



# 高中数学

中小学新课程教学艺术丛书

GAOZHONG SHUXUE

## 教学与解题艺术

蒋世信 著

JIAOXUE YU JIETI YISHU

中国林业出版社

## “中小学新课程教学艺术丛书”

- 小学心理健康教育案例指导解读
- 初中 100 个困惑和建议
- 中学心理健康教育案例指导解读
- 高中生 100 个困惑和建议
- 语文立体化教学艺术
- 中学生研究性学习操作手册
- 高中数学教学与解题艺术

## “中小学教学艺术丛书”

“中小学教学艺术丛书”是在“九五”国家重点课题“面向 21 世纪我国中小学教师队伍建设研究教师教学艺术研究”成果的基础之上，集全国优秀中小学教师的教学艺术成就著集而成。2003 年 3 月，中国教育学会将该项目“中小学教学艺术”立项为“现代教学艺术研究”“十五”重点课题。

“中小学教学艺术丛书”陆续出版，旨在提高中小学教师的教学艺术水平，促进全面实施素质教育，是中小学教师培训的理想教材和参考书。

### 课堂教学

小学语文备课艺术  
小学数学备课艺术  
语言艺术  
口语交际艺术  
说课艺术  
开讲艺术  
板书艺术  
掀起课堂小高潮艺术  
激发学习兴趣艺术  
课堂组织艺术  
课堂调控艺术  
课堂提问艺术  
结尾艺术  
小学语文课堂教学艺术  
小学数学课堂教学艺术  
小学英语课堂教学艺术  
小学思想品德课堂教学艺术  
小学科学课堂教学艺术  
小学艺术课堂教学艺术  
初中语文课堂教学艺术  
初中数学课堂教学艺术  
初中英语课堂教学艺术

### 理论研究

中小学教学艺术实用全书  
中国当代著名教学流派  
——刘显国反馈教学法研究  
教改教研艺术  
反馈教学艺术  
学法指导艺术  
语文德育渗透艺术  
活动课教学设计艺术  
多媒体设计运用艺术  
教法选择艺术  
评课艺术  
心理健康教育艺术  
家庭语文教育艺术

### 能力培养

培养能力艺术  
语文练习设计艺术  
小学数学练习设计艺术  
复习备考艺术  
小学数学解题训练艺术 I  
小学数学解题训练艺术 II  
小学作文训练艺术  
初中数学解题训练艺术  
初中物理解题训练艺术  
初中化学解题训练艺术  
初中作文训练艺术  
小学语文课堂活动课教学百例  
小学数学课堂活动课教学百例  
奥数之星创新思维训练艺术(小学一年级)  
奥数之星创新思维训练艺术(小学二年级)  
奥数之星创新思维训练艺术(小学三年级)  
奥数之星创新思维训练艺术(小学四年级)  
奥数之星创新思维训练艺术(小学五年级)  
奥数之星创新思维训练艺术(小学六年级)  
奥数之星创新思维综合训练艺术

责任编辑：刘开运 何蕊 程建秀

封面设计：夏季林风工作室

ISBN 7-5038-4147-8



9 787503 841477 >

ISBN 7-5038-4147-8

定价：25.00 元

中小学新课程教学艺术丛书

# 高中数学教学与解题艺术

蒋世信 著

中国林业出版社

## 图书在版编目 (CIP) 数据

高中数学教学与解题艺术/蒋世信著. - 北京: 中国林业出版社, 2006.1  
(中小学新课程教学艺术丛书)  
ISBN 7-5038-4147-8

I. 高... II. 蒋... III. 数学课-教学法-高中 IV. G633.602

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2005) 第 130211 号

出版: 中国林业出版社 (100009 北京西城区刘海胡同7号)

