中学数学参考书

证明不等式

$a^2+b^2 \geqslant 2ab$

吴志翔

河北人民出版社

证明不等式

中学数学参考书

证明不等式

吴志翔

河北人民出版社

一九八二年·石家庄

内 容 提 要

本书收集了不等式证明题290个，共三章：代数不等式、三角不等式、几何不等式。每章又按照证题的主要方法进行分类，并在各章节之前，有说明证题的要点及注意事项，可供高中学生阅读和中学数学教师参考。

中学数学参考书

证明不等式

吴 志 翔

河北人民出版社出版（石家庄市北马路19号）

邯郸市印刷厂印刷 河北省新华书店发行

787×1092毫米 1/32 7 7/8 印张 166,000字 印数：1—26,200 1982年2月第1版

1982年2月第1次印刷 统一书号：7086·1065 定价：0.67元

前　言

不等式是数学领域里的重要组成部分，它贯穿于从初等数学到高等数学的全过程．在中学阶段，必须把不等式学好，以便为进一步学好高等数学打下牢固的基础．

不等式的证明，部分命题采用了多种证法．并按主要证题法分类．

本书只着重介绍证题方法，对于证题步骤尽量从简，不尽完善，有些题只写出证法的主要步骤．

由于水平所限，谬误在所难免，欢迎大家批评指正．

编者

目　　录

第一章　代数不等式

不等式问题，最基本的有两种：一种是解不等式，它类似于解方程；另一种就是证明不等式，它类似于证明恒等式．“证明不等式”就是根据不等式的性质，说明对于式中字母所允许的数值，这个不等式都能成立的证明．一般是以不等于零的实数平方必大于零的基本概念作理论根据，再结合不等式的性质，去完成不等式的证明．

不等式有一个基本性质：对于任何两个实数 A 和 B．$A-B>0$ 和 $A>B$；以及 $A-B<0$ 和 $A<B$ 有完全相同的意义．我们以后的证明，经常要利用这一性质．除此以外，还有下面几个基本性质：

1．如果 $a>b$，那么 $b<a$，反过来也对．

2．如果 $a>b$，$b>c$，那么 $a>c$．

3．如果 $a>b$，那么 $a+c>b+c$．

4．如果 $a>b$，$c>0$，那么 $ac>bc$．

5．如果 $a>b$．$c<0$，那么 $ac<bc$．

6．如果 $a>b$．$c>d$，那么 $a+c>b+d$．

7．如果 $a>b$，$c<d$．那么 $a-c>b-d$．

8．如果 $a>b$，$c>d$，且 a、b、c、d 都是正数，那么 $ac>bd$

9．如果 $a>b$．且 a、b 为正数，那么 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$．

10. 如果 $a>b$，$c<d$。且 a、b、c、d 都是正数。

那么 $\dfrac{a}{c}>\dfrac{b}{d}$.

11. 如果 $a>b$，且 a、b 都是正数，n 是大于 1 的整数，那么 $a^n>b^n$。

12. 如果 $a>b$，且 a、b 都是正数，n 是大于 1 的整数，

那么 $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$.

以上这些性质，都是证明不等式的理论根据。不过，在应用这些性质时，必须注意基本性质成立的条件。例如，我们不知道 $c>0$ 时，就不能从不等式 $a>b$，推得 $ac>bc$，否则就会产生极大的谬误。

证明不等式要比证明等式难些，所以证明不等式问题。首先要有良好的等式知识作基础，这样才能完成不等式的论证。不等式的证明方法灵活多变，除常用的公式法之外，尚有增项、减项。

证明不等式是有规律的，下面我们将根据它的规律，即证明方法，分类说明。

第一节 作 差 法

作差法是证明不等式的基本方法之一。若 $A-B>0$，则 $A>B$；若 $A-B<0$，则 $A<B$，反之也对。故根据这个理论证明不等式。

作差法的优点是思路明确，简单易懂。不但适用于代数不等式，也适用于三角不等式、几何不等式。它也有缺点，往往计算起来较麻烦，不过在证明不等式时，常常用到这种

方法.

