高职高专通用教材

应用数学基础

YINGYONG SHUXUE JICHU

郭培俊　罗桂銮　周宗谷　主编

华东理工大学出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

高职高专通用教材

应用数学基础

郭培俊　罗桂銮　周宗谷　主编

华东理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

应用数学基础/郭培俊 罗桂銮 周宗谷主编. —上海：华东理工大学出版社，2005.8
(高职高专通用教材)
ISBN 7-5628-1765-0

Ⅰ.应… Ⅱ.郭… Ⅲ.应用数学-高等学校：技术学校-教材 Ⅳ. O29

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 086993 号

高职高专通用教材

应用数学基础

主　　编 / 郭培俊　罗桂銮　周宗谷
责任编辑 / 胡　景
封面设计 / 王晓迪
责任校对 / 金慧娟
出版发行 / 华东理工大学出版社
地　　址：上海市梅陇路 130 号，200237
电　　话：(021)64250306　(营销部)
传　　真：(021) 64252707
网　　址：www. hdlgpress. com. cn
印　　刷 / 上海展强印刷有限公司
开　　本 / 787×1092　1/16
印　　张 / 15.25
字　　数 / 382 千字
版　　次 / 2005 年 8 月第 1 版
印　　次 / 2006 年 5 月第 2 次
印　　数 / 4101-8130 册
书　　号 / ISBN　7-5628-1765-0/O・149
定　　价 / 22.50 元

内容提要

Outline

本书是应用数学的基础教材，是高职高专分层教学课题组的研究成果之一. 主要包括一元函数微分学、多元函数微分学、常微分方程初步、线性代数初步、级数、拉普拉斯变换、数学实验等内容.

本书以“贴近学生，贴近实际，贴近专业”为指导思想，真正体现了“以应用为目的，以必须够用为度”的原则. 在体系上突出了数学课程的循序渐进、由浅入深的特点；在内容上删除了理论证明，强调应用和计算，书中所涉及的计算都在数学实验中进行了操作简介；教材内容选取上兼顾理工专业和经济管理专业.

本教材内容分 B、A(选学)两个层次. B 层内容为公共必修基础内容；A 层前面注有★号，仅供部分学生选学；各章后的基础题和测试题为 B 层内容，供全体学生使用；提高题供学有余力的学生选用；书后附录Ⅱ是中学学过的而又与本书联系较密切的知识点，供学生查看.

本书可作为高等职业学院、高等专科学校及各类成人专科学校的通用教材，也可作为本科院校举办的独立学院和民办高校综合类专业的教材，还可作为科技工作者和数学实验的参考资料.

本书编委会

主　编　郭培俊　罗桂銮　周宗谷

副主编　尹清杰　王积建　刘维先
　　　　龚洪胜　毛海舟

前言

Preface

高职教育人才培养目标的变化，直接带来了高等职业教育办学宗旨、教学内容与课程体系、教学方法与手段、教学管理、教材建设等诸多方面的改革. 随着高职教育改革深入发展，各高职院校的教材建设工作也在不断完善. 本教材是分层教学研究成果之一，是本校数学组教师多年从事高职教学经验的结晶.

目前高职生源广，许多专业都是文理兼容，学生基础参差不齐. 为适应生源特点，教学要坚持"因材施教"的原则，树立"以人为本"的理念. 反映在教材上，就是要编出适合学生学习，适应职业需求，有使用价值的教材. 本教材正是立足于此. 课题组教师大胆尝试，彻底摆脱传统观念的束缚，甩掉"教材映射水平"的思想包袱，真正让"一切为了学生"落到实处. 本教材的出版，也是教师思想解放、求真务实、无为才有所作为的结果的体现.

本教材编写内容是高等数学、经济数学、工程数学中最基础的知识，且分 A、B 两个层次，能满足不同学生的要求.

参加本书编写工作的人员有：郭培俊(第 1 章、附录Ⅰ、附录Ⅱ)；龚洪胜(第 2 章)；毛海舟(第 3 章)；罗桂銮(第 4 章 1～4 节、第 10 章)；王积建(第 4 章第 5 节)；周宗谷(第 5 章)；刘维先(第 6 章、第 7 章)；尹清杰(第 8 章、第 9 章)；张韪(阅读材料). 由郭培俊、罗桂銮负责统编.

本书编写是在浙江工贸学院领导的大力支持与资助下，教务处高光亮老师引导下以及学院基础部理科教研室的组织下完成的，在编写过程中荣幸得到了喻江鑫教授的鼓励和指点，并由喻教授担任主审.

