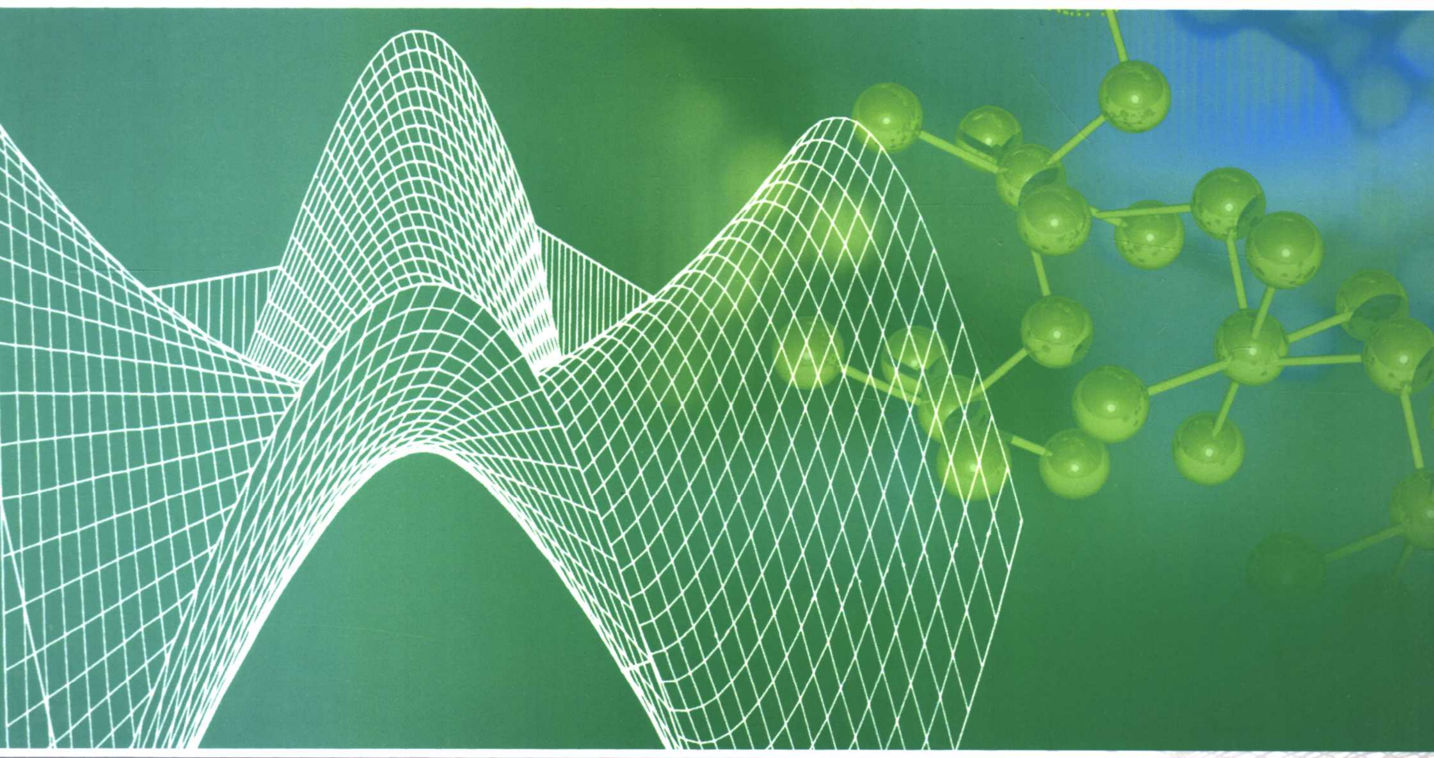
College Mathematics Guidance Series

大学数学学习辅导丛书

医科高等数学学习辅导

主　编　张选群



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

大学数学学习辅导丛书

医科高等数学学习辅导

主　编　张选群

副主编　（以姓氏笔画为序）

马建忠　王　颖　李　海

何穗智　景荣荣

编　委　（以姓氏笔画为序）

王　清　刘春扬　刘　巍

和丽军　陈　群　张喜红

高等教育出版社

内容简介

本书是与张选群主编的《医科高等数学》配套的辅导用书。全书按第一章函数、极限与连续，第二章一元函数微分学，第三章一元函数积分学，第四章多元函数微积分，第五章微分方程基础，第六章概率论基础，第七章线性代数基础等内容与顺序编排，但逐章逐节分别讲解了其知识要点与基本要求，对重点与难点进行了分析，并配有各章节思考题与练习题的详细解答过程。