E-mail: cfphz@public.bta.net.cn 电话: 010-66174569

发行: 新华书店北京发行所

印刷: 北京展望印刷厂

版次: 2006年1月第1版

印次: 2006年1月第1次

开本: 880mm × 1230mm 1/32

印张: 11.75

字数: 324千字

印数: 3000册

定价: 25.00元

## 作者简介

蒋世信 1946年4月出生，北京市人，高级教师，中共党员。1969年毕业于北京师范大学数学系。曾任北京师大燕化附中副校长，现任调研员。

长期从事高中数学教学与研究，倡导建立完整的课堂教学结构，用系统论、信息论、控制论指导教学过程。反对“题海”，注重“三基”与“双突”，强调“过程”及教与学的同步和谐。



从1982年起，先后在中学数学杂志上发表文章50余篇（其中《数学通报》10篇），参编或主编高中数学教学参考资料16册。《数学教学应注意的几个问题》获1989年北京中学数学教学论文一等奖，推荐参加数学研究会华北地区第三届年会；《过程教学的核心是思路教学》获1990年北京中学数学教学论文三等奖；《浅谈概念教学——对周期函数概念的教学体会》获1995年北京中学数学教学论文一等奖，推荐参加全国中学数学教学研究会第七届年会，并获全国优秀论文三等奖；《数学教学要培养学生的创新思维习惯》获2000年北京中学数学教学论文二等奖；《浅谈如何进行数学思想方法的教学》获2003年北京中学数学教学论文二等奖。1997~2004年间先后获中石化北京燕化公司科技年会（均不设一等奖）教学论文二等奖3次，三等奖4次。1991年参加北京国际数学教育会议，《优化学生个性品质是数学教育的主要任务》定为小组发言及会议交流资料。1998年参加在京举办的“数学教育·数学史及数学文化史·信息科学国际会议，”并进行了小组发言。其业绩先后被《中国当代教育名人辞典》、《中国中学骨干教师辞典》、《中国专家大辞典》等十多部辞典收录。

2001年3月被聘为《中国基础教育》（原《北京师范大学附校学报》）特约编辑，2002年8月被聘为西部教育科学研究中心研究员，2004年3月被聘为北京师大附校第一届“海威杯”青年教师课堂教学研讨会数学评委及北师大海威教育集团高中教育教学专家组成员。

教学寄语：教与学是艺术，艺术的生命在于灵活与创新，即教法不能刻板，学法不能僵化。



1995年，本书作者(右)在全国中学数学第七届年会(宁波)，与恩师钟善基先生(中)(数学教育家、中国数学教育研究会理事长、顾问)的合影。

1991年，本书作者(左)在第一届中国石化高三教学研讨会(北京)，与恩师曹才翰先生(中)(数学教育家、中国数学教育研究会副理事长)的合影。



1998年作者参加北京国际数学教育会议。

## 数学教学新思维（代序）

读了蒋先生的《高中数学教学与解题艺术》颇有感受，该书谈不上句句珠玑，但是篇篇有见地、节节有亮点，是作者多年从事高中数学教学实践的心血与结晶。

近年来，在高考指挥棒下的数学教学，深深陷入“题海战术”的深渊，许多数学教师把数学教学简单地理解为“解题教学”：学生只要会解题，教师就算完成教学任务。对此，作者大声疾呼，鲜明地提出要还原数学教学的本来面目：数学教学不仅“传道、授业、解惑”，更蕴涵着厚重的人文精神，对培养和优化人们的综合素质有着不可替代的作用。

教改的关键在哪里？有的专家提出“教材落后论”，他们呼吁教材内容现代化，应当把数学前沿知识下放到中学，让中学生早接触早了解；有的专家提出“教法陈旧论”，特别是多媒体现代教育技术的出现，要使其与教材有机整合，从而完成划时代的教法革命；而作者却大胆地树起“学而优则师”的大旗，提出教改的关键在于全面提高教师的素质，只有品学兼优的人才从事教师职业，才不会误人子弟。名师出高徒，国家应该用优惠政策鼓励和吸引优秀人才从事教育事业。因为，没有良好的教育，就不会有发达的科技，教育是科技发展的基石，“科教兴国”是国家强盛的必由之路。

