初等数学研究丛书

数与式

四川人民出版社

初等数学研究丛书

数　与　式

四川省数学会普及工作委员会主编
程　汉　晋　　　　　　　编著

四川人民出版社
一九八四年·成都

初等数学研究丛书《数 与 式》

四川人民出版社出版　　（成都盐道街三号）
四川省新华书店发行　　渡口新华印刷厂印刷

开本 767×1092 毫米 1/32　印张 8.25 字数184千
1984年4月第一版　　1984年4月第一次印刷
印数：1—19,300册

书号：7118·713　　定价：0.72元

前　言

“精简、增加和渗透”是中学数学教学大纲中提出的一条原则。在这原则下，以传统数学为形，现代数学为实，实现中学数学内容的现代化，是当前我们面临的重要课题。四川省数学会普及工作委员会主编了一套“初等数学研究丛书”，邀请了四川师范学院数学系中学数学教研组同志从事编写工作，我觉得很有意义。这对中学数学教师和师范院校学习数学的学生，用现代数学的观点和方法来研究传统数学内容，可供参考。

编好这样的小册子，不是一件很容易的事。这套“初等数学研究丛书”自然还会有一些缺点，我相信在广大教师和学生的帮助下定会使它逐步完善的。

我希望有更多的数学普及小册子问世。

四川省数学会理事长　柯　召

一九八三年一月

目　　次

第一章　自然数与整数

1,1．逻辑符号与集合

1,1,1．逻辑符号

在数学中为了推理的叙述简明，我们常采用下面的逻辑符号．

1．推得的符号

若能由语句 A 导出语句 B，则称 A 是假设，B 是结论，用推得的符号“$\Longrightarrow$”记为

$A\Longrightarrow B$，读为“由 A 推得 B”．

例1　语句 A 为“一个人住在北京”，语句 B 为“他一定住在中国”，则有 $A\Longrightarrow B$．

例2　语句 A 为“$x>1$”，语句 B 为“$x>0$”，则有 $A\Longrightarrow B$．

例3　语句 A 为“$x^2>4$”，语句 B 为“$x>2$”，则有 $A\not\Longrightarrow B$ 表示由 A 不能导出 B（如象 $(-3)^2>4$，但 $-3\not>2$）．

若 $A\Longrightarrow B$，则称 A 是 B 的一个充分条件，或称 B 是 A 的一个必要条件．

在数学中演绎推理的方法，就是使用“推得”的传递性：

$(A\Longrightarrow B$ 与 $B\Longrightarrow C)$ 于是 $(A\Longrightarrow C)$．

例4　（住在$\underset{A}{\text{北京}}$ $\Longrightarrow$ 住在$\underset{B}{\text{中国}}$，住在$\underset{B}{\text{中国}}$ $\Longrightarrow$ 住在$\underset{C}{\text{亚}}$

洲)于是($\underset{A}{\text{住在北京}}\Longrightarrow\underset{C}{\text{住在亚洲}}$).

2. 逻辑等价符号

若 $A\Longrightarrow B$ 与 $B\Longrightarrow A$，则用逻辑等价符号“$\Longleftrightarrow$”记为 $A\Longleftrightarrow B$，读为“A 逻辑等价于B”.

例5　设三角形的三边为 a,b,c 所对的角为 A,B,C.则有 $a=b\Longleftrightarrow A=B$.

当 $A\Longleftrightarrow B$ 时，我们也说：A 是 B 的必充条件，或 B 是 A 的必充条件；或当且仅当 A 成立时 B 成立.

在数学中归谬推理的方法，就是使用：

($A\Longrightarrow B$)逻辑等价于(非 $B\Longrightarrow$ 非 A).

实际上，因当($A\Longrightarrow B$)时若有(非 $B\Longrightarrow A$)，由 $\Longrightarrow$ 的传递性则有(非 $B\Longrightarrow B$)这是不可能的.所以($A\Longrightarrow B$)推得(非 $B\Longrightarrow$ 非 A).