本书既可以帮助教师备课，又可以辅导学生进行思考、提高学生学习的效率与解题的技巧。每一章最后还附有模拟试题与答案，可供教师草拟试卷时参考，也可作为学生期末应试前的模拟演练。

本书可供高等医药院校各专业学生使用，也可供从事基础医学、临床医学、预防医学、口腔医学、卫生管理学的教学与科研人员作学习参考。

图书在版编目(CIP)数据

医科高等数学学习辅导/张选群主编. —北京：高等教育出版社，2006.7

ISBN 7-04-019621-2

Ⅰ. 医... Ⅱ. 张... Ⅲ. 医用数学：高等数学-医学院校-教学参考资料 Ⅳ. R311

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 059938 号

策划编辑 李蕊 **责任编辑** 李陶 **封面设计** 张楠 **责任绘图** 尹文军
版式设计 张岚 **责任校对** 朱惠芳 **责任印制** 宋克学

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京人卫印刷厂	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	850×1168 1/16	**版　　次**	2006年7月第1版
印　　张	14.25	**印　　次**	2006年7月第1次印刷
字　　数	350 000	**定　　价**	15.90元

物料号 19621-00

前　言

为了贯彻“教育部关于加强高等学校本科教学工作提高教学质量的若干意见”，这本《医科高等数学学习辅导》对《医科高等数学》的每一章每一节的知识要点与基本要求都作出了明确的标志，这无疑对医科高等数学的教学具有重要的指导意义。这些知识要点与基本要求都是经过全国医科数学教学研讨会审慎确定的，教师可以根据本书所强调的内容与要求结合自己本校具体实施的教学时数制订出最适宜的教学计划。

本书对各章各节的重点与难点逐一进行了分析，因此它又是课堂教学的辅导与补充材料，并能指导学生自学高等数学，提升课堂教学的效果；同时对《医科高等数学》各章节中的思考与讨论作出了翔实的解答，有助于学生加深对高等数学基本理论的理解，启迪学生去抽象思维，从而提高学生的研究能力。

对于《医科高等数学》中的所有习题，本书都给出了详尽的解答，同时还附加了模拟试题，以便于学生自检自测，提高学习质量。

除了《医科高等数学》的编者外，参与本书编写的还有长治医学院张喜红、福建医科大学刘春扬、昆明医学院和丽军、泰山医学院王清、宁夏医学院陈群、湖北中医学院刘巍，欢迎教师和学生对本书多提宝贵意见。

张选群

2006.3

目 录

第一章 函　　数

一　知识要点与基本要求

§1　函数

知识要点

1. 函数的定义和表达方式；
2. 函数的复合与分解；
3. 函数的基本性质.

基本要求

1. 理解函数定义的三个要素及三种表达方式的转换，会求函数的定义域和值域；
2. 掌握复合函数的复合运算与分解运算，会求函数的反函数；
3. 理解分段函数的定义和复合运算；
4. 掌握函数的 4 种基本性质的意义和判别方式.

§2　极限

知识要点

1. 函数和数列极限的定义，极限四则运算法则；
2. 两个极限存在性判定法则，两个重要极限；
3. 无穷大量和无穷小量.

基本要求

1. 理解函数极限的定义，掌握用左右极限来判断极限存在性的方法；
2. 掌握极限四则运算法则，会利用两个重要极限来进行极限运算；
3. 理解无穷大量和无穷小量的定义、性质和运算法则，及其等价性.

§3　连续

知识要点

1. 函数连续性的定义；
2. 函数的间断点；
3. 初等函数的连续区间；
4. 闭区间上连续函数的性质.

基本要求

1. 理解函数连续性的定义，函数连续性和极限存在性的关系；
2. 会求函数的间断点和连续区间，会判断分段函数在分段点处的连续性；
3. 掌握闭区间上连续函数的性质，会判断函数零点的存在性和存在区间.

