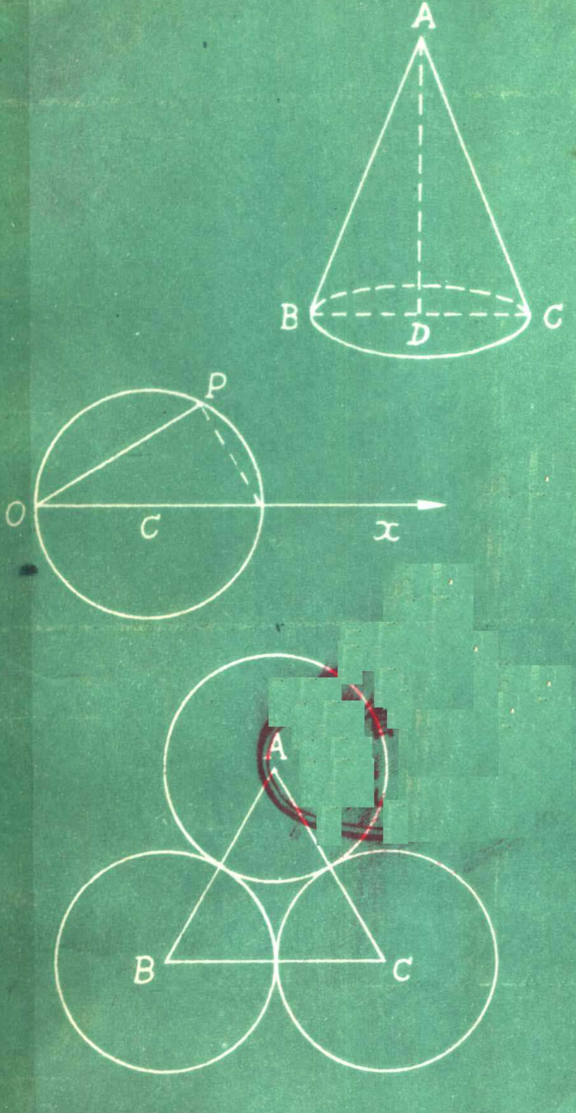


几何证题术

冀光第

山西人民出版社

几何证题术

（平面部分）

冀光第　编

山西人民出版社

几何证题术

冀光第 编

*

山西人民出版社出版 (太原并州路七号)

山西省新华书店发行　山西省七二五厂印刷

*

开本：787×1092 1/32 印张：$17\frac{5}{8}$ 字数：379千字

1960年3月第1版 1980年10月第1次印刷

印数：1—127,000册

*

书号：7038·860 定价：1.34元

前　言

平面几何是中学数学的一部分，证明题又是几何中的核心内容。为了使中学生和知识青年们在已有几何知识的基础上，再将逻辑推理和逻辑表达能力引深一步，特根据历年高考、日常教学和一些几何爱好者提出的问题，编写了《几何证题术》这本小册子。

根据几何论证的不同要求，分为二十二节编写，搜集了六百多道以供练习的例题，且每题都作了简要的略证，给以思路提示，希望阅读时按照逻辑要求详细完善地再作一遍，以期收到触类旁通之效。

这里是把每种类型的例题尽可能地搜集在一起，例如“两线段相等的证法”一节中，把直线形内的、圆内的和比例相似形内的线段相等问题都搜集在这一节内，并把解决这种类型问题所引用的方法也归纳在一起，以便于分析和证明。这样，将有助于同学们在原有的基础上正确地总结方法、掌握方法，达到熟练与提高证题技巧的目的。