作差法的要点是把作差后的代数式经过恒等变形，变成连乘积的形式，或者几项完全平方和的形式，看它是正数还是负数，从而来判断两式的大小.

1　设 a、b 为不相等的正实数，求证

$$a^3+b^3>a^2b+ab^2.$$

证法(1)　作差　$a^3+b^3-(a^2b+ab^2)$

$$=a^2(a-b)+b^2(b-a)$$

$$=(a^2-b^2)(a-b)$$

$$=(a+b)(a-b)^2>0.$$

$\therefore\quad a^3+b^3>a^2b+ab^2.$

证法(2)　$\because\quad a\neq b,\qquad \therefore\quad (a-b)^2>0.$

即　$a^2-ab+b^2>ab.$

又 $\because\quad (a+b)>0,$

$\therefore\quad (a+b)\ (a^2-ab+b)^2>ab(a+b).$

即　$a^3+b^3>a^2b+ab^2.$

2　设 a、b 为正数，求证 $\left(\dfrac{a^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\dfrac{b^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}$

证法(1)　根据1题得 $x^3+y^3\geqslant xy(x+y)$

（当 $x=y$ 时取等号），

$\therefore\quad \dfrac{x^3+y^3}{xy}\geqslant x+y$，或　$\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}\geqslant x+y.$

令　$x=\sqrt{a}$，　$y=\sqrt{b}$，

故有　$\dfrac{a}{\sqrt{b}}+\dfrac{b}{\sqrt{a}}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}.$

即 $\left(\frac{a^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{b^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

证法(2) 分析、假设原不等式成立。

即 $\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

$\because$ $a>0$，$b>0$，故 $\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

即 $a\sqrt{a}+b\sqrt{b}\geqslant a\sqrt{b}+b\sqrt{a}$,

$$a\sqrt{a}-b\sqrt{a}+b\sqrt{b}-a\sqrt{b}\geqslant 0,$$

$$(a-b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})\geqslant 0,$$

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqslant 0.$$

此式显然是成立的，故逆推上去，原命题即可获证。

3 设 $x>a$，求证 $x^3+13a^2x>5ax^2+9a^3$

证明 作差 $x^3+13a^2x-(5ax^2+9a^3)$

$$\begin{aligned}&=x^3-a^3-a(5x^2-13ax+8a^2)\\&=(x-a)(x^2+ax+a^2)-a(x-a)(5x-8a)\\&=(x-a)[(x-2a)^2+5a^2]>0,\end{aligned}$$

$\therefore$ $x^3+13a^2x>5ax^2+9a^3$.

4 求证 (1) 若 x 为任意实数，则

$$\frac{x^2-6x+5}{x^2+2x+1}\geqslant-\frac{1}{3};$$

(2) 当 $2x+4y=1$ 时，$x^2+y^2\geqslant\frac{1}{20}$.

(3) 当 $x>0$ 时，$x+\frac{4}{x^2}\geqslant 3$.

证明(1) $\because\quad x^2+2x+1=(x+1)^2>0,$

$\therefore$ 原式与 $3(x^2-6x+5)\geqslant-(x+1)^2$ 等价。

作差 $3(x^2-6x+5)+(x+1)^2=4(x-2)^2\geqslant0,$

$\therefore\quad 3(x^2-6x+5)\geqslant-(x+1)^2.$

即
$$\frac{x^2-6x+5}{x^2+2x+1}\geqslant-\frac{1}{3}.$$

(2) $\because\quad 2x+4y=1,\quad\therefore\quad x=\frac{1-4y}{2}.$

作差
$$x^2+y^2-\frac{1}{20}=\left(\frac{1-4y}{2}\right)^2+y^2-\frac{1}{20}$$
$$=\frac{(10y-2)^2}{20}=\frac{(5y-1)^2}{5}\geqslant0,$$