二 重点与难点分析

§1 函数

重点分析

1. 函数定义中的三个要素是缺一不可的，而因变量随自变量的变化而变化的对应规律必须是确定的. 例如，矩形的面积 y 与矩形的周长 x 有关，但周长 x 的变化怎样影响面积 y 的变化却是不明确的，此时，两个变量不构成函数关系. 因此，函数定义的两个要点，即定义域和对应规律中，对应规律是第一位的. 只要关于两个变量的对应规律客观存在，并且此规律能够应用于定义域内每一点上，此对应规律就建立起一个函数关系. 而且，此函数的存在与用什么方式来表达这个函数无关，除了解析式公式、图像、列表外，函数还可以用其他方式表示，如用分段函数，隐函数，级数或积分表示. 两个函数相等的条件，详见思考与讨论的相关部分.

2. 求函数的定义域，如果理解为已经先有一个函数，然后再有其定义域，则是不妥当的，因为函数及其定义域是不可分离的. 但是，当函数用某个解析式来表示时，常常没有明确标示其定义域，虽然此定义域是客观存在的. 因此，“求函数的定义域”就是根据此解析式或实际问题的约束来明确地指出其定义域，有如下一些原则：

(1) 自变量要取偶次根式时，根号里的值非负；

(2) 分式函数的分母不能为零；

(3) 对数函数的真数值为正；

(4) 奇函数或偶函数的定义域关于原点对称；

(5) 有限多个函数的四则运算得到的新函数，其定义域为诸函数定义域之交集；

(6) 反函数的定义域是原来函数的值域；

(7) 复合函数 $f[\omega(x)]$ 的定义域是其内层函数 $\omega(x)$ 的定义域之子集，在此子集上，内层函数 $\omega(x)$ 的值域是外层函数 $f(x)$ 的定义域之子集；

(8) 分段函数在分段点处有无定义或怎样定义的，须观察其左右的相邻区间上函数是怎样定义的；分段点是否属于其中一个区间，等等；

(9) 在生命科学里，具有理化生理和医学临床实际意义的函数，其定义域往往是其解析式表达的(纯数学的) 函数的定义域之子集.

3. 因为，复合函数的定义域是其内层函数的定义域之子集，在此子集上，内层函数的值域是外层函数的定义域之子集. 所以，如果函数 $f(x)$ 的值域 R 是其定义域 D 之子集时，此函数就可以自我复合得 $f[f(x)]$. 而且，这种自我复合可以一直进行下去. 在数学上，这种运算是迭代运算的特殊形式. 两个函数 $f(x)$ 和 $g(x)$，能够相互复合，就要求两个函数的值域皆属于另一个函数的定义域，即：$R_1 \in D_2$ 且 $R_2 \in D_1$. 详见思考与讨论的相关部分.

难点分析

1. **反函数的概念** 设有函数 $y=f(x)$，$x \in D$，$y \in R$. 若每个 x 都只有一个 y 与之对应，且

不同的 x 与不同的 y 对应(即:$y_1=f(x_1)$,$y_2=f(x_2)$,若 $y_1=y_2$ 就必有 $x_1=x_2$),则依相同的对应法则,每一个 y 也决定一个 x,即是 x 也是 y 的函数,记为 $x=g(y)$,并称此函数为原来函数的反函数,具有性质

(1) $y=f(x)$和 $x=g(y)$本质上是同一个函数(有相同的对应法则),并且成立

(2) $f[g(y)]=f(x)=y$ 和 $g[f(x)]=g(y)=x$. 即是对任何变量(字母),恒有 $f[g(u)]=g[f(u)]=u$. 如果在此反函数中,交换 x 和 y 的位置(自变量和因变量的地位),则得到一个新函数 $y=g(x)$,仍称为 $y=f(x)$的反函数,记为 $y=g(x)=f^{-1}(x)$(f^{-1}中的 -1 不表示负的 1,表示反关系),并且

① $y=f(x)$和 $y=g(x)=f^{-1}(x)$是两个不同的函数(对应关系不同);

② 任何一对反函数 $y=f(x)$和 $y=f^{-1}(x)$总有:$f[f^{-1}(x)]=f^{-1}[f(x)]=x$;