本册亦可供中学老师在几何教学中作为参考。

在编写中，承蒙张尚德、张根明二同志参与了部分工作，特在此致以谢意，同时，感谢山西省数学学会和社会上几何爱好者的热诚关心与大力支持，促使此册编写完成。

由于本人水平有限，编写不够完善，存在的缺点错误一定不少，欢迎批评指正。

目　　录

第一节　两线段相等的证法

证明这类问题，常引用下列方法或定理：

1　证其为全等三角形的对应边，若无现成的全等三角形以它们为对应边，必须添设补助线造成全等三角形。

2　证其为等腰三角形的两腰，有时也需要添设补助线造成等腰三角形。

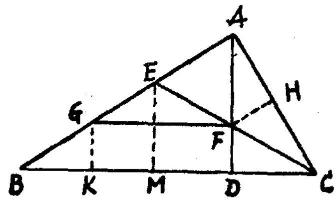
3　证其为平行四边形的一双对边，有时也需要添设补助线造成平行四边形。

4　证其为到等圆（或同圆）圆心距离相等的两弦。

5　证其为等圆（或同圆）中等弧、等中心角或等圆周角所对的弦。

6　证其都与第三线段相等。

(1)在△ABC中，∠A＝90°、AD⊥BC于D，∠C的平分线交AB、AD于E、F，由F引平行于BC的直线交AB于G。则AE＝BG。



（图1）

【证1】在△ACE和△DCF中，

∠A＝∠D＝90°、∠ACE＝∠DCF。

则　∠AEC＝∠DFC＝∠AFE，于是AE＝AF。

由　　G引$GK\perp BC$于K，

则　　GKDF为一矩形，于是$GK=FD$。

由　　F引$FH\perp AC$于H，

因　　CFE为$\angle C$的平分线，

则　　$FH=FD=GK$，

因　　$\angle B=\angle FAH$(即$\angle DAC$)、$\angle K=\angle H=90°$，

则　　$\triangle GBK\cong\triangle FAH$　于是$BG=AF=AE$。

【证2】由E引$EM\perp BC$于M，则$EM=EA=AF$，

在$\triangle EBM$和$\triangle AGF$中，$EM=AF$、$\angle B=\angle AGF$、

$\angle EMB=\angle AFG=90°$，

则　　$\triangle EBM\cong\triangle AGF$　$BE=AG$

于是　$BG=AE$。

【证3】过F作$FH\parallel AB$交BC于H，

则　　BHFG为平行四边形，

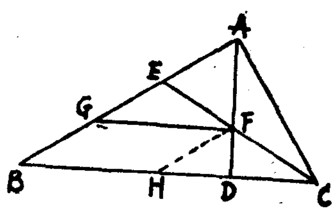
于是　$FH\perp\!\!\!\perp BG$，$\angle FHC=\angle B=\angle FAC$。

在　　$\triangle HFC$和$\triangle AFC$中，

$\angle ACF=\angle HCF$、$CF=CF$、$\angle CAF=\angle CHF$，

则 $\triangle HFC\cong\triangle AFC$，$HF=AF$，

于是　$BG=AE$。



（图2）

（2）在四边形ABCD的外方，以两对边AB、CD为底作正$\triangle ABE$和正$\triangle CDF$，又以BC为底在形内作正$\triangle BCG$，则$GE=$对角线AC、$GF=$对角线BD。

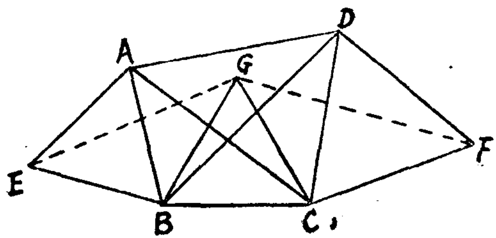
【证】在$\triangle GBE$和$\triangle CBA$中，

$$GB = CB、EB = AB$$

$$\begin{aligned}\angle GBE &= \angle GBA + \angle ABE = \angle GBA + 60^\circ \\ &= \angle GBA + \angle CBG \\ &= \angle CBA,\end{aligned}$$

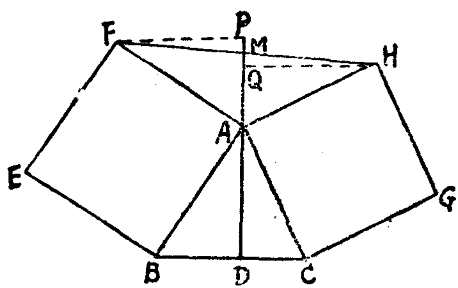
则　$\triangle GBE \cong \triangle CBA$，于是$GE = CA$。