毕竟本书的编写是一次改革实验的尝试，书中错误和缺点在所难免，敬请同仁指出，并望提出修改意见！

编　者

2005 年 5 月

目 录
Contents

第 1 章
函数 极限 连续

学习目标

了解反函数的概念;无穷小、无穷大的概念;闭区间上连续函数的性质.

理解区间、邻域的概念;函数、基本初等函数、复合函数、初等函数、分段函数的概念;函数极限的定义;无穷小的性质;函数在一点连续的概念;初等函数的连续性.

掌握复合函数的复合与分解过程;极限的四则运算法则.

会用函数关系描述经济、物理等生产生活实际问题;用两个重要极限求极限;求连续函数和分段函数的极限.

函数是近代数学的基本概念之一,也是高等数学研究的主要对象.极限的思想和方法是研究高等数学的基本方法和推理工具.本章在对函数概念进行复习和补充的基础上将介绍极限与连续的基本知识,为以后的学习奠定基础.

1.1 函数

我们先介绍两个与函数有关的概念——区间、邻域.

1.1.1 区间、邻域

1. 区间

区间是用得较多的一类数集,是由连续不断的实数组成的集合.设 a、b 都是实数,且 $a<b$,数集$\{x|a<x<b\}$称为**开区间**,记作(a, b);数集$\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$称为**闭区间**,记作$[a, b]$;同理$[a, b)$, $(a, b]$称为**半开区间**.此外还有**无限区间**,分别表示为$[a, +\infty)$, $(-\infty, b]$, $(a, +\infty)$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, +\infty)$.

2. 邻域

邻域是以后常用到的一个区间.设 a 是一个确定的实数,以点 a 为中心的任何开区间称为点 a 的**邻域**,记作 $U(a)$.

δ 是一个比较小的正数($\delta>0$),开区间$(a-\delta, a+\delta)$称为以点 a 为中心、以 δ 为半径的邻域,简称点 a 的 δ 邻域,记作 $U(a, \delta)$,即 $U(a, \delta)=\{x|a-\delta<x<a+\delta\}$.

有时用到的邻域需要把邻域中心去掉,点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后,称为点 a 的空心 δ 邻域,记作 $U^{\circ}(a, \delta)$.即 $U^{\circ}(a, \delta)=\{x|0<|x-a|<\delta\}$.

例如:$U(1, 0.01)$表示满足$|x-1|<0.01$ 的一切实数组成的集合,是以点 1 为中心、0.01 为半径的邻域,也就是开区间$(0.99, 1.01)$.而$U^{\circ}(1, 0.01)$则表示满足 $0<|x-1|<0.01$ 的一切实数组成的集合,是以 1 为中心、0.01 为半径的去心邻域,也就是在邻域$(0.99, 1.01)$中把中心 1 去掉,即$(0.99, 1)\cup(1, 1.01)$.

1.1.2 函数概念

1. 函数定义及表示法

在某个变化过程中，往往出现多个变量，这些变量不是彼此孤立的，而是相互影响和相互制约的，一个量或一些量的变化会引起另一个量的变化. 如果这些影响是确定的，是依照某一规则的，那么我们说这些变量之间存在着函数关系.

定义 1.1 设 x 和 y 是两个变量，x 的取值范围为非空数集 D，如果对于 D 中每一个 x，变量 y 按照一定的法则 f 总有一个确定的数值和它对应，则称变量 y 是变量 x 的**函数**，记作 $y=f(x)$. 这里，x 称为**自变量**，y 称为**因变量**或**函数**.

数集 D 称为函数的**定义域**，相应的 y 值的集合称为函数的**值域**.

当自变量 x 在定义域 D 内取定某确定值 x_0 时，因变量 y 按照所给函数关系 $y=f(x)$ 求出的对应值 y_0，称为当 $x=x_0$ 时的函数值，记作 $y|_{x=x_0}$ 或 $f(x_0)$.

对于同一个问题中所遇到的不同函数，应该采用不同的记号，如 $f(x)$，$\varphi(x)$，$F(x)$，$\Phi(x)$等等.

定义域和对应法则是确定函数的两个要素，即只有当两个函数的定义域和对应法则均相同时，才认为这两个函数是相同的；否则认为是不同的函数. 例如：$y=(\sqrt{x})^2$ 与 $y=x$，因为定义域不同不表示同一函数；同理，$y=2\ln x$ 与 $y=\ln x^2$ 不表示同一函数，而 $y=\sqrt{x^2}$ 与 $y=|x|$ 则表示同一函数.

