b|.$$

接着联系向量形式的三角不等式,得到绝对值三角不等式的几何解释,最后用代数方法给出证明.这样,用数形结合思想,引导学生多角度地研究和认识这个不等式,使学生在建立知识联系的过程中,逐步深化对它的理解.在此基础上,教科书对绝对值三角不等式进行恒等变形,得到了一些有用的绝对值不等式.

教科书引导学生探讨了形如 $|ax+b| \leq c$ 或 $|ax+b| \geq c$ 的不等式以及形如 $|x-a| + |x-b| \geq c$ 或 $|x-a| + |x-b| \leq c$ 的不等式的解法.对于形如 $|ax+b| \leq c$ 或 $|ax+b| \geq c$ 的不等式,教科书介绍了两种求解方法:第一种是转化为更为基本的 $|x| \leq a$ 或 $|x| \geq a$ 型的不等式;第二种是根据绝对值的几何意义求解.对于 $|x-a| + |x-b| \geq c$ 和 $|x-a| + |x-b| \leq c$ 型的不等式,则介绍了几种不同方法:第一种是从绝对值几何意义的角度;第二种是转化为不含绝对值的不等式,即以 a, b 为分界点把实数集分割为几个子区间,由每个绝对值在这些子区间上符号的不变性而去掉绝对值,从而实现转化;第三种方法则是从函数的观点出发,利用函数 $y = |x-a| + |x-b|$ 的图象,将解绝对值不等式问题转化为对函数取值情况的考察.从不同角度解这些类型的不等式,有利于学生认识它们的本质特征,更好地掌握这些不等式的解法,并从中学习解决问题的一般方法和策略.

(一) 不等式

1. 不等式的基本性质

(1) 不等式的基本事实

这部分的内容不多,但是比较重要,是这个专题的基础.

不等式的基本性质的讨论以实数大小关系为出发点,实数大小关系的现实背景则是长短、远近、多少、高矮、重轻……本质上都是顺序关系,可以对应于数轴上点的左右位置关系.数轴表示了实数集,两者建立的一一对应关系,沟通了数与形之间的关系,这是非常重要的一个联系.实数的大小关系表现在数轴上就是实数所对应的点在数轴上的左右位置关系(顺序关系).此外,为了便利地进行实数之间的大小比较,又要摆脱这种完全依赖于数轴上点的位置关系的判断,所以,关于实数的大小,借助于运算的基本事实:

$$a > b \Leftrightarrow a - b > 0;$$

$$a = b \Leftrightarrow a - b = 0;$$

$$a < b \Leftrightarrow a - b < 0.$$

实际上,借助于上述基本事实研究不等式,其基本思想是将个别的、互不相同的实数大小比较问题,转化为统一的与0的大小比较问题(即判断两个实数差的符号),正如教科书指出的“0为实数比较大小的提供了‘标杆’”.这一思想简单但非常重要,是不等式证明和解不等式的主要依据,因此在教学中应该予以重视.

由于判断两个实数 a 与 b 的大小归结为判断它们的差 $a-b$ 的符号(注意,这里只关注差的符号,至于差究竟是多少则是无关紧要的),因此,如果设 $a-b=m$,而 m 又是可以表示为某些实数的运算的结果,那么要确定 m 的符号,必然要归结到实数的运算符号法则,因此在不等式中,实数运算的符号法则是一个很重要的基础知识,也是得出不等式基本性质的依据.

(2) 不等式的基本性质

不等式的研究要借助于不等式的基本性质.教科书通过“探究”(第3页),引导学生类比等式的基本性质,得出不等式的基本性质.教学中可以先让学生思考等式的基本性质的内容及其得出过程(实际上是研究作加法、乘法等运算时等式是否仍然成立),然后再引导学生思考如何研究不等式的基本性质,并猜想有哪些不等式的基本性质.这里,对研究方法的指导是重要的,这不仅可以使学生知道不等式基本性质的内容,而且还可以使他们知道这些基本性质是怎么来的.