仿之可证：$GF = BD$。



（图3）

（3）若在$\triangle ABC$的外边作正方形ABEF和ACGH，由A引$AD \perp BC$于D。则DA的延长线必将线段FH平分于M。



（图4）

【证1】由F、H引FP、HQ⊥DA于P、Q，

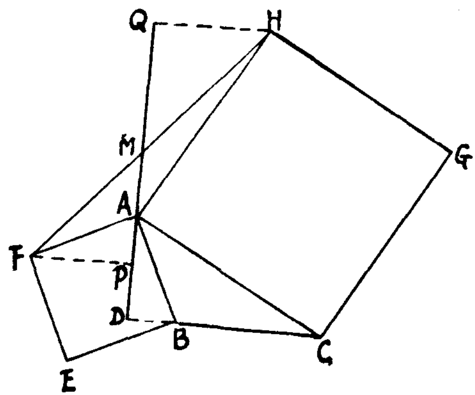
在　　△FPA与△ADB中，

　　　AF＝BA，∠P＝∠D＝90°

　　　∠FAP和∠ABD都是∠BAD的余角，

因此　∠FAP＝∠ABD，

则　　△FPA≌△ADB，所以FP＝AD。



（图5）

仿之可证：HQ＝AD。于是FP⊥HQ，故FM＝HM。

【证2】过H引平行于AF的直线交DA的延长线于Q，

则　　∠FAH与∠AHQ互为补角，

但　　∠FAH与∠BAC互为补角，

于是　∠AHQ＝∠BAC。

因　　∠CAD与∠HAQ互为余角，

　　　∠CAD与∠C互为余角，

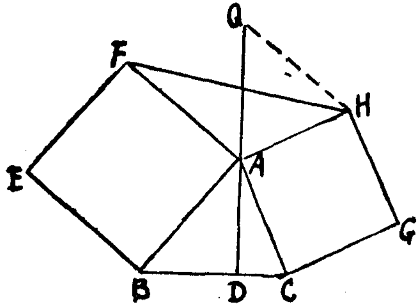
于是　∠HAQ＝∠C。

因　　AH＝AC，

故　　$\triangle AHQ \cong \triangle CAB$，于是$HQ = AB = AF$。

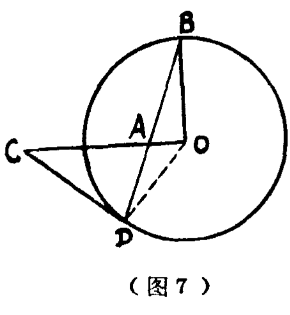
因　　$HQ \underline{\parallel} AF$，则$AHQF$为一平行四边形，

于是　AQ平分FH，即DA的延长线平分FH。

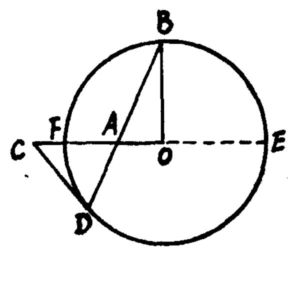


（图6）

（4）A为⊙O内一点，半径$OB \perp OA$，延长BA交⊙O于D，过D引⊙O的切线交OA于C，则$CA = CD$。



（图7）



（图8）

【证1】连接OD，

因　　$\angle OBD = \angle ODB$，$\angle AOB = \angle ODC = 90°$，

　　　$\angle CAD = \angle OAB$是$\angle OBD$的余角，

$\angle CDA$是$\angle ODB$的余角，

故　$\angle CAD=\angle CDA$，于是$CA=CD$。

证2　设CO与$\odot O$交于F、E两点，

因　$OB\perp EF$，则$\overset{\frown}{BE}=\overset{\frown}{FB}$。

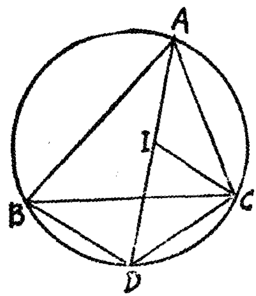
因　$\angle CDB$的度数$=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{DF}+\overset{\frown}{FB})$的度数，

$\angle CAD$的度数$=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{DF}+\overset{\frown}{BE})$的度数，

但　$\frac{1}{2}(\overset{\frown}{DF}+\overset{\frown}{FB})=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{DF}+\overset{\frown}{BE})$，

则　$\angle CDA=\angle CAD$，于是$CD=CA$。

（5）I为$\triangle ABC$的内心，AI的延长线与$\odot ABC$交于D。求证：$DI=DB=DC$。



（图9）

【证】因I为$\triangle ABC$内心，

则　AID为$\angle A$平分线，

于是　$\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{DC}$，

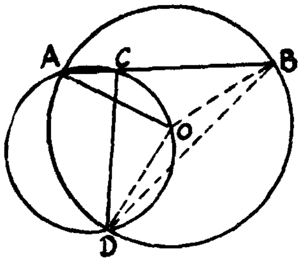
所以　$BD=DC$。

因　$\angle DIC=\frac{1}{2}\angle A+\frac{1}{2}\angle C$、

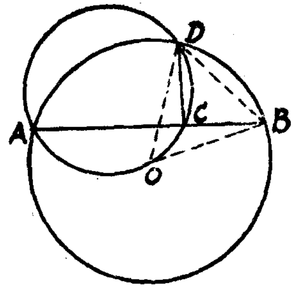
$\angle DCI=\frac{1}{2}\angle A+\frac{1}{2}\angle C$，