③ 一对反函数的定义域和值域刚好互换;

④ 一对反函数的图像关于直线 $y=x$ 对称;而函数 $y=x$ 的反函数还是 $y=x$,称为恒等函数,记为 $I(x)=x$. 函数和反函数构成一对互逆的运算,且满足:

$$f[f^{-1}(x)]=f^{-1}[f(x)]=I(x)=x.$$

基本初等函数中的函数和反函数关系有:

① x^a 的反函数是 $x^{\frac{1}{a}}$,即幂函数的反函数还是幂函数;

② 同底的指数函数 a^x 和对数函数 $\log_a x$ 互为反函数;

③ 三角函数和各自的反三角函数互为反函数,如:$\sin x$ 和 $\arcsin x$.

2. 复合函数的分解 如果复合函数的外层函数和内层函数都是确定的基本初等函数,则复合与分解都不困难. 但是,如果复合运算是和四则运算混合在一起,或某一层函数关系是抽象的,此时,可按数值运算的自然顺序来处理函数关系的分解. 具体说来,就是在定义域中选定一个特定值 x_0,然后代入复合函数进行计算,直到得出相应的函数值 y_0. 把此 x_0 所经历的运算按相反顺序记录,就得到复合函数的分解过程.

例 1 设 $y=\ln f[\arctan(x^2-\mathrm{e}^{-\sin\sqrt{x}})]$,试分析复合结构.

解 可认为:$y=\ln u,u=f(v),v=\arctan w,w=p+q,\begin{cases}p=x^2,\\ q=-\mathrm{e}^r,r=-\sin s,s=\sqrt{x}.\end{cases}$

这里,符号{表示并列的分解. 打个比喻,复合运算相当于串联线路,四则运算相当于并联线路,混合运算的流程图,就是一个混合电路.

3. 分段函数的复合函数 当复合函数的外层函数是分段函数时,须视内层函数的函数值处于外层函数的定义域内的哪一个区间,来决定下一步运算该调用外层函数的哪一个表达式.

例 2 已有 $f(x)=\begin{cases}3x, & x\geqslant 0;\\ x, & x<0\end{cases}$ 和 $g(x)=\begin{cases}-x/3, & x\geqslant 0;\\ 5x/3, & x<0,\end{cases}$ 求 $f[g(x)]$.

解 当 $x\geqslant 0$ 时,函数 $g(x)$的对应值为 $-x/3$,非正,故此值代入函数 $f(x)$时,应代入当 $x<0$ 时的表达式,就成为 $-x/3$,即:当 $x\geqslant 0$ 时,复合函数 $f[g(x)]=-x/3$;当 $x<0$ 时,$g(x)$的对应值为 $5x/3<0$,非正,代入 $f(x)$时,仍应代入当 $x<0$ 时的表达式,就成为 $5x/3$,即:当 $x<0$ 时,复合函数 $f[g(x)]=5x/3$. 综合两者,

$$f[g(x)]=\begin{cases}-x/3, & x\geqslant 0;\\ 5x/3, & x<0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad f[g(x)]=g(x).$$

这个例还顺便表明：存在某些 x 使 $f(x)=x$ 只是 $f(x)=I(x)$ 的必要条件而非充分条件.

4. 函数的奇偶性判断　首先，具有奇偶性的函数，其定义域必是对称区间，此为必要条件. 其次，具有奇偶性的函数 $f(x)$ 须满足

$$f(-x)=\begin{cases}-f(x), & \text{奇函数};\\ f(x), & \text{偶函数}\end{cases} \Rightarrow f(x)+f(-x)=\begin{cases}0, & \text{奇函数};\\ 2f(x), & \text{偶函数}.\end{cases}$$

此外，两个有奇偶性的函数的四则运算结果之奇偶性小结如下（等号只表示具有性质）：

偶函数×偶函数＝偶函数；　偶函数±偶函数＝偶函数；

偶函数×奇函数＝奇函数；　偶函数±奇函数＝非奇非偶的函数；

奇函数×奇函数＝偶函数；　奇函数±奇函数＝奇函数.