函数的自然定义域是使函数解析式有意义的自变量的全体，实际问题中函数的定义域除考虑使函数解析式有意义外，还需使实际问题有意义. 例如：圆面积 A 与半径 r 之间的函数关系为 $A=\pi r^2$，这时此函数的定义域为$(0, +\infty)$，但抛开其实际含义考虑函数 $y=\pi r^2$ 的定义域，则应该是$(-\infty, +\infty)$.

例 1 求下列函数的定义域.

(1) $f(x)=\dfrac{2}{x^2+3x}$；

(2) $f(x)=\sqrt{25-x^2}$；

(3) $f(x)=\lg(4x-3)$；

★(4) $f(x)=\arcsin(2x-1)$；

★(5) $f(x)=\lg(4x-3)-\arcsin(2x-1)$.

解 (1) 在分式$\dfrac{2}{x^2+3x}$中，分母不能为零，所以 $x^2+3x\neq 0$，解得 $x\neq -3$ 且 $x\neq 0$，即定义域为$(-\infty, -3)\cup(-3, 0)\cup(0, +\infty)$.

(2) 在偶次方根中，被开方式必须大于等于零，所以有 $25-x^2\geqslant 0$，解得 $-5\leqslant x\leqslant 5$，即定义域为$[-5, 5]$.

(3) 在对数式中，真数必须大于零，所以有 $4x-3>0$，解得 $x>\dfrac{3}{4}$，即定义域为$\left(\dfrac{3}{4}, +\infty\right)$.

★(4) 反正弦或反余弦的绝对值必须小于等于 1，所以有 $-1\leqslant 2x-1\leqslant 1$，解得 $0\leqslant x\leqslant 1$，即定义域为$[0, 1]$.

★(5) 该函数为(3)、(4)两例中函数的代数和,此时函数的定义域应为(3)、(4)两例中定义域的交集,即$\left(\frac{3}{4}, +\infty\right)\cap[0, 1]=\left(\frac{3}{4}, 1\right]$.

常用函数的表示法有解析法(又称公式法)、表格法和图形法.

2. 分段函数

定义 1.2 在定义域的不同范围内用不同解析式表示的函数称为**分段函数**.分段函数在经济上和工程技术中以及日常生活中都会经常遇到.

例 2 旅客乘坐火车可免费携带不超过 20 kg 的物品,超过 20 kg 而不超过 50 kg 的部分每千克交费 a 元,超过 50 kg 的部分每千克交费 b 元.求运费与携带物品重量的函数关系.

解 设物品质量为 x kg,应交运费为 y 元.由题意可知这时应考虑三种情况:

第一种情况是质量不超过 20 kg,这时

$$y=0, \quad x\in[0, 20]$$

第二种情况是质量大于 20 kg 但不超过 50 kg,这时

$$y=(x-20)a, \quad x\in(20, 50]$$

最后是质量超过 50 kg,这时

$$y=(50-20)a+(x-50)b, \quad x\in(50, +\infty)$$

因此,所求的函数是一个分段函数

$$y=\begin{cases}0, & x\in[0, 20],\\ a(x-20), & x\in(20, 50],\\ a(50-20)+b(x-50), & x\in(50, +\infty).\end{cases}$$

注意 分段函数是由几个函数关系式合起来表示一个函数,而不是几个函数.

例 3 函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\leqslant 1,\\ \sin x, & x>1\end{cases} \text{ 与 } y=\begin{cases}x+1, & -1\leqslant x<0,\\ 0, & x=0,\\ x^2, & 0<x\leqslant 1\end{cases}$$

都是分段函数.

例 4 $f(x)=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$ 其图像见图 1-1,定义域$(-\infty, +\infty)$,值域$\{-1, 0, 1\}$.

例 4 给出的函数也称为符号函数,它的图形如图 1-1 所示.这个函数在理论和实际上都非常有用.

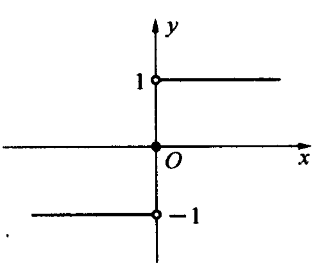

图 1-1

1.1.3 函数的几种特性

以前我们曾学习过函数的单调性、奇偶性、周期性.下面介绍另一个性质:函数的有界性.