则$\angle DIC=\angle DCI$，于是$DC=DI$。故$DI=DB=DC$。

（6）AB为⊙O的弦，过A、O两点任作一圆交AB于C，交⊙O于D，求证$BC=CD$。



（图10）



（图11）

【证1】连接OB、OD、BD，

因　$\angle ODB=\angle OBD$，$\angle ODC=\angle OAB=\angle OBA$，

则　$\angle ODB\pm\angle ODC=\angle OBD\pm\angle OBA$，

（减号适用于图11）

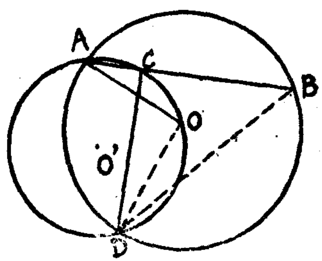
即　$\angle CDB=\angle CBD$，

所以　$CD=CB$。

【证2】连接OD、BD，设过O、A之圆的圆心为O′，

在⊙O′中，$\angle ACD=\angle AOD$，

在⊙O中，$\angle AOD$



（图12）

$= 2\angle B,$

则 $\angle ACD = 2\angle B,$

因 $\angle ACD = \angle B + \angle CDB$。

故 $\angle B = \angle CDB$，于是$CD = CB$。

【证3】连接OC、OD、OB、AD，

则 $\angle B = \angle OAB$。

在 $\odot O'$中，

$\angle OAB = \angle ODC,$

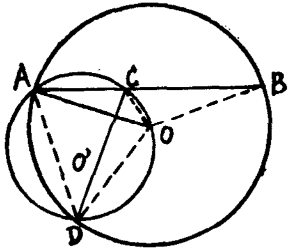
则 $\angle B = \angle ODC$。

因 $\angle BCO$是四边形ACOD的外角，

则 $\angle BCO = \angle ODA$。

在 $\odot O$中，

$\angle ODA = \angle OAD,$



（图13）

又在 $\odot O'$中，$\angle OAD = \angle OCD,$

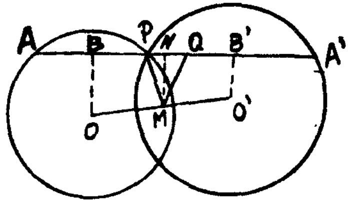
于是 $\angle OCD = \angle OCB$。

在 $\triangle ODC$和$\triangle OBC$中，

$\angle OCD = \angle OCB$、$\angle B = \angle ODC$、$OD = OB,$

则 $\triangle ODC \cong \triangle OBC$，于是$CD = CB$。

（7）$\odot O$与$\odot O'$交于P点，M为OO'的中点。过P点任作直线交两圆于A、A′，令Q点为AA′之中点，则$MP = MQ$。



（图14）

【证】由O、O′、

M引OB、$O'B'$、$MN\perp APA'$于B、B'、N,

则　$BN=NB'$。

因　$AQ=QA'$,

但　$AQ=AB+BP+PQ=2BP+PQ$,

$QA'=QB'+B'A'=QB'+PB'$

$=QB'+PQ+QB'=2QB'+PQ$,

则　$BP=QB'$，故$BN-BP=NB'-QB'$,

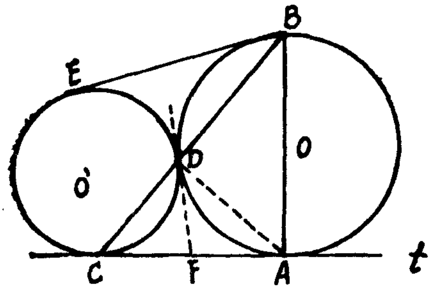
即　$PN=NQ$。

在$\triangle PMN$和$\triangle QMN$中，$\angle MNP=\angle MNQ$

$=90^\circ$、$MN=MN$、$PN=NQ$,

则　$\triangle PMN\cong\triangle QMN$，于是$MP=MQ$。

（8）两圆外切。一外公切线切其中一圆于A，AB为此圆的直径，求证自B至他圆之切线长等于AB。



（图15）

【证】因⊙O、⊙O′外切于D,

外公切线t切⊙O于A、切⊙O′于C,

AB为⊙O的直径,

BE为⊙O′的切线、E为切点。

由D引内公切线DF交t于F,

连接　AD，

则　$\angle ADB=90°$。

因　$AF=FD=CF$，

则　$\angle ADC=\angle A+\angle C=90°$，