而奇函数和偶函数的复合，还是偶函数，例如，$f(x)=\sin x$ 是奇函数，$g(x)=|x|$ 是偶函数，二者之复合，$f[g(x)]=\sin|x|$ 和 $g[f(x)]=|\sin x|$ 都是偶函数.

例 3　证明定义在对称区间 $(-a,a)$ 上的任何一个函数 $f(x)$ 皆是一个奇函数与一个偶函数之和.

证　取 $u(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ 和 $v(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$，因为有

$$u(-x)=\frac{f(-x)+f[-(-x)]}{2}=u(x),$$

$$v(-x)=\frac{f(-x)-f[-(-x)]}{2}=-\frac{f(x)-f(-x)}{2}=-v(x).$$

所以知 $u(x)$ 是偶函数，$v(x)$ 是奇函数，并且恰有 $f(x)=u(x)+v(x)$ 是一个奇函数与一个偶函数之和.

5. 函数的有界性判断　函数的有界性总是与自变量的变化范围相联系的. 如果 $f(x)$ 在定义域 D 上有界，则 $f(x)$ 在 D 的任何子域上也有界. 反之，若 $f(x)$ 在 D 上无界，$f(x)$ 仍然有可能在 D 的某些子域上有界. 如果存在常数 $M>0$，使在所论区域 D_0 上有 $|f(x)|\leqslant M$，则在区域 D_0 上 $f(x)$ 有界. 反之，若对任何充分大的 $G>0$，总有 $x\in D_0$ 使 $|f(x)|\geqslant G$，则在区域 D_0 上 $f(x)$ 无界. 具体分析时往往需要一些技巧，通常是把 $f(x)$ 与某个熟知其有界性的基本初等函数相比较来进行判别. 如果函数是连续的，则在闭区间上有界.

例 4　设函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}$，证明：

(1) 设 $0<a<1$，则 $f(x)$ 在闭区间 $[a,1]$ 上有界；

(2) $f(x)$ 在开区间 $(0,1)$ 上无界.

证　(1) 因为对任何 $x\in[a,1]$ 都有

$$|f(x)|=\left|\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\right|=\left|\frac{1}{x}\right|\left|\cos\frac{1}{x}\right|\leqslant\left|\frac{1}{x}\right|=\frac{1}{x}\leqslant\frac{1}{a},$$

如果取 $M=1/a>0$，则在闭区间 $[a,1]$ 上 $|f(x)|\leqslant M$，即 $f(x)$ 在 $[a,1]$ 上有界.

(2) 至于 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上的无界性，因为 $1/x$ 在 $(0,1)$ 上是无界的，要是取这样的 x_0，使 $\left|\dfrac{1}{x_0}\right|$ 很大同时 $\left|\cos\dfrac{1}{x_0}\right|$ 不是太小，从而乘积就能大于给定的大数 G. 设 $N_0>G/2\pi$，这里 N_0 是一个正整数，

$$x_G=\frac{1}{2\pi N_0}\in(0,1)\quad\Rightarrow\quad|f(x_G)|=|2\pi N_0\cos(2\pi N_0)|=2\pi N_0>G,$$

这就表明 $f(x)$在$(0,1)$上无界.

6. 函数的单调性判断　设 $x_1\in D, x_2\in D$ 且 $x_1<x_2$,则

$$f(x_2)-f(x_1)>0, f(x)\text{是单调增加的;}$$
$$f(x_2)-f(x_1)<0, f(x)\text{是单调减少的,}$$

并且,称这样的 $f(x)$是严格单调的. 如果不等号还加上等号,就称 $f(x)$是单调的,或分别称 $f(x)$是非降的或非增的. 在高等数学课程里,主要依赖函数的导数来判断函数的单调性,详见第二章. 而数列的单调性,往往通过类似的函数的单调性来判断.

例 5　当 $x>1$ 时,$f(x)=\dfrac{1}{x-\ln x}$是单调减的 $\Rightarrow$ $u_n=f(n)=\dfrac{1}{n-\ln n}$是单调减的.

§2　极限

重点分析

1. 函数极限的概念　函数极限的定义粗略分为四种形式,分别描述了自变量和函数变量的四种不同变化方式的基本特征.

