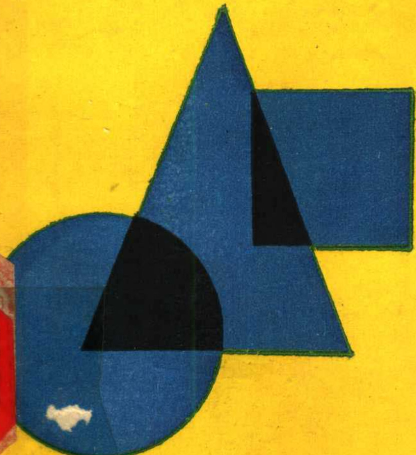
中学数学

解题思路与技巧

黄玉群　王国慎　编著



广 西 民 族 出 版 社

中学数学解题思路与技巧

黄玉群　王国慎　编著

广西民族出版社

中学数学解题思路与技巧

黄玉群　王国慎　编著

☆

广西民族出版社出版
广西新华书店发行
广西南宁星火印刷厂印刷

※

开本787×1092 1／32 印张5.4375 字数 115千字
1990年5月第1版　　1992年6月第2次印刷
印数：7,001—12,500册
ISBN　7—5363—0795—0／G·319　定价：2.30元

前　言

培养学生具有准确、迅速地解题的能力，是中学数学教学的基本任务之一。就目前学生的情况来看，在这方面存在着两个突出问题：①对定义、定理、公式、法则掌握不牢，运用不灵活；②解题时，不善于分析问题、找出关键、寻求简便解法，特别是对于综合题。

要想提高准确、迅速地解题的能力，首先要掌握解题的依据，即数学概念、定义、定理、法则；其次要有良好的解题习惯，掌握有关速算方法与运算技巧。基于此目的，我们编写了本书。

本书主要介绍了解决中学数学问题常用的十种方法，即拆项法、尝试探索法、换元法、平方差公式法、韦达定理法、倒推法、加项为零法、多元方程组的几种类型的特殊解法、一类方程 $af(x)+\frac{b}{f(x)}=ac+\frac{b}{c}$ 的简捷解法等。这些方法，突出思路的分析，技巧的点明，同类问题的不同处理方法，以及应用举例。每个内容之后附有适量的练习，后面附有这些练习的答案。读者可以通过这些例子和练习，学会处理数学问题的各种常用方法，从而对学好数学起到促进和帮助的作用。

本书初稿完成后，承蒙广西计量学校张咸信同志指点、修改，从编排到内容、从字到句，都给予很大的帮助，费了不少的心血。在此表示衷心的感谢。

由于水平所限，书中错漏在所难免，希望读者给予指正。

编著者

1990年元月

目　　录

一 有关速算方法与运算技巧

解数学题离不开数的计算，由此，我们先介绍一些有关数的速算方法与运算技巧。

1．运用运算律来计算

（1） 以凑10的倍数为优先

例：① $38\times85=(40-2)\times85$

$=3400-170$

$=3230$；（分配律）

② $15\times24=30\times\frac{24}{2}=30\times12=360$；

③ $38\times85+38\times15$

$=38(85+15)=3800$；

$7+5-4+6+4-2+8+1$

$=(7+8+5)+(4-4)+(6-2+1)$

$=20+5=25$；（交换律，结合律）

④ $4\times295\times25$

$=295\times(4\times25)$

$=295\times100$

$=29500$；

⑤ $4.32\times74+25\times4.32+4.32$

$=4.32(74+25+1)=432$；（分配律）

⑥ $1125\div25$

$=(1125\times4)\div(25\times4)$

$=4500\div100$

$=45.$

（2） **化整优先**

例：① $\left(\frac{7}{9}-\frac{5}{6}+\frac{3}{4}-\frac{7}{18}\right)\times36$

$=28-30+27-14$

$=11$；（分配律）

② $1.6-5.9-25.8+12.8+7.4$

$=(1.6+7.4)+(-25.8+12.8)-5.9$

$=9-13-5.9$

$=-9.9$；（交换律，结合律）

③ $-4\frac{1}{20}\times1.25\times(-8)$

$=4\frac{1}{20}\times(1.25\times8)$

$=4\frac{1}{20}\times10$

$=(4+\frac{1}{20})\times10$

$=40+\frac{1}{2}$

$=40\frac{1}{2}.$

2. 用$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$来计算

例：① $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})^3$

$=[(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})]\times(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$

$=(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$

$=5-2\sqrt{6}$；

② $1003\times997=(1000+3)(1000-3)$

$=1000^2-9$

$=999991$；

③ $25.6\times24.4=(25+0.6)(25-0.6)$

$=625-0.36$

$=624.64$.