定义 1.3 设函数 $f(x)$的定义域为 D,数集 $X\subset D$.如果存在正数 M,使得对任一 $x\in X$,

所对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)| \leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 X 上是**有界的**；如果这样的 M 不存在，则称 $f(x)$ 在 X 上是**无界的**.

例如：$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\arctan x$，$y=\text{arccot}\, x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界. $y=\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内无界，但在 $[1, \infty)$ 内有界. 可见函数的有界与无界除与函数本身有关外，还与所讨论的区间有关.

1.1.4 反函数

定义 1.4 设 $y=f(x)$ 是 x 的函数，其值域为 R. 如果对于 R 中的每一个 y 值，都有一个确定的且满足 $y=f(x)$ 的 x 的值与之对应，则得到一个定义在 R 上的以 y 为自变量、x 为因变量的新函数，我们称它为 $y=f(x)$ 的**反函数**，记作 $x=f^{-1}(y)$. 并称 $y=f(x)$ 为**直接函数**.

注意 (1) 由定义知，单调函数一定有反函数.

(2) $y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 互为反函数.

(3) 通常把 $x=f^{-1}(y)$ 改写为 $y=f^{-1}(x)$，因为习惯上总是用 x 表示自变量，用 y 表示因变量.

(4) 函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

例 5 求 $y=4x-1$ 的反函数.

解 由 $y=4x-1$ 得到 $x=\frac{y+1}{4}$，然后交换 x 和 y，得 $y=\frac{x+1}{4}$. 即 $y=\frac{x+1}{4}$ 是 $y=4x-1$ 的反函数.

1.1.5 基本初等函数

基本初等函数包括常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数六大类. 它们是微积分中所研究对象的基础，其图像和性质读者应很好地掌握，详见附录(Ⅰ).

1.1.6 复合函数与初等函数

1. 复合函数

在现实生活中，我们会遇到这样的问题：一般来说，成本 C 可以看作产量 q 的函数，而产量 q 又是时间 t 的函数，时间 t 通过产量 q 间接影响成本 C，那么成本 C 仍然可以看作是时间 t 的函数，C 与 t 的这种函数关系称作一种复合的函数关系.

定义 1.5 设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，u 是 x 的函数 $u=\varphi(x)$. 如果 $u=\varphi(x)$ 的值域或其部分包含在 $y=f(u)$ 的定义域中，则 y 通过中间变量 u 构成 x 的函数，称为 x 的**复合函数**，记作

$$y=f[\varphi(x)]$$

其中 x 是**自变量**，u 称作**中间变量**.

注意 (1) 不是任何两个函数都可以构成一个复合函数的，例如 $y=\ln u$ 和 $u=x-\sqrt{x^2+1}$ 就不能构成复合函数，因为 $u=x-\sqrt{x^2+1}$ 的值域是 $u<0$，而 $y=\ln u$ 的定义域是 $u>0$，前者函数的值域完全没有被包含在后者函数的定义域中.

(2) 复合函数不仅可以有一个中间变量，还可以有多个中间变量，这些中间变量是经过

多次复合产生的.

(3) 由基本初等函数经过四则运算形成的函数称为**简单函数**,复合函数往往是由简单函数复合而成的.

例 6 试求函数 $y=u^2$ 与 $u=\cos x$ 构成的复合函数.

解 将 $u=\cos x$ 代入 $y=u^2$ 中,即为所求的复合函数

$$y=\cos^2 x.$$

例 7 已知 $y=\ln u$, $u=4-v^2$, $v=\sin x$,将 y 表示成 x 的函数.

解 $y=\ln(4-v^2)=\ln(4-\sin^2 x)$.

例 8 指出下列复合函数是由哪些简单函数复合而成的.

(1) $y=\tan(x^3+4)$;

(2) $y=\sqrt{\log_a \dfrac{1}{x}}$.

解 (1) 设 $u=x^3+4$,则 $y=\tan(x^3+4)$ 由 $y=\tan u$, $u=x^3+4$ 复合而成.

(2) 设 $u=\log_a \dfrac{1}{x}$,则 $y=\sqrt{u}$;设 $v=\dfrac{1}{x}$,则 $u=\log_a v$,所以,$y=\sqrt{\log_a \dfrac{1}{x}}$可以看成是由 $y=\sqrt{u}$, $u=\log_a v$, $v=\dfrac{1}{x}$三个函数复合而成的.

2. 初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算及有限次的复合而成的函数叫做**初等函数**. 一般来说,初等函数都可以用一个解析式表示.