反之，当(非 $B\Longrightarrow$ 非 A)时若有($A\Longrightarrow$ 非 B)，由 $\Longrightarrow$ 的传递性则有($A\Longrightarrow$ 非 A)这是不可能的.所以(非 $B\Longrightarrow$ 非 A)推得($A\Longrightarrow B$).

即是($A\Longrightarrow B$)逻辑等价于(非$B\Longrightarrow$ 非 A).

例6　如例 5 中的表示有：

($a=b\Longrightarrow A=B$)逻辑等价于($A\neq B\Longrightarrow a\neq b$).

1,1,2. **集合**

我们知道集合是一个原始概念，又简称为集，它表示在研究中具有某种特性的相异对象的一个整体.现将在中学数学里学过有关集的知识，使用前节中的逻辑符号简述如下.

1. 包含与相等

（每个 x）：$x\in A\Longrightarrow x\in B$，则称 B 包含 A 或 A 是 B 的子集，记为 $B\supset A$ 或 $A\subset B$。

（每个 x）：$x\in A\Longleftrightarrow x\in B$，则称 A 相等于 B，记为 $A=B$。

显然 $A=B\Longrightarrow A\subset B$ 与 $B\subset A$。

$(A\subset B$ 与 $B\subset A)\Longleftrightarrow A=B$。

（存在 x）：$x\in A\Longrightarrow x\overline{\in}B$，则称 B 不包含 A 或 A 不是 B 的子集，记为 $B\not\supset A$ 或 $A\not\subset B$。

（任何 x）：$x\overline{\in}A$，则称 A 为空集，记为 ϕ。

例1 设 A 是任何集，则有 $\phi\subset A$。

（证） 因为 $(x\in\phi\Longrightarrow x\in A)$ 逻辑等价于 $(x\overline{\in}A\Longrightarrow x\overline{\in}\phi)$。

由于 ϕ 是空集没有任何元素，当然 $x\overline{\in}A\Longrightarrow x\overline{\in}\phi$ 是成立的。所以逻辑等价的 $x\in\phi\Longrightarrow x\in A$ 也应当成立，即是有 $\phi\subset A$。

2．并集、交集与差集

$x\in C\Longleftrightarrow x\in A$ 或 $x\in B$，则称 C 是 A 与 B 的并集，记为 $C=A\cup B$。

注意：这里的 $x\in A$ 或 $x\in B$ 是指：或 $x\in A$，或 $x\in B$，或 x 同时 $\in A$ 与 B。

$x\in C\Longleftrightarrow x\in A$ 与 $x\in B$，则称 C 是 A 与 B 的交集，记为 $C=A\cap B$。

注意：这里 $x\in A$ 与 $x\in B$ 是指：x 同时 $\in A$ 与 B。

$x\in C\Longleftrightarrow x\in A$ 与 $x\overline{\in}B$，则称 C 是 A 与 B 的差集，记为 $C=A-B$。

特别地，若研究的集 $A,B,C,\cdots\cdots$ 都是某一定集 I 的子集，则 I 叫做全集．差集 I $-A$，I $-B$，I $-C$，……分别称为

$A, B, C, \cdots\cdots$ 在 I 中的补集，记为 $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \cdots\cdots$.

例2 由上面的定义即知：

$A\cup\bar{A}=I$，$A\cap\bar{A}=\phi$，$\bar{\bar{A}}=A$.

1,2. 自然数

1,2,1. 自然数公理

自然数是数学中基本概念之一，我们是用两个原始概念"集"与"后继"（即紧跟后面的意思），通过实践中用自然数来数物：一，二，三，四，五，……，抽出其本质的东西形成几条公理，用公理方法定义自然数集，在此基础上来发展扩大为各种数集，这是现代数学中的思想方法。下面我们来定义自然数集。

定义 一个非空集 N，它满足下面的四条公理：

1° $1\in N$，它不后继于 N 的任何元素。

2° 对于 N 的任何元素 a，必有且仅有一个后继元素记为 a'（即 $a=b\Longrightarrow a'=b'$）。

3° N 的元素除 1 外，每个元素必定后继于且仅后继于一个元素（即 $a'=b'\Longrightarrow a=b$）。

4° 设 $M\subset N$ 若 $1\in M$，又每当 $k\in M$ 就有 $k'\in M$，则 $M=N$。

这时集 N 称为自然数集，N 的每个元素称为自然数。

上述的四条公理叫做匹阿罗（*Peano*，1859—1932）公理，公理 1°—3° 说明自然数排列起来是有头无尾，我们用符号记为：

$$1,2,3,4,5,\cdots\cdots,$$

其中 $2=1',3=2',4=3',5=4',\cdots\cdots$.