3. 运用$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$来计算

例：① $1115^2-1114^2=(1115+1114)(1115-1114)$

$=2229$；

② $\sqrt{26^2-10^2}=\sqrt{(26+10)(26-10)}$

$=\sqrt{36\times16}=24$；

③ $19.3^2-17.3^2=(19.3+17.3)(19.3-17.3)$

$=36.6\times2=73.2$.

4. 运用$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$来计算

例：① $10017^2=(10000+17)^2$

$=10000^2+340000+289$

$=100340289$；

② $13.3^2=(13+0.3)^2$

$=13^2+2\times13\times0.3+0.09$

$=169+7.8+0.09$

$=176.89$.

5．运用 $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ 来计算

例：① $998^2=(1000-2)^2$

$=1000^2-4000+4$

$=996004$；

② $9.8^2=(10-0.2)^2$

$=100-4+0.04$

$=96.04$.

6．运用 $(a+b)(a+c)=a^2+(b+c)a+bc$ 来计算

例：① $104\times98=(100+4)(100-2)$

$=100^2+(4-2)\times100-8$

$=10192$；

② $15.4\times14.4=(15+0.4)(15-0.6)$

$=15^2+15\times(0.4-0.6)-0.24$

$=225-3-0.24$

$=221.76$.

7．利用对数$\log_a 1=0$，$\log_a a=1$，$\log_{a^n} a=\frac{1}{n}$来计算

例：①$\lg2+\lg5=\lg(2\times5)=1$；

②$\log_{27}3=\log_{3^3}3=\frac{1}{3}$；

③$\log_2(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})+\log_2(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})$

$=\log_2(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})$

$=\log_2[(1+\sqrt{2})^2-3]$

$=\log_2 2\sqrt{2}$

$=\log_2 2^{\frac{3}{2}}$

$=\frac{3}{2}$

8．利用复数的特殊值来计算

在复数的计算中，如能利用$(1\pm i)^{2n}=(\pm2i)^n$，$\left(\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}\right)^3=1$，$\left(\frac{\sqrt{3}\pm i}{2}\right)^3=\pm i$等来计算，将会起到事半功倍的效果。

例：①$(1+\sqrt{3}i)^4=\left(2\times\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^4$

$=2^4\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^3\times\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$

$$= -16 \times \frac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$$

$$= -8 - 8\sqrt{3}\,i\,;$$

② $$\frac{(\sqrt{3}+i)^6}{\sqrt{3}-i} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^6 \cdot 2^6}{(\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}+i)}$$

$$= \frac{2^6}{4} \cdot i^2 = -16.$$

练 习 一

计算：

1. 46×89.
2. 25×56.
3. $36 \times 83 + 43 \times 83 + 21 \times 83$.
4. $124 + 25 + 46 + 36$.
5. $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \times 12$.
6. $43\frac{1}{36} \times 12$.
7. $(\sqrt{7}-\sqrt{5})^2(\sqrt{7}+\sqrt{5})^3$
8. $\left(\sqrt{\frac{7}{3}}+\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^3\left(\sqrt{\frac{7}{3}}-\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^4$.
9. 89×91.
10. 889×991.
11. 2199×2201.
12. 15.3×14.7.
13. 27.84×28.16.
14. $2199^2 - 1199^2$.
15. $27.34^2 - 12.34^2$.
16. 2199^2.
17. 29.84^2.
18. 29.12^2.
19. 192×212.

20. 17.14×17.15.

21. $\lg^2 2 + \lg 2 \cdot \lg 5 + \lg 5$.