例如 $y=\arctan\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$, $y=\sqrt[5]{\ln \cos^3 x}$, $y=\mathrm{e}^{\operatorname{arccot}\frac{x}{3}}$, $y=3^x+\sqrt[3]{x^2-1}-5$ 都是初等函数. 而 $y=1+x+x^2+x^3+\cdots$不满足有限次运算,$f(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$不是一个解析式子表达的,因此都不是初等函数.

1.1.7 二元函数

以上我们学习的是只含一个自变量的函数 $y=f(x)$,称为一元函数. 含两个自变量的函数则称之为二元函数.

定义 1.6 设 D 是平面上的一个非空点集,f 是一个对应法则,如果对于每一个点 $(x, y)\in D$,都可由对应法则 f 得到惟一的实数 z 与之对应,则称 z 是变量 x, y 的二元函数,记为

$$z=f(x, y)$$

变量 x, y 称为自变量,集合 D 称为函数 $f(x, y)$的**定义域**,对应的函数值的集合

$$Z=\{z \mid z=f(x, y), (x, y)\in D\}$$

称为该函数的**值域**.

例 9 求函数 $z=\dfrac{\sqrt{x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$的定义域,并用图形表示.

解 由已知函数，自变量 x，y 应满足

$$\begin{cases} x-y^2\geqslant 0, \\ 1-x^2-y^2>0, \\ 1-x^2-y^2\neq 1. \end{cases}$$

化简，得

$$\begin{cases} x\geqslant y^2, \\ x^2+y^2<1, \\ x\neq 0,\ y\neq 0. \end{cases}$$

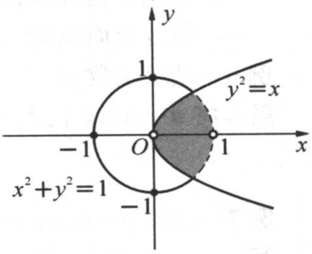

图 1-2

于是函数定义域为(图 1-2)

$$D=\{(x,\ y)\mid x\geqslant y^2,\ x^2+y^2<1,\ x\neq 0,\ y\neq 0\}.$$

二元函数的定义域在几何上往往是一个平面区域.

平面区域是坐标平面上满足某些条件的点的集合，围成平面区域的曲线称为该区域的边界. 包含边界的平面区域称为闭区域；不包含边界的平面区域称为开区域；包含部分边界的平面区域称为半开区域. 如果一个区域总可以被包含在一个以原点为圆心的一个圆域内部，则此区域称为**有界区域**；否则称之为**无界区域**.

1.2 极限的概念

函数的极限

1. $x\to\infty$时函数的极限

定义 1.7 如果当 $x>0$ 且无限增大时，函数 $f(x)$ 趋于某一个常数 A，则称当 $x\to+\infty$时，函数 $f(x)$ 以 A 为极限. 记作

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to+\infty).$$

定义 1.8 如果当 $x<0$ 且 x 的绝对值无限增大时，函数 $f(x)$ 趋于某一个常数 A，则称当 $x\to-\infty$时，函数 $f(x)$ 以 A 为极限. 记作

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to-\infty).$$

定义 1.9 如果当 x 的绝对值无限增大时，函数 $f(x)$ 趋于某一个常数 A，则称当 $x\to\infty$时，函数 $f(x)$ 以 A 为极限. 记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to\infty).$$

例 1 求 $\lim\limits_{x\to-\infty} 3^x$.

解 由指数函数的图像可知，当 $x\to-\infty$时，$3^x\to 0$，所以 $\lim\limits_{x\to-\infty} 3^x=0$.

思考：$\lim\limits_{x\to+\infty} 3^x$，$\lim\limits_{x\to\infty} 3^x$ 分别是多少？

例 2 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$.

解 函数的图像如图 1-3 所示. 当 $x\to+\infty$时，$\frac{1}{x^2}$无限变小,函数值趋于 1；当 $x\to-\infty$时,$\frac{1}{x^2}$也无限变小,函数值同样趋于 1,所以有

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=1.$$

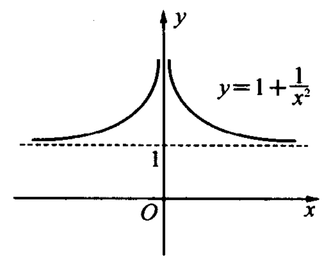

图 1-3

特别地,当 x 取正整数 n 时,$x\to+\infty$时函数的极限就成了 $n\to\infty$时数列$\{x_n\}$的极限,即

$$\lim_{n\to\infty}x_n=A\text{ 或 }x_n\to A(n\to\infty).$$

如 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(4-\frac{1}{n^2}\right)=4$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$.