$f(x)$趋于确定常数		$f(x)$不趋于任何常数	
$x\to x_0$,	$f(x)\to A$	$x\to x_0$,	$f(x)$不趋于任何常数,也不趋于无穷大
$x\to\infty$,	$f(x)\to A$	$x\to\infty$,	$f(x)$不趋于任何常数,也不趋于无穷大

设 $y=f(x)$在 x_0 的某个去心邻域内有定义. 如果 $x\to x_0$,就有 $f(x)\to A$,那么就定义 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$. 在其描述性定义和分析性定义里,两个趋向于,即“$x\to x_0$”和“$f(x)\to A$”的逻辑约束关系是一致的,亦即对于任何给定的非常小的正数 ε,如果要求 $f(x)$与 A 之差非常小,即是 $|f(x)-A|<\varepsilon$(即 $f(x)\to A$),那么只须 x 与 x_0 之差非常小,即$|x-x_0|<\delta$(即 $x\to x_0$),而且只要 $0<|x-x_0|<\delta$,就必有$|f(x)-A|<\varepsilon$. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充要条件是:**对所有这样的 ε,满足$|f(x)-A|<\varepsilon$ 的 δ 都总是存在的.** 在定义中,不必要求 x 最终达到 x_0,只要求 x 越来越接近 x_0.

(1) 设函数 $y=f(x)$在 x_0 的某个去心邻域内有定义,并且 $x=x_0+\Delta x$ 在此邻域内,若存在常数 A^+,使得如果 $\Delta x>0$ 且 $\Delta x\to 0$ 时(即 $x\to x_0^+$), $f(x)\to A^+$,则定义

$f(x)$在 x_0 处的右侧极限为 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}f(x_0+\Delta x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A^+$;

若存在常数 A^-,使得如果 $\Delta x<0$ 且 $\Delta x\to 0$ 时(即 $x\to x_0^-$),$f(x)\to A^-$,则定义

$f(x)$在 x_0 处的左侧极限为 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}f(x_0+\Delta x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A^-$.

如果 $A^+=A^-=A$,则自变量 x 不论以何种方式趋向于 x_0,函数 $f(x)$的极限都为 A. 而按照定义,如果函数 $y=f(x)$在 x_0 处的极限存在且等于 A,此极限值与 x 趋向于 x_0 的方式无关,所以,

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \iff \lim_{x\to x_0^+}f(x)=\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A.$$

在具体问题中,两个单侧极限可能一个都不存在,可能只有一个存在,或者虽然都存在却不相等,这些情形都属于极限不存在. 只有在函数定义域区间的端点处,**单侧极限的存在性就等同于极限的存在性.**

(2) 类似地,自变量趋于无穷大时,若有必要,就要区分是趋于正无穷大还是负无穷大.

2. 极限的四则运算法则　这些法则能极大地简化许多复杂函数的极限运算. 但前提是，**在同一极限过程中**，各个函数的极限都分别存在，而且，分母的极限还不能等于零，满足了这些条件，就可以说**多个函数的四则运算的极限，等于各个函数的极限的相应四则运算值**. 实际应用时，可以一边求极限，一边判断其中涉及的表达式是否存在极限. 如果分子分母的极限都等于零，或都是无穷大，商的极限公式不再成立，就需要采用别的方式进行运算，常见情形有：

(1) 分子分母因式分解后约去零因子(或无穷大因子)；

(2) 零因子涉及根式时，分子分母同乘以该零因子的共轭式，$(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})$以$(\sqrt{a}\mp\sqrt{b})$为其共轭式；$(\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b})$的共轭式是$(\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})$.

(3) 零因子涉及三角函数时，需进行适当变形后引用基本极限$\lim\limits_{\square\to 0}\dfrac{\sin\square}{\square}=1$；

(4) 零因子涉及指数函数或对数函数时，适当变形或替换变量后引用基本极限

$$\lim_{\square\to\infty}\left(1+\frac{1}{\square}\right)^{\square}=\mathrm{e}\quad 和\quad \lim_{\square\to 0}(1+\square)^{1/\square}=\mathrm{e}.$$

例 6　设 $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_rx^r}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_sx^s}$，其中 $n\geqslant r, m\geqslant s$ 皆为正整数，关于函数 $f(x)$的极限，有以下几种情况：