如何提高数学教学质量？作者倡导用科学方法论——系统论、信息论和控制论指导课堂教学过程，因为课堂教学活动是提高教学质量的关键。为了提高课堂效率，教师一定要精心备课，准确把握重点、难点、思想方法和思维能力等知识结构，注重数学知识、数学思想方法和数学思维的展开过程，在过程中培养学生的数学素养及创新能力，使学生获

得真知，实现有意义学习。

在研究教材的过程中，教师要肯于钻研、善于思考、敢于质疑、见解独到和大胆创新。作者在实践着、探索着。该书的第二部分充分体现了作者深入研究教材和解题艺术的匠心：指出教材中一些数学概念的欠缺，如函数的单调性，双曲线、抛物线的定义等；对教材中一些数学概念认识的深入，如球面上两点间距离定义的合理性，数学归纳法原理的剖析，复数的二元性本质，连续函数单调区间的判定，函数、方程与不等式之间的内在联系等；某些数学方法的巧用，如拆项法求等比数列前 $n$ 项的和及求自然数方幂数列和，运算中的整合，并式方程的应用等；特别是对同一个曲线系方程在二维空间及三维空间上的不同理解与认识，进而导致构造平面解析几何新体系。

以上的方方面面折射出作者不唯书、不唯上，在数学教学上见解独到的创新思维品质。

这是一本值得阅读的高中数学教与学的参考书，正如作者所言：“书中没有豪言也没有壮语，没有卖弄也没有说教。”但是，从中可以体会师生间“一桶水和一杯水”的关系，理解教与学的艺术；也可以明晓“教而不研则庸，研而不教则空”的哲理。当前，科学的数学化、知识的抽象化及生产劳动的智能化日趋明显，中学的数学基础教育如何适应时代的需要更是重点研究的课题。艺术是指富有创造性的方式、方法，让我们努力探求教学艺术，不断提高自身数学教育素质，以己昭昭、使人昭昭，真正成为一名有知识、懂研究、敢创新的数学教师，为国家和民族培养更多更好的建设人才。

解一言

2005年7月13日于北京



# 前 言

有了人类，教育便成为一种永恒的社会现象。而教育的发展水平则是衡量社会进步与文明程度的重要标志。

广义地讲，教育是一切增进人们的知识技能、改变人们的思想和行为的活动；狭义地讲，教育是学校有目的、有计划和有系统地影响学生的一种社会实践。

数学教育是学校各个学科教育中的一个重要分支。随着科学的发展、人类的进步，人们发现数学已经渗透到社会的各个角落，广泛地为社会服务着。“没有数学就不可能理解我们所处的世界（托姆）”，数学和其他科学（无论是自然科学，还是社会科学）之间的渗透空前加强，数学科学已经是技术变化及工业竞争的推动力。国家的振兴、民族的兴旺需要数学科学，需要大批具有较好数学素养的高素质人才。因此，接受良好的数学教育是社会发展的需要，也是人类自身进步的需要。

数学教育决不仅仅是为了升学，更不能狭隘地理解为数学教育就是让学生对数学公式、法则、定义、定理做记忆和练习。数学教育是指导学生如何看待数学，如何理解数学，以及能否运用数学的思维方法去观察分析日常生活、生产和科学实验中的各种现象，去解决日常生活、生产和科学实验中所出现的各种问题；要认识到数学符号是表示、贮存、交流和传递信息的最简练、最科学和最有效的手段；数量关系是刻画或解释自然界以及人类社会现象、预见事物发展规律的重要工具。数学教育不仅包括着数学知识及数学思维能力，还包含着培养人的优良个性品质如坚强的意志、刻苦的精神、实事求是的科学态度及科学的思维方法等等。总之，数学教育具有极其丰富的内涵。

## 2 高中数学教学与解题艺术

如何搞好数学教育？如何提高数学教育质量？不仅是教育部门关注的事情，也是全体国民关注的事情，更是从事数学教育的教育工作者的重任。中国科学院工程院院士徐匡迪说得好：“教育是事业，事业的意义在于献身；教育是科学，科学的价值在于求真；教育是艺术，艺术的生命在于创新。”我想，如果我们每位数学教师都能够把数学教育作为事业去不断追求，作为科学去努力探索，作为艺术去反复锤炼，那么，我国的数学教育必能去掉浮躁，摒弃功利，健康发展，成为知识应用、传播和创新的主阵地，在培养人才和提高全民素质方面发挥重要而不可替代的作用。