由以上例题可以验证以下定理成立.

定理 1.1 当 $x\to\infty$时,$f(x)$以 A 为极限的充分必要条件是:

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=A.$$

2. $x\to x_0$ 时函数的极限

考察函数 $f(x)=\frac{2(x^2-4)}{x-2}$当 x 分别从左边和右边趋于 2 时的变化情况,参看表 1-1.

表 1-1 $f(x)$当 $x\to2$ 时变化情况

x	1.5	1.8	1.9	1.95	1.99	1.999	…	2.001	2.01	2.05	2.1	2.2	2.5
y	7	7.6	7.8	7.9	7.98	7.998	…	8.002	8.02	8.1	8.2	8.4	9

不难看出,$f(x)$无限地趋于常数 8. 我们称当 $x\to2$ 时，$f(x)$的极限是 8.

定义 1.10 设函数 $y=f(x)$在点 x_0 的某个邻域(点 x_0 本身可以除外)内有定义,如果当 x 趋于 x_0 时(但 $x\neq x_0$)时,函数 $f(x)$趋于一个常数 A. 则称当 x 趋于 x_0 时,$f(x)$以 A 为极限. 记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\text{ 或 }f(x)\to A(x\to x_0).$$

亦称当 $x\to x_0$ 时,$f(x)$的极限存在. 否则称当 $x\to x_0$ 时,$f(x)$的极限不存在.

例 3 根据极限定义说明:

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}2x=2x_0$;

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}c=c$.

解 (1) 当自变量 x 趋于 x_0 时,函数 $2x$ 就趋于 $2x_0$,于是依照定义有$\lim\limits_{x\to x_0}2x=2x_0$.

(2) 无论自变量取何值,函数都取相同的值 c,那么它当然趋于常数 c,所以$\lim\limits_{x\to x_0}c=c$. 由上得知,常数的极限是它本身.

3. 左极限与右极限

定义 1.11 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 右侧的某个邻域(点 x_0 本身可以除外)内有定义，如果当 $x>x_0$ 趋于 x_0 时，函数 $f(x)$ 趋于一个常数 A，则称当 x 趋于 x_0 时，$f(x)$ 的**右极限**是 A. 记作

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to x_0^+).$$

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 左侧的某个邻域(点 x_0 本身可以除外)内有定义，如果当 $x<x_0$ 趋于 x_0 时，函数 $f(x)$ 趋于一个常数 A，则称当 x 趋于 x_0 时，$f(x)$ 的**左极限**是 A. 记作

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to x_0^-).$$

根据上面的定义，我们可以得出类似定理 1.1 极限存在的充分必要条件.

定理 1.2 当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 以 A 为极限的充分必要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 处左、右极限存在且都等于 A.

即
$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A.$$

例 4 设 $f(x)=\begin{cases} x+2, & x\geqslant 1, \\ 3x, & x<1. \end{cases}$ 试判断 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 是否存在.

解 先分别求 $f(x)$ 当 $x\to 1$ 时的左、右极限：

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} 3x=3,$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} (x+2)=3,$$

于是 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 存在，且 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=3$.

例 5 判断 $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}$ 是否存在.

解 当 $x>0$ 趋近于 0 时，$\dfrac{1}{x}\to+\infty$，$e^{\frac{1}{x}}\to\infty$，即 $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}=\infty$；

当 $x<0$ 趋近于 0 时，$\dfrac{1}{x}\to-\infty$，$e^{\frac{1}{x}}\to 0$，即 $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}=0$.

虽然左极限存在，但右极限不存在，由充分必要条件可知 $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}$ 不存在.

1.3 无穷小量与无穷大量

1.3.1 无穷小量

无穷小量是一类特殊的函数. 在某个变化过程中，它的极限为零.

定义 1.12 若函数 $f(x)$ 在自变量 x 的某个变化过程中以零为极限，则称在该变化过程中，$f(x)$ 为**无穷小量**. 简称**无穷小**.

例如，当 $x\to 0$ 时，$\sin x$，x^3，$\sqrt[5]{x}$，$\ln(1+x)$ 是无穷小量；当 $x\to 1$ 时，$(x-1)^2$ 是无穷小量；当 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{x+3}$，$\dfrac{1}{x^2}$ 是无穷小量.

无穷小量常用希腊字母 α，β，γ 来表示.