在给出六条基本性质后,可以从几个角度对它们进行思维的“深加工”.例如,将数学符号语言转化为日常语言,使之形象化,有利于理解和记忆;或者选取其中若干条基本性质作证明,这对不等式的基本事实和实数的运算法则的应用和巩固起到一定的复习作用,也为以后学习不等式的证明作了准备;与等式的基本性质作比较,讨论它们的异同,从而认识它们的联系与区别,实际上,其中最重要的是不等式两边同乘一个负数时,不等号应该变向,这就是教科书指出的“符号问题”,也是学生容易出现错误的一个问题.

(3) 例2的教学建议

例2的目的是让学生熟悉利用不等式的基本事实和基本性质证明不等式的基本方法.

由于学生在以往的学习中对不等式的证明接触较少,因此本例的教学应当强调推理的严谨性和书写格式的规范性.在分析证明思路时,应当引导学生思考如何应用基本事实和基本性质.事实上,由要证的不等式,联系性质(6),说明需要先证明 $\frac{a}{d} > \frac{b}{c} > 0$;结合本例前面的“ $a > b > 0, c > d > 0$,那么 $ac > bd$ ”,说明需要先证明 $\frac{1}{d} > \frac{1}{c} > 0$;在证明过程中又要用到性质(2)(4)等.教学中可以在引

导分析的基础上,先让学生自己写出证明过程,然后再查漏补缺,完善证明过程,以培养学生思维的严谨性和规范化书写证明过程的习惯.

本例中,中间结果“如果 $c > d > 0$, 那么 $\frac{1}{d} > \frac{1}{c} > 0$ ”也是非常有用的.

2. 基本不等式

(1) 基本不等式及其教学建议

教科书首先以定理的形式引入关于实数的一个非常重要的不等式: $a^2 + b^2 \geq 2ab$. 在给出证明的基础上,还引导学生对它进行几何解释. 前面已经指出,不等式研究实数的大小关系,实数与数轴上的点一一对应,在此基础上,教科书进一步提出“把实数 a, b 作为线段的长度”,就可以对定理作出一个几何解释. 学生可能对 a, b 的取值范围有疑虑,教学时可以对此作适当解释(长度、面积总是非负的). 另外,还可以让学生自己尝试给出其他形式的几何解释.

以上述不等式为工具,教科书证明了关于两个正数的均值不等式——基本不等式,并给出了基本不等式的一个几何解释.

教学中要注意以下几点:

① $a^2 + b^2 \geq 2ab$ 和 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 成立的条件是不同的,前者只要求 a, b 是实数,而后者则要求 a, b 是正数;

② 这两个不等式都是带有等号的不等式,要注意等号成立的条件;

③ 教科书分别用数学符号语言、日常语言和图形语言表述基本不等式,这有利于学生理解基本不等式.

另外,之所以把 $\sqrt{ab}$ 叫做 a, b 这两个正数的几何平均,可以从教科书给出的基本不等式的几何意义中得到解释. 教学中还可以让学生给出一些其他解释,例如圆中直径不小于弦长,等等.

(2) 例题的教学建议.

例3是一个典型的问题,得到的结论在实际中有广泛的应用,应该要求学生掌握本例中得到的结论. 本例的证明并不困难,只要将日常语言表述的命题转化为数学符号语言,立即可以看到它与基本不等式之间的内在联系,事实上这也是基本不等式的一个几何背景. 本例的关键是要引导学生对“在所有周长相同的矩形中,正方形的面积最大;在所有面积相同的矩形中,正方形的周长最短”这一结论进行深入剖析:首先,题中涉及的都是“正数”;其次,涉及两个“定值”;再次,都是在“相等”的极端情况下取得“最值”. 可以简述为“一正、二定、三相等”,这是具有一般意义的.

例4是一个利用基本不等式解决的极值问题. 要解决函数极值问题,要先写出函数的解析式,然后判断是否可以借助于均值不等式去解决. 利用基本不等式可以解决许多类似的极值问题. 虽然微分学的方法对于极值问题具有一般的可行性和有效性,但是,借助于均值不等式解决某些特殊类型的极值问题仍有其独到之处,因为证明均值不等式需要的基础知识非常少,对于中学生相对简明易懂.