(1) $x\to x_0$ 且 $Q(x_0)\neq 0$，则

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\frac{\lim P(x)}{\lim Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}=f(x_0),[Q(x_0)\neq 0].$$

(2) $x\to\infty$，决定 $f(x)$之极限的是 $P(x)$和 $Q(x)$的最高次项，若 $L=\max[n,m]$，分子分母同除以 x^L，即分子分母同提出公因子 x^L，则 $n-L$ 和 $m-L$ 中至少一个为零，于是

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^L(a_nx^{n-L}+a_{n-1}x^{n-1-L}+\cdots+a_rx^{r-L})}{x^L(b_mx^{m-L}+b_{m-1}x^{m-1-L}+\cdots+b_sx^{s-L})}=\begin{cases}0, & n<m;\\ a_n/b_m, & n=m;\\ \infty, & n>m.\end{cases}$$

(3) $x\to 0$，决定 $f(x)$之极限的是 $P(x)$和 $Q(x)$的最低次项，若 $L=\min[s,r]$，分子分母同提出公因子 x^L，则 $r-L$ 和 $s-L$ 中至少一个为零，于是

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^L(a_nx^{n-L}+a_{n-1}x^{n-1-L}+\cdots+a_rx^{r-L})}{x^L(b_mx^{m-L}+b_{m-1}x^{m-1-L}+\cdots+b_sx^{s-L})}=\begin{cases}\infty, & r<s;\\ a_r/b_s, & r=s;\\ 0, & r>s.\end{cases}$$

(4) $x\to x_0$ 且 $P(x_0)=0, Q(x_0)=0$. 设 x_0 分别是 $P(x)$和 $Q(x)$的 k 重和 l 重根，即

$$P(x)=(x-x_0)^kp(x)\ 和\ Q(x)=(x-x_0)^lq(x),$$

其中 $k\geqslant 0, l\geqslant 1$ 皆整数，并且 $p(x_0)\neq 0, q(x_0)\neq 0$，容易看出，

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)^kp(x)}{(x-x_0)^lq(x)}=\begin{cases}\infty, & k<l,\\ p(x_0)/q(x_0), & k=l,\\ 0, & k>l.\end{cases}$$

例 7　设 $f(x)=\dfrac{x^4-2x^3+x^2}{x^3-3x^2+2x}$，引用上面例 6 的结论，有

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x(x^3-2x^2+x)}{x(x^2-3x+2)}=0\quad (r=2>1=s);$$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4\left(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^4\left(\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)}=\infty\quad(n=4>3=m);$$

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^2(x-1)^2}{x(x-1)(x-2)}=0\quad(k=2>1=l);$$

$$\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}\frac{x^2(x-1)^2}{x(x-1)(x-2)}=\infty\quad(k=0<1=l).$$

3. 两个重要极限

$$\lim_{\square\to0}\frac{\sin\square}{\square}=1\quad 和\quad \lim_{\square\to\infty}\left(1+\frac{1}{\square}\right)^{\square}=\mathrm{e}\quad(或\quad \lim_{\square\to0}(1+\square)^{1/\square}=\mathrm{e})$$

实际上都属于不定型. □无论是简单变量还是复杂表达式,上面三式都成立.

4. 无穷小量和无穷大量　在 x 的变化(极限)过程中,若变量 $f(x)$ 以零为其极限,则这 $f(x)$ 是无穷小量;若 $f(x)$ 趋向无穷大,则 $f(x)$ 是无穷大量. 在同一极限过程中,无穷小量的倒数是无穷大量,无穷大量的倒数是无穷小量. 无论是无穷小量还是无穷大量,都是变化着的量. 固定的常量,再小(0 除外)也不是无穷小量,再大也不是无穷大量.

例 8　设 $x_n=\dfrac{n^{1-(-1)^n}}{n}=\begin{cases}1/n, & n=偶数;\\ n, & n=奇数,\end{cases}$ x_n 是否为无穷小,无穷大,有界?