公理 4° 通常称为归纳原理。

1,2,2. 归纳定理

上面的归纳原理是中学数学里所讲"数学归纳法"的根据，它是使用下面的归纳定理：

定理 设有关于自然数 n 的论断 P(n)，若有：

$$\left.\begin{array}{l}P(1)\text{是正确,}\\ P(k)\text{正确}\Longrightarrow P(k')\text{正确,}\end{array}\right\}\Longrightarrow(\text{每个}n\in N)P(n)\text{正确.}$$

(证) 设论断 $P(n)$ 正确的自然数 n 组成的集为 M，则有 $M\subset N$。

因 $P(1)$ 是正确即 $1\in M$，又因 $P(k)$ 正确 $\Longrightarrow P(k')$ 正确，即每当 $k\in M$ 就有 $k'\in M$。

由公理 4°知 $M=N$，即是(每个 $x\in N$)$P(n)$ 正确。

注： 定理中假设 $P(k)$ 正确 $\Longrightarrow P(k')$ 正确，叫做归纳假定。

1,3,1. 自然数的加法与乘法

1,3,1. 自然数的加法

定义 自然数的加法，由下面两条来定义：

(A_1) 自然数 a 与 1 的和，是 a 的后继数 a'，即是 $a+1=a'$；

(A_2) 自然数 a 与自然数 b 的后继数 b' 的和，是 a 与 b 和的后继数，即是 $a+b'=(a+b)'$。

用这个定义可以求出两个自然数的和。

例 用定义求2+3的和。

(解) 因 $2+1=2'=3$(由A_1)，则 $2+2=2+1'=(2+1)'$(由A_2)$=3'=4$。

故 $2+3=2+2'=(2+2)'$(由A_2)$=4'=5$。

定理1　（加法存在唯一性）　$a+b$是存在唯一的。

（证）先任意取定自然数a，对b进行归纳推理。

当$b=1$时$a+1=a'$，由公理2°知是存在唯一的。

今假定$a+b$存在唯一，则由$(A_2)a+b'=(a+b)'$根据公理2°也是存在唯一的。

根据1，2，2，定理，a与b是任意自然数$a+b$是存在唯一的。

定理2　（加法结合律）设a,b,c是任意的自然数，则有

$$(a+b)+c=a+(b+c).$$

（证）先任意取定自然数a与b，对c进行归纳推理。当$c=1$时：

$$\begin{aligned}(a+b)+1&=(a+b)' &&（加法定义的 A_1）\\&=a+b' &&（加法定义的 A_2）\\&=a+(b+1)\end{aligned}$$

是成立的。

今假定对c成立，再证对c'也成立如下：

$$\begin{aligned}(a+b)+c'&=[(a+b)+c]' &&（加法定义的 A_2）\\&=[a+(b+c)]' &&（归纳假定）\\&=a+(b+c)' &&（加法定义的 A_2）\\&=a+(b+c'), &&（加法定义的 A_2）\end{aligned}$$

即对c'成立。

根据1，2，2定理，a，b，c为任意自然数$(a+b)+c=a+(b+c)$。

定理3　（加法交换律）　设a,b是任意的自然数，则有

$$a+b=b+a.$$

（证）(1)先证$a+1=1+a$成立。

当 $a=1$ 时，$1+1=1+1$ 是成立的.

今假定对 a 成立，再证对 a' 也成立如下：

$$
\begin{aligned}
a'+1 &= (a+1)+1 && \text{(加法定义的 } A_1\text{)} \\
&= (1+a)+1 && \text{(归纳假定)} \\
&= 1+(a+1) && \text{(加法结合律)} \\
&= 1+a', && \text{(加法定义的 } A_1\text{)}
\end{aligned}
$$

即对于 a' 成立.