教育是生活，是一种由教师与教师、教师与学生、学生与学生共同营造的共同体学习生活。在这种学习生活的氛围中，师与师、师与学生、生与生之间的关系是和谐互动、教学相长的。当然，教与学又各有自己相对的独立性，它们之间也是不能互相替代的，这主要体现在教师的主导和学生的主体作用上。俗话说“名师出高徒”，没有高明且负责的老师的主导，学生的学习生活容易走弯路，难出成绩；又说“师傅领进门，修行在个人”，没有学习的主体——学生自己的勤奋和努力，完全依赖老师的主导，学生也将难以成才。可见，片面强调甚至强化师生中的任何一方，都会导致师生关系失衡，造成难以弥补的学习损失。因此，在数学教育教学中，我们倡导建立完整的课堂教学结构。一方面充分发挥教师的主导作用，用系统论、信息论和控制论指导课堂教学，注重基础知识、基本技能、基本思想和基本理论，突出重点、突破难点，努力揭示或还原数学概念、法则、结论及数学思维的发生发展和运用过程；另一方面充分发挥学生的主体作用，让学生抓住事物的本质，知其然更知其所以然，在过程中使学生逐步提高自己提出问题、分析和解决问题的数学思维能力，学会用数学的思考方式去认识和改造世界，让学生真正掌握数学并使之广泛地服务于社会。

我从事高中数学教育教学已有36年，在这方面既有成功的经验也有失败的教训。成功也好，失败也罢，我想趁着自己身体健康、头脑清

醒的时候，将自己先后发表在《数学通报》、《数学通讯》、《中学数学教与学》、《教学与研究》等数学专业杂志上的关于高中数学教学及解题技巧方面的 50 多篇文章进行修改、补充并整理成书。这里没有豪言也没有壮语，没有卖弄也没有说教，有的仅仅是自己 30 多年来在高中数学教育教学过程中的一些具体的、实实在在的做法与体会，供中学青年数学教师及高中学生借鉴与参考。正如旧货市场上摆着的地摊，虽然不是什么值钱的时髦物品，也许从中能找出您所需要的东西，这将是极大的欣慰；如果是不合时宜的东西，也请您毫无顾及地把它像垃圾一样丢到一旁。这不是自谦，更不是作秀，只是说了点儿心里话。因为时代在前进，教育教学理念也要与时俱进，落后的不科学的教育教学理念是应当淘汰、扬弃并加以更新的。

作 者

2005 年 4 月 29 日

# 目 录

## 数学教学新思维(代序)

### 前言

## 第一部分 高中数学教与学的艺术

- 1 优化学生个性品质是数学教育的重要任务…………… (3)
- 2 如何使学习更有成效…………… (10)
- 3 教改的关键在于提高教师的素质…………… (14)
- 4 用“三论”指导课堂教与学的过程…………… (16)
- 5 如何备教材…………… (25)
- 6 如何听课…………… (47)
- 7 注重知识和思维的发生发展过程…………… (54)
- 8 重视阅读数学课本 培养提高读书能力…………… (81)
- 9 注重数学概念的学习…………… (88)
- 10 注重数学思想方法的学习…………… (99)
- 11 重视课本习题的讲评…………… (109)
- 12 重视培养学生的创新思维能力…………… (118)
- 13 搞好高三数学总复习…………… (131)

## 第二部分 寻规律 深理解 巧解题

- 1 浅析函数  $f(x)$  的对称性…………… (147)
- 2 幂函数的分类…………… (152)