$\therefore\quad x^2+y^2\geqslant\frac{1}{20}.$

(3) 当 $x>0$ 时，原式与 $x^3+4\geqslant3x^2$ 等价。

作差 $x^3+4-3x^2=x^3+x^2-(4x^2-4)$

$=(x+1)(x^2-4x+4)=(x+1)(x-2)^2.$

$\because\quad x>0,\ x+1>0,$

$\therefore\quad (x+1)(x-2)^2>0.$

故原式成立。

5 设 a、b、c 为非负数，求证
$$(a+b+c)(a^3+b^3+c^3+abc)>a^4+b^4+c^4,$$

证明 作差

$(a+b+c)(a^3+b^3+c^3+abc)-(a^4+b^4+c^4)$

$=ab^3+ac^3+bc^3+ba^3+ca^3+cb^3+a^2bc+ab^2c+abc^2$

$=(ab+bc+ca)(a^2+b^2+c^2)>0.$

即 $(a+b+c)(a^3+b^3+c^3+abc)>a^4+b^4+c^4$。

6 设 a、b 为不相等的正数，求证

$$a^7+b^7>a^4b^3+a^3b^4.$$

证明 作差 $a^7+b^7-(a^4b^3+a^3b^4)$

$$=(a^4-b^4)(a^3-b^3)$$

$$=(a+b)(a-b)^2(a^2+b^2)(a^2+ab+b^2).$$

∵ a，b 为不相等的正数，故上面各个因子都是正数，积是正数。

∴ $a^7+b^7>a^4b^3+a^3b^4$。

7 设 a，b 为正数，且 $a>b$，求证

$$(a^2-b^2):(a^2+b^2)>(a-b):(a+b).$$

证法(1) 作差

$$\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}-\frac{a-b}{a+b}=\frac{2ab(a-b)}{(a^2+b^2)(a+b)},$$

∵ a、b 为正数，且 $a>b$，故上式为正。

即 $(a^2-b^2):(a^2+b^2)>(a-b):(a+b)$。

证法(2) ∵ $b<a$，∴ $2ab(b-a)<0$。

又 $(a-b)(a^2+b^2)-(a+b)(a^2-b^2)$

$$=(a-b)[a^2+b^2-(a+b)^2]$$

$$=2ab(b-a)<0.$$

∴ $(a-b)(a^2+b^2)<(a+b)(a^2-b^2)$。

即 $(a^2-b^2):(a^2+b^2)>(a-b):(a+b)$。

8 设 $a>b>c$（或 $b>c>a$，或 $c>a>b$。）

求证 $b^2c+c^2a+a^2b>bc^2+ca^2+ab^2$

证明 本题不等式的两边及所设的三个条件：$a>b>c$，$b>c>a$，以及 $c>a>b$，俱为关于 a，b，c 的轮换对称式，

故仅就 $a>b>c$ 的条件证明即可。

作差 $b^2c+c^2a+a^2b-(bc^2+ca^2+ab^2)$

$=b^2c+c^2a+a^2b-bc^2-ca^2-ab^2$

$=b^2(c-a)+ca(c-a)-b(c-a)(c+a)$

$=(c-a)(b-c)(b-a)$

$=(a-b)(b-c)(a-c)$。

此式在 $a>b>c$ 的条件下，显然为正，其实在 $b>c>a$ 或 $c>a>b$ 的条件下也为正

$\therefore$ $b^2c+c^2a+a^2b>bc^2+ca^2+ab^2$。

9 设 a、b 为实数，求证

(1) $a^2+b^2+ab+1>a+b$；

(2) $a^2+b^2+1\geqslant a+b+ab$。

证明(1) 欲证 $a^2+b^2+ab+1>a+b$。

可证 $2a^2+2b^2+2ab+2>2a+2b$。

为此，可以作差

$$2a^2+2b^2+2ab+2-2a-2b$$
$$=a^2+b^2+2ab+a^2-2a+1+b^2-2b+1$$
$$=(a+b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2.$$

$\because$ a, b 为实数，故上式三项都不负，且不能同时为零，即是大于零。

$\therefore$ $a^2+b^2+ab+1>a+b$。

(2) 可以采取上式的证法，也可以采取如下的证法.