根据 1,2,2 定理，a 为任意的自然数 $a+1=1+a$.

(2) 再证 $a+b=b+a$ 成立.

先任意取定自然数 a，对 b 进行归纳推理. 当 $b=1$ 时，由(i)知 $a+1=1+a$ 是成立的.

今假定对 b 成立，再证对 b' 也成立如下：

$$
\begin{aligned}
a+b' &= (a+b)' && \text{(加法定义的 } A_2\text{)} \\
&= (b+a)' && \text{(归纳假定)} \\
&= b+a' && \text{(加法定义的 } A_2\text{)} \\
&= b+(a+1) && \text{(加法定义的 } A_1\text{)} \\
&= b+(1+a) && \text{(已证的(i))} \\
&= (b+1)+a && \text{(加法结合律)} \\
&= b'+a, && \text{(加法定义的 } A_1\text{)}
\end{aligned}
$$

即是对 b' 成立.

所以 a,b 为任意的自然数 $a+b=b+a$(1,2,2定理).

1,3,2. 自然数的乘法

定义 自然数的乘法，是由下列两条来定义的.

(M_1) 对任何自然数 a 有 $a\cdot 1=a$;

(M_2) 对任例自然数 a 与 b 有 $ab'=ab+a$.

由这个定义可以求出两个自然数的积.

例 用定义求 $2\cdot 3$ 的积。

(解) 因 $2\cdot 1=2$(由 M_1),则 $2\cdot 2=2\cdot 1'=2\cdot 1+2$(由 M_2) $=2+2=4$.

故 $2\cdot 3=2\cdot 2'=2\cdot 2+2$ (由 M_2)

$=4+2=6$.

定理 1 (乘法存在唯一性) $a\cdot b$ 是存在唯一的.

(证) 与 1,3,1 定理 1 证明相类似.

定理 2 (乘法对加法的分配律) 设 a,b,c 是任意的自然数,则有

$$(a+b)c=ac+bc.$$

(证) 先任意取定自然数 a 与 b,对 c进行归纳推理.

当 $c=1$ 时,由乘法定义的 M_1 有:

$(a+b)\cdot 1=a+b=a\cdot 1+b\cdot 1$ 是成立的.

今假定对 c 成立,再证对 c' 也成立如下:

$$\begin{aligned}
(a+b)c' &= (a+b)c+(a+b) && \text{(乘法定义的 } M_2\text{)}\\
&= ac+bc+(a+b) && \text{(归纳假定)}\\
&= ac+[bc+(a+b)] && \text{(加法结合律)}\\
&= ac+[(bc+a)+b] && \text{(加法结合律)}\\
&= ac+[(a+bc)+b] && \text{(加法交换律)}\\
&= [ac+(a+bc)]+b && \text{(加法结合律)}\\
&= [(ac+a)+bc]+b && \text{(加法结合律)}\\
&= (ac+a)+(bc+b) && \text{(加法结合律)}\\
&= ac'+bc', && \text{(乘法定义的 } M_2\text{)}
\end{aligned}$$

即是对于 c' 成立.

所以a,b,c为任意的自然数$(a+b)c=ac+bc$(1,2,2定理).

定理3 (乘法交换律) 设 a 与 b 是任意的自然数,则有

$$ab = ba.$$

（证）与证明加法交换律完全类似.

（推论）乘法对加法的分配律：

$c(a+b)=ca+cb$，也成立.

（证）$c(a+b)=(a+b)c$ （乘法交换律）

$=ac+bc$ （乘法对加法分配律）

$=ca+cb$ （交法交换律）

注：前面定理 2 的分配律叫做右分配律，这个分配律叫做左分配律.

定理4 （乘法结合律） 设 a,b,c 是任意的自然数，则有

$$(ab)c=a(bc).$$

（证）先任意取定自然数 a 与 b，对 c 进行归纳推理

当 $c=1$ 时，$(ab)\cdot 1=ab$ （乘法定义的 M_1）

$=a(b\cdot 1)$ （乘法定义的 M_1）

是成立的.