于是　$\angle ADC+\angle ADB=180°$，

所以　B、D、C三点共线。

在$\triangle CAB$中，$\angle BAC=90°$，$AD\perp BC$，

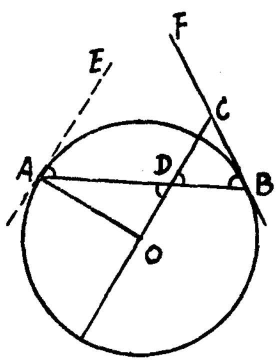
则　$AB^2=BD\cdot BC$。

因　BE为⊙O′之切线，BDC为⊙O′的割线，

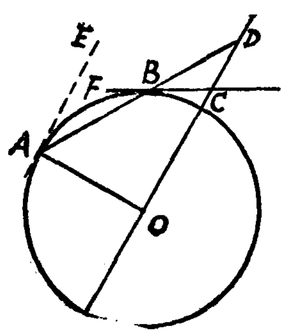
则　$BE^2=BD\cdot BC$，

于是　$AB=BE$。

（9）通过⊙O上任意一点A引弦AB，在B点引⊙O的切线BF，垂直于半径OA的直径分别交切线BF和弦AB于C、D，则CB＝CD。



（图16）



（图17）

【证1】过A引⊙O的切线AE，

则　$AE \perp OA$。

因　$OCD \perp OA$，

则　$AE \parallel OCD$，

于是　$\angle EAD = \angle CDB$。

因　$\angle EAD = \angle CBD$

则　$\angle CDB = \angle CBD$

于是　$CB = CD$。

【证2】连OB，

则　$OB \perp BC$，

因　$\angle CBD$是$\angle DBO$的余角，

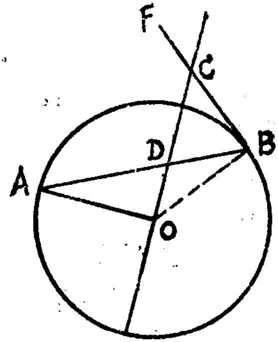
$\angle DBO = \angle A$，

$\angle A$又是$\angle ADO$的余角，

故　$\angle CBD = \angle ADO$

$= \angle CDB$，

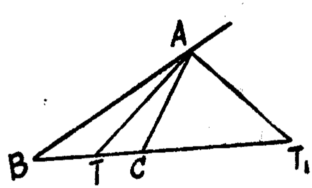
于是　$CB = CD$。



（图18）

（10）在△ABC中，$\angle C - \angle B = 90°$，$\angle A$的内外平分线交BC于T、$T_1$。

则　$AT = AT_1$。



（图19）

【证1】因AT、AT_1为$\angle A$的内外平分线，

则　$AT \perp AT_1$，

即　$\angle TAT_1 = 90°$。

因　$\angle ATC$为$\triangle ABT$的外角，

则　$\angle ATC=\angle B+\frac{1}{2}\angle A$

$$=\frac{1}{2}\angle B+\frac{1}{2}(\angle A+\angle B)$$

$$=\frac{1}{2}\angle B+90^\circ-\frac{1}{2}\angle C$$

$$=90^\circ-\frac{1}{2}(\angle C-\angle B)=45^\circ,$$

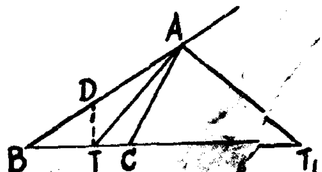
于是　$\angle AT_1T=45^\circ$，

所以　$AT=AT_1$。

【证2】在AB上取$AD=AC$，

连TD，

则　$\triangle ADT\cong\triangle ACT$，



（图20）

于是　$\angle ACT=\angle ADT$。

因　$\angle ADT=\angle B+\angle DTB$、$\angle ACT=\angle B+90^\circ$，

则　$\angle DTB=90^\circ$。

因　$\angle DTA=\angle ATC=45^\circ$、$AT\perp AT_1$

则　$AT=AT_1$。

（11）在$\triangle ABC$中，$\angle B>\angle C$，由C引CD（在$\triangle ABC$外）使$\angle DCB=\angle B-\angle C$，$\angle A$的平分线交BC、DC于T、$T_1$点。求证：$CT=CT_1$。

【证1】因$\angle CTT_1=\angle ATB$，

而　$\angle ATB$为$\triangle ATC$的外角，