教学中可以先让学生分析总造价 S 的构成成分,以及它们与 AD 长 x 之间的关系,再让学生自己写出函数解析式并给出解答.

3. 三个正数的算术-几何平均不等式

(1) 关于定理3及其证明

把基本不等式作推广,首先就要推广到关于三个正数的算术-几何平均不等式.

教科书借助“思考”引导学生探究将基本不等式推广到三个正数的情形. 这里,定理3的猜想和证明都类比了基本不等式的推出过程.

在证明“对于 $a, b, c \in \mathbf{R}_+$, 则 $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$, 当且仅当 $a=b=c$ 时, 等号成立”时, 需要用“立方和公式”的变形, 并要灵活应用“和的立方公式”, 这是学生不熟悉的, 其中对代数变换能力要求也较高, 教学时要注意精心引导. 教科书实际上先证明了恒等式

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca),$$

然后利用它证明 $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$. 由于 $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$ 的符号并非一目了然, 因此要把它进一步变形为 $\frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$.

对于一般形式的均值不等式, 教科书直接给出结论:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \cdots a_n} \quad (a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbf{R}_+),$$

当且仅当 $a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_n$ 时, 等号成立. 教学中应让学生知道这个基本而重要的数学事实, 但不必对学生提出证明的要求. 历史上许多著名数学家都曾对一般形式的均值不等式进行研究, 得到许多证明方法, 拓展资源中给出了一个比较简单的证法.

(2) 关于例题的教学建议

例 5 是三个正数的均值不等式的一个简单变形, 可以由学生独立完成. 同时可以向学生说明, 这种变形是有用的, 就像前面对立方和公式的变形一样.

例 6 是一个非常典型的、常见的关于三个正数的均值不等式的应用题. 本题的关键是要对体积表达式进行变形:

$$(a-2x)^2 x = \frac{1}{4}(a-2x)(a-2x) \times 4x,$$

而这一变形实际上是事先考虑了前面提到过的关于用均值不等式求“最值”时所强调的“一正、二定、三相等”. 这里有一定的技巧性, 但它是建立在对均值不等式的全面、正确理解的基础上的. 为了引起学生对“一正、二定、三相等”的注意, 可以先让学生独立完成本题的求解, 再对解答中出现的错误予以纠正, 在纠正错误的过程中强化理解.

以下例题可以供教学参考.

例 求证: 在表面积一定的长方体中, 以正方体的体积最大.

证明: 设长方体的三条相交于同一顶点的棱长分别为 x, y, z , 则长方体的体积为

$$V = xyz,$$

表面积为

$$A = 2xy + 2yz + 2zx.$$

根据均值不等式,

$$A = 2xy + 2yz + 2zx \geq 6 \sqrt[3]{(xyz)^2},$$

这里 A 是定值, 即 $A \geq 6 \sqrt[3]{V^2}$, 从而

$$V \leq \sqrt{\left(\frac{A}{6}\right)^3},$$

当且仅当 $xy = yz = zx$, 即 $x = y = z$ 时, 等号成立. 所以, 当长方体是正方体时, 体积取得最大值, 最大值是 $\sqrt{\left(\frac{A}{6}\right)^3}$.

例 求函数 $y = x^2(1-3x)$ 在 $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ 上的最大值.

解: 先将函数式变形为

$$y = x^2(1-3x) = \frac{3}{2} \left[x \cdot x \cdot \left(\frac{2}{3} - 2x \right) \right].$$

因 $x \in [0, \frac{1}{3}]$, 故 $x \geq 0$, $\frac{2}{3} - 2x \geq 0$, 所以

$$y = \frac{3}{2} \left[x \cdot x \cdot \left(\frac{2}{3} - 2x \right) \right] \leq \frac{3}{2} \left[\frac{x+x+\left(\frac{2}{3}-2x\right)}{3} \right]^3 = \frac{3}{2} \left(\frac{2}{9} \right)^3 = \frac{4}{243},$$

当且仅当 $x = \frac{2}{9}$ 时取得最大值, 最大值是 $\frac{4}{243}$.