今假定对 c 成立，再证对 c' 也成立如下：

$(ab)c'=(ab)c+ab$ （乘法定义的 M_2）

$=a(bc)+ab$ （归纳假定）

$=a(bc+b)$ （左分配律）

$=a(bc')$， （乘法定义的 M_2）

即是对于 c' 成立.

所以 a,b,c 为任意的自然数 $(ab)c=a(bc)$.

1,4. 自然数的顺序

1,4,1. 自然数的顺序的定义与性质

定义 设 a 与 b 是两个自然数，若存在自然数 k 使 $a=b+$

k，则叫做a大于b记为$a>b$，或叫做b小于a记为$b<a$。

（推论1） $a'>a$。

（证） 因$a'=a+1$，故$a'>a$。

（推论2） 由推论1即知：

$$1<2,2<3,3<4,\cdots\cdots,n<n+1,\cdots\cdots.$$

定理1 （传递性） 设a,b,c是自然数，由：

$$a>b \text{ 与 } b>c \Longrightarrow a>c.$$

（证） 因$a>b$与$b>c$，则由定义知存在自然数k与l使$a=b+k$ 与 $b=c+l$，

故 $a=(b+l)+k=c+(l+k)$。（加法结合律）

由于$l+k$仍是自然数，所以$a>c$。

（推论1） 上面定理又可写为：$c<b$ 与 $b<a \Longrightarrow c<a$。

（推论2） 由大小的传递性，自然数的大小关系（即顺序关系）为：

$$1<2<3<4<\cdots\cdots<n<n+1<\cdots\cdots.$$

例 设a与b是任意的自然数，证明$a=a+b$不成立。

（证） 先任意取定自然数b，对a进行归纳推理。当$a=1$时，$1=1+b=b+1=b'$ 由公理1°知是不成立。

今假定对于a时$a=a+b$不成立，再证对于a'时$a'=a'+b$也不成立如下：

不然的话如果$a'=a'+b$成立，则有

$$a'=a'+b=b+a' \quad \text{（加法交换律）}$$
$$=(b+a)', \quad \text{（加法定义的}A_2\text{）}$$

由公理3得$a=b+a=a+b$成立，这与归纳假定矛盾，所以$a'=a'+b$不成立。

$\therefore$ a与b为任意的自然数$a=a+b$不成立。

定理2 （三岐性） 设 a 与 b 是任意的自然数，则 $a=b$，$a>b$，$a<b$ 三者必有一且仅有一成立.

（证）（1） 先证三者必有一成立.

取定任意的自然数 a，对 b 进行归纳推理.

当 $b=1$ 时，若 $a=1$，则 $a=b$ 成立；若 $a\neq 1$，命 $a=k'=k+1=1+k=b+k$，则 $a>b$ 成立.

今假定对于 b 三者必有一成立，再证对于 b' 也三者必有一成立如下：

(i) 若 $a=b$ 成立. 因 $b'=b+1=a+1$，则 $a<b'$ 成立.

(ii) 若 $a>b$ 成立. 有 $a=b+k$，如 $k=1$ 时 $a=b+1$，则 $a=b'$ 成立；如 $k\neq 1$，命 $k=m'$，得 $a=b+m'=b+(m+1)=b+(1+m)=(b+1)+m=b'+m$，则 $a>b'$ 成立.

(iii) 若 $a<b$ 成立. 有 $b=a+l$，得 $b'=(a+l)'=a+l'$ 则 $a<b'$ 成立.

由(i)—(iii)知对于 b' 也三者必有一成立，即是 a 与 b 为任意的自然数三者必有一成立.

(2) 再证三者仅有一成立.

因 $\quad a=b,\quad a>b,\quad a<b;$

即有 $\quad a=b,\quad a=b+k,\quad b=a+l.$

由前面例知：上面的第一与第二不能同时成立，第一与第三也不能同时成立.

今若第二与第三同时成立，则有

$$a=b+k=(a+l)+k=a+(l+k).$$

由于 $l+k$ 是自然数，由例知不成立. 所以三者仅有一成立.

至此，我们知道 1,4,1 定义的大小关系，它具有三岐性与传递性，即是一种"顺序关系". 现在进一步研究这种顺