3	偶函数的一个重要性质 .....	(154)
4	某些周期函数的反函数的求法 .....	(157)
5	一节数学阅读课的简要案例 .....	(160)
6	这样证明诱导公式更自然 .....	(162)
7	诱导公式的凝缩 .....	(165)
8	求三角函数解析式应给予必要的限制条件 .....	(167)
9	注重三角公式的变式思维 .....	(170)
10	注意运算中的整合 .....	(173)
11	函数、方程与不等式 .....	(176)
12	利用基本不等式求最值典型错误三例 .....	(182)
13	等比数列前 $n$ 项和公式的四种推导方法 .....	(186)
14	三角形与等差(比)数列 .....	(188)
15	拆项法求数列前 $n$ 项的和 .....	(195)
16	拆项法求自然数方幂数列和 .....	(206)
17	利用“ $\sum_{k=1}^{m+1} C_{n+(k-1)}^n = C_{n+m+1}^{n+1}$ ”求数列的和 .....	(209)
18	求二阶线性递归数列的通项 .....	(211)
19	浅谈数学归纳法原理 .....	(214)
20	如何认识复数 .....	(222)
21	关于 $\omega$ 的应用 .....	(229)
22	浅谈共轭复数的应用 .....	(232)
23	利用比较系数法证明某些组合公式 .....	(238)
24	关于某些组合式的求和 .....	(241)
25	二次方程的根的分布 .....	(245)
26	确定函数单调区间的一点注意 .....	(248)
27	关于“ $S_{射} = S \cdot \cos\alpha$ ”的证明及应用 .....	(252)
28	关于两点间球面距离定义的合理性 .....	(257)
29	用祖暅原理证明球台体积公式 .....	(260)

30	关于曲线方程的独立条件 .....	(263)
31	求曲线方程的常用方法 .....	(268)
32	用点斜式求双曲线切线方程的两点注意 .....	(277)
33	直线方程并式的应用 .....	(279)
34	谈双曲线的六个问题 .....	(282)
35	共焦点圆锥曲线系的方程及应用 .....	(296)
36	某些二次曲线位置关系的判定 .....	(299)
37	谈谈参数方程和极坐标 .....	(304)
38	求极式方程的曲线的交点 .....	(342)
附录 1	对新课程高中《数学》第一册的几点异议 .....	(348)
附录 2	对参数方程定义的异议——兼谈建造高中解几 知识新体系 .....	(353)
附录 3	撰写教学论文的几点体会 .....	(359)

# 第一部分

## 高中数学教与学的艺术





# 1 优化学生个性品质是数学教育的重要任务

在教学过程中,我们常常发现智商不低的学生,其数学成绩平平甚至很糟,究其原因主要不是智力因素,而是缺乏自觉、顽强、认真和自制的优良个性品质,即非智力因素方面。数学教师不仅要注重知识与能力,也要重视对学生个性品质的培养。因为,挖掘潜力发挥智力提高教学质量的一个重要方面是优化学生的个性品质,这是学校教育也是数学教育的重要任务之一。

## (1) 数学教育蕴涵着人格品质的培养

高中数学课程标准指出:“高中数学课程对于认识数学与自然界、数学与人类社会的关系,认识数学的科学价值、文化价值,提高提出问题、分析和解决问题的能力,形成理性思维、发展智力和创新意识具有基础性的作用。……,它为学生的终身发展,形成科学的世界观、价值观奠定基础,对提高全民族素质具有重要意义。”数学教育的目的是使学生形成良好的数学素养,它不仅包括数学知识及数学思维能力,还包括优良的个性品质,即良好的学习动机和浓厚的学习兴趣;坚强的意志和刻苦的精神;实事求是的科学态度及科学的思维方法。美国哲学家弗洛姆指出:“学校教育重要的不是传授知识,而是培养优秀的人格。”优化学生的个性品质应是数学教育研究的一个重要课题。

①动机是激励人去行动以达到一定目的的内在原因,兴趣是人们力求认识某种事物或爱好某种活动的动力。对数学的良好学习动机和浓厚的学习兴趣,有赖于学生对数学学习的社会价值与个人价值的认识;有赖于学生对数学内容的感受、领悟和欣赏;有赖于数学教师的专业水平、教