(二) 绝对值不等式

本节首先研究绝对值三角不等式, 再讨论了一些典型的绝对值不等式解法.

1. 绝对值三角不等式

(1) 绝对值三角不等式的探究

研究绝对值不等式的基础是实数绝对值和两个实数的差的绝对值的几何意义, 正如教科书指出的, 可以把“距离大小”作为解决绝对值不等式的基本出发点.

教科书利用“思考”向学生提出猜想绝对值不等式性质的任务, 这样做主要是为了解决性质的来源问题, 引导学生学习提出问题的方法. 实际上, 数有了运算才变化无穷、力量无限, 因此从运算的角度考察绝对值不等式是一个非常自然的想法. 关于这一点, 以往的教科书中很少涉及, 希望老师能够给予关注. 从运算的角度看, 最简单的当然是关于两个实数 a, b 的绝对值 $|a|, |b|$ 及其加减运算结果 $|a+b|, |a-b|$ 的大小关系问题, 教科书通过“探究”引导学生利用数轴研究 $|a+b|$ 与 $|a|, |b|$ 之间的关系. 教学中可以先让学生自己在数轴上表示出 $|a+b|, |a|$ 和 $|b|$, 这时自然会出现按照 a, b 的符号分类讨论的需要, 再引导学生分析如何分类才能对 $|a+b|, |a|, |b|$ 三者的关系进行不重不漏的讨论, 最后得出分 $ab > 0, ab < 0, ab = 0$ 三种情况进行讨论的结果: 从数轴上可直观地看到, 当 $ab \geq 0$ 时, $|a+b| = |a| + |b|$; 当 $ab < 0$ 时, $|a+b| < |a| + |b|$, 从而对于任意两个实数 a, b , 都有 $|a+b| \leq |a| + |b|$. 通过这个探究过程, 得到了绝对值三角不等式 $|a+b| \leq |a| + |b|$, 同时这也是该不等式的一种几何证法.

把关于实数的绝对值三角不等式推广到平面上, 就是关于向量的绝对值三角不等式. 关于向量的不等式 $|a+b| \leq |a| + |b|$ 可以看成绝对值三角不等式的一种几何背景. 实际上, 用向量 a, b 替换实数 a, b 时, 问题就从一维扩展到二维. 当向量 a, b 不共线时, $a+b, a, b$ 构成三角形, 有 $|a+b| < |a| + |b|$. 当向量 a, b 共线时, a, b 同向 (相当于 $ab \geq 0$) 时, $|a+b| = |a| + |b|$; a, b 异向 (相当于 $ab < 0$) 时, $|a+b| < |a| + |b|$.

为了使更深刻地认识绝对值三角不等式, 使学生熟悉绝对值不等式的证明方法, 同时也为了数学上的严谨性, 教科书进一步给出了它的代数证明. 这个证明的基本思想是借助于恒等式 $|a| = \sqrt{a^2}$ ($a \in \mathbf{R}$) 和 $|a|^2 = a^2$, 将绝对值问题转化为不含绝对值的问题, 通过“放缩法”达到证明的目的. 其难点是“分类讨论”思想和“放缩法”的应用. 教学中要提醒学生注意这个证明中体现的思想方法.

从上面的介绍可以看到, 教科书先利用数轴引导学生猜想出绝对值三角不等式, 再借助向量知识给出不等式的几何意义, 最后再从代数推理的角度给出严格的证明, 这个过程体现了“联系”的思想, 使学生有机会从多种角度观察、研究同一个问题, 这对理解理解和掌握绝对值三角不等式是非常有利的. 教学中应当有意识地提醒学生注意“联系”的思想, 以使他们逐步养成用联系的观点看待问题的习惯.

关于绝对值的常用不等式, 除了以上最基本的绝对值三角不等式外, 还有另外的几个重要不等式. 为此, 教科书安排了一个“探究”, 让学生自己思考 $|a|, |b|, |a+b|, |a-b|$ 等之间的其他关系. 教