22. $2\lg 5 + \lg 8$.

23. $\lg^3 2 + 3\lg 2 \cdot \lg 5 + \lg^3 5$

24. $\left(\dfrac{2+2i}{1-\sqrt{3}\,i}\right)^6$

25. $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{-1+\sqrt{3}\,i}\right)^3$.

26. $(-1+\sqrt{3}\,i)^4$.

27. $[(\sqrt{3}+1)+(\sqrt{3}-1)i]^8$.

二 拆 项 法

不少同学一遇到分式化简，解分式方程等问题，便急于通分或去掉分母，其实，这种做法并不一定是最简的。我们知道，几个分式的代数和可以经过通分、合并，变成一个分式。例如，

$$\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}=\frac{3x-4}{x^2-3x+2},$$

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}=\frac{1}{x(x-1)^2}.$$

反之，也可以把一个分式分成几个分式的代数和。例如

$$\frac{3x-4}{x^2-3x+2}=\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2},$$

$$\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}.$$

这时，我们说把 $\frac{3x-4}{x^2-3x+12}$，$\frac{1}{x(x-1)^2}$分成部分分式，也就是把一个分式“拆”成了几个分式的代数和。为了更好地介绍拆项法及其应用，我们先来介绍几个有关的名词。

没有加减运算的整式，叫做**单项式**。

如果两个单项式中所含的字母相同，并且各个字母的指

数也分别相同，那么这两个单项式就叫做同类项。例如，$4ab^2c$ 与$\frac{1}{2}ab^2c$是同类项，$\frac{1}{\sqrt{2}}$与$\sqrt{2}$也是同类项。a^2b与ab^2则不是同类项。

同类项可以合并，但有时为了计算方便，也把一个单项式“拆”成几个单项式的代数和。

几个单项式的代数和叫做**多项式**。

两个非零多项式A、B，如果A的次数低于B的次数，那么$\frac{A}{B}$叫做**真分式**；如果A的次数等于或大于B的次数，那么$\frac{A}{B}$叫做**假分式**。例如，$\frac{1}{x-1}$，$\frac{3x-4}{x^2-3x+2}$都是真分式。因为每个假分式都可以化成一个真分式与一个整式的代数和。例如 $\frac{x^3-4x^2+2x+9}{x^2-5x+6}=x+1+\frac{x+3}{x^2-5x+6}$。因此，在这里我们只考虑真分式，而不考虑假分式了。

如果一个真分式$\frac{A}{BC}$（B、C互质，即除常数外，B、C没有其他公因式），可以化成两个真分式$\frac{A_1}{B}$，$\frac{A_2}{C}$的代数和，即$\frac{A}{BC}=\frac{A_1}{B}+\frac{A_2}{C}$，则$\frac{A_1}{B}$、$\frac{A_2}{C}$叫做$\frac{A}{BC}$的**部分分式**。

把一个单项式分成几个单项式的代数和，或是把一个分式分成它的部分分式的代数和，这两种变形都叫做拆项法。

一

利用拆项法来解题，有时可以达到化繁为简，化难为易，减少计算量，达到快速、准确地解决问题的目的。下面我们将分成五种情况来介绍拆项法的应用。

1. 用拆项法来计算、化简

例1 计算：

（1）$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\frac{1}{5\times6}+\frac{1}{6\times7}$

$+\frac{1}{7\times8}+\frac{1}{8\times9}+\frac{1}{9\times10}$；

（2）$\frac{1+2\sqrt{3}+\sqrt{5}}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}+\sqrt{5})}+\frac{3+\sqrt{5}+2\sqrt{7}}{(\sqrt{5}+\sqrt{7})(\sqrt{7}+3)}$

分析：（1）

$\because \frac{1}{1\times2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}$，

$\frac{1}{2\times3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$，

$\frac{1}{3\times4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$，

$\frac{1}{4\times5}=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$，

$\frac{1}{5\times6}=\frac{1}{5}-\frac{1}{6}$，

$\frac{1}{6\times7}=\frac{1}{6}-\frac{1}{7}$，

$\frac{1}{7\times8}=\frac{1}{7}-\frac{1}{8}$，