$\because$ $\dfrac{a^2+1}{2}\geqslant a$, $\dfrac{b^2+1}{2}\geqslant b$, $\dfrac{a^2+b^2}{2}\geqslant ab$

把三式相加，即得

$$a^2+b^2+1\geqslant a+b+ab。$$

当 $a=b=1$ 时取等号。

10 设 a、b、c 是满足 $a+b+c=1$ 的正数，对于实数 x, y, z。设 $p=ax+by+cz$。

$Q=bx+cy+az$。$R=cx+ay+bz$。

求证 (1) $P^2+Q^2+R^2 \leqslant x^2+y^2+z^2$；

(2) $PQ+QR+RP \geqslant xy+yz+zx$。

证明(1) $P+Q+R$

$$=(ax+by+cz)+(bx+cy+az)+(cx+ay+bz)$$

$$=(a+b+c)(x+y+z)$$

$$=x+y+z。（因 a+b+c=1）$$

作差 $x^2+y^2+z^2-(P^2+Q^2+R^2)$

$$=(a+b+c)^2(x^2+y^2+z^2)-\{(ax+by+cz)^2+(bx+cy+az)^2+(cx+ay+bz)^2\}$$

$$=(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca)(x^2+y^2+z^2)-\{(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)+2(ab+bc+ca)(xy+yz+zx)\}$$

$$=2(ab+bc+ca)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$$

$$=(ab+bc+ca)[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2] \geqslant 0,$$

$\therefore$ $P^2+Q^2+R^2 \leqslant x^2+y^2+z^2$。

这里仅当 $x=y=z$ 时取等号。

(2) 引用证(1) 的结果

$$2(PQ+QR+RP)=(P+Q+R)^2-(P^2+Q^2+R^2)$$

$$\geqslant (x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)=2(xy+yz+zx)$$

$\therefore$ $PQ+QR+RP \geqslant xy+yz+zx$。

这里仅当 $x=y=z$ 时取等号。

11 设 $a+b>o$，n 为偶数，求证

$$\frac{b^{n-1}}{a^n}+\frac{a^{n-1}}{b^n}\geqslant\frac{1}{a}+\frac{1}{b}.$$

证明　作差

$$\frac{b^{n-1}}{a^n}+\frac{a^{n-1}}{b^n}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$$

$$=\frac{b^{n-1}}{a^n}-\frac{1}{a}+\frac{a^{n-1}}{b^n}-\frac{1}{b}=\frac{b^{n-1}-a^{n-1}}{a^n}+\frac{a^{n-1}-b^{n-1}}{b^n}$$

$$=\frac{b^n(b^{n-1}-a^{n-1})+a^n(a^{n-1}-b^{n-1})}{a^nb^n}$$

$$=\frac{(a^n-b^n)(a^{n-1}-b^{n-1})}{(ab)^n}.$$

现在分两种情况考虑：

(1) 当 $a>0$，$b>0$ 时，有 $(a^n-b^n)(a^{n-1}-b^{n-1})\geqslant 0$，

又∵　$(ab)^n>o$，

$$\therefore\quad \frac{(a^n-b^n)(a^{n-1}-b^{n-1})}{(ab)^n}\geqslant 0.$$

(2) 当 a,b 中有一个为负时，不妨设 $a>0$，$b<0$，

∵　$a+b>0$，故 $a>|b|$，

$$\therefore\quad \frac{(a^n-b^n)(a^{n-1}-b^{n-1})}{(ab)^n}>0.$$

综合以上两种情况，知其差不负，

$$\therefore\quad \frac{b^{n-1}}{a^n}+\frac{a^{n-1}}{b^n}\geqslant\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$$

式中等号当且仅当 $a=b$ 时成立。

12　设 a，b，c 为正数，且其中任二数之和大于第三数。

求证　$a^2+b^2+c^2<2(bc+ca+ab)$。

证明　作差

$$
\begin{aligned}
&2ab+2bc+2ca-a^2-b^2-c^2\\
&=2b(a+c)-\ (a+c)^2+4ac-b^2\\
&=4ac-[(a+c)^2-2b(a+c)+b^2]\\
&=(2\sqrt{a}\sqrt{c})^2-[(a+c)-b]^2\\
&=[2\sqrt{a}\sqrt{c}+a+c-b][2\sqrt{a}\sqrt{c}-a-c+b]\\
&=[(\sqrt{a}+\sqrt{c})^2-\sqrt{b}^2][\sqrt{b}^2-(\sqrt{a}-\sqrt{c})^2]\\
&=(\sqrt{a}+\sqrt{c}+\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{c}-\sqrt{b})\\
&\quad(\sqrt{b}+\sqrt{a}-\sqrt{c})(\sqrt{b}-\sqrt{a}+\sqrt{c}).
\end{aligned}
$$

∵　a, b, c 之中，任二者之和大于第三者．它们的平方根也有这种性质，故上式各因子为正，其积为正。

∴　$a^2+b^2+c^2<2(bc+ca+ab)$。

第二节　基本不等式

“基本不等式”是指对于任意二实数 a 和 b，则有 $a^2+b^2\geqslant 2ab$，(其中等号是当且仅当 $a=b$ 时成立．) 按第一节的作差法即可。

作差　$a^2+b^2-2ab=(a-b)^2$

∵　a,b 是实数，故 $(a-b)^2\geqslant 0$

当 $a=b$ 时，等号显然成立

∴　$a^2+b^2\geqslant 2ab$。　　(A)

通常人们称不等式(A)为基本不等式，用它作为公式。

证明其他的不等式，这种方法就叫做基本不等式法．这个式子可变形为：

1．在不等式(A)中，若令 $a^2=x, b^2=y$，并规定取 $x>0, y>0$，则 (A) 可以变形为

$$x+y\geqslant 2\sqrt{xy} \text{ 或 } \frac{x+y}{2}\geqslant\sqrt{xy}. \qquad (B)$$

不等式 (B) 的左边是两个正数的算术平均数，右边是它们的几何平均数．故不等式 (B) 可以这样的叙述："两个正数的算术平均数，不小于它们的几何平均数．"

2．不等式(B)左边 $\frac{x+y}{2}$ 总是不能小于 $\sqrt{xy}$，最小也只能等于 $\sqrt{xy}$．当 $x=y$ 时，式子 $\frac{x+y}{2}$ 的极小值是 $\sqrt{xy}$；同样不等式(B)的右边 $\sqrt{xy}$ 总是不能大于 $\frac{x+y}{2}$．最大也只能等于 $\frac{x+y}{2}$．$\frac{x+y}{2}$ 是当 $x=y$ 时式子 $\sqrt{xy}$ 的极大值．因为 x、y 都是不定值，故即使知道谁是谁的极值，并无实际应用价值．如果在它们之间能出现一个是定值，就有实际应用价值了．

3．当不等式 (B) 的左边 $\frac{x+y}{2}$ 等于定值，即 $x+y$ 是定值时，则 $\sqrt{xy}$ 在 $x=y$ 时有极大值，即 $x\cdot y$ 有极大值．例如：当 $x+y=8$，那么显然当 $x=y=4$ 时．$xy=16$，$\sqrt{xy}=4$ 为极大值．这点很重要，根据这个道理又可以推出：若函数 $S=t(a-t)$，其中 a 是定值，$\because t+(a-t)=a$，a 是定值．所以当 $t=a-t$ 时，即 $t=\frac{a}{2}$ 时，s 有极大值．用这种方