解　虽然 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k}=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1}{2k}=0$,但当 $n\to\infty$ 时,x_n 不是无穷小量,因为无论 n 有多大,x_n 都不能做到总是任意地小;同理,虽然 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k-1}=\lim\limits_{k\to\infty}(2k-1)=+\infty$,$x_n$ 不是无穷大量,因为无论 n 有多大,x_n 都不能做到总是任意地大. 显然,x_n 是无界的. 见思考与讨论的相关部分.

涉及无穷小量和无穷大量的四则运算,所具有的性质可总结为形式上的运算律,其中 0 是数零,c 是非零常数,α 表示无穷小量,∞ 表示无穷大量(等号只表示具有性质):

(1) $c\pm\alpha=c$,　$c\times\alpha=\alpha$,　$c\pm\infty=\pm\infty$,　$c\times\infty=\infty$,
　$\alpha/c=\alpha$,　$\infty/c=\infty$,　$c/\alpha=\infty$,　$c/\infty=\alpha$;

(2) $\alpha\pm\alpha=\alpha,\alpha\times\alpha=\alpha,\alpha\pm\infty=\pm\infty,\alpha/\infty=\alpha,\infty\times\infty=\infty,\infty/\alpha=\infty$;

(3) $c\times0=0,\alpha\times0=0,\infty\times0=0,0/\alpha=0,0/\infty=0$;

5. 不定型　两个无穷小量(或两个无穷大量)之比,以及无穷小量同无穷大之积,其极限之存在与否,各种情形都有实例,因而不能直接判断,故称为不定型. 求不定型的极限,实际上就是比较两个无穷小(或无穷大)的变化快慢程度,因此规定:

$\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 都是无穷小量:	$\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 都是无穷大量:
$\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\begin{cases}0, & \alpha 是高阶无穷小;\\ \infty, & \beta 是高阶无穷小;\\ c\neq0, & \alpha 与 \beta 是同阶无穷小.\end{cases}$	$\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\begin{cases}0, & \beta 是高阶无穷大;\\ \infty, & \alpha 是高阶无穷大;\\ c\neq0, & \alpha 与 \beta 是同阶无穷大.\end{cases}$

特别,当 $c=1$ 时,两个变量称为是等价的,并且,在乘积中可以互换后再取极限. 常见的几种不定型分列如下,其中 1 表示以 1 为极限的变量:

$$\alpha/\alpha,\infty/\infty,\alpha\times\infty,\infty\pm\infty,\alpha^{\infty},\infty^{\alpha},\alpha^{\alpha},1^{\infty},1^{\alpha}.$$

难点分析

1. 分段函数在分段点处的极限　需要分别计算分段点处的左右极限，在求单侧极限时，不同的区间上采用不同的函数表达式.

例 9　设 $f(x)=\begin{cases} x\ln x, & 0<x<1; \\ \dfrac{\ln x}{x}, & 1<x<+\infty, \end{cases}$ 求 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$.

解　$f(x)$ 在 $x=1$ 处没有定义，但在 $x_0=1$ 的邻域内有定义，则

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}x\ln x=0 \text{ 且 } \lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln x}{x}=0 \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to 1}f(x)=0.$$

2. 利用夹逼准则求极限　适用于有界变量. 关键技巧是函数式的放大和缩小，以得到两个简单表达式，容易求极限，且极限相等. 当然，放缩须适度. 放大得太猛，以至于要趋于无穷大，就达不到目的.

例 10　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{1}{n^2+\mathrm{e}}+\dfrac{1}{n^2+2\mathrm{e}}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n\mathrm{e}}\right)$.

解　当 $n\to\infty$ 时，这是求无穷多个无穷小量之和，极限四则运算法则失效，但对任何确定的 n，括号里的分式之中，$\dfrac{1}{n^2+\mathrm{e}}$ 最大，$\dfrac{1}{n^2+n\mathrm{e}}$ 最小，若分别替代括号中每一项，则

$$1\leftarrow\frac{n^2}{n^2+n\mathrm{e}}<n\left(\frac{1}{n^2+\mathrm{e}}+\frac{1}{n^2+2\mathrm{e}}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\mathrm{e}}\right)<\frac{n^2}{n^2+\mathrm{e}}\to 1 \quad (n\to\infty).$$

故由夹逼定理得：
$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{1}{n^2+\mathrm{e}}+\frac{1}{n^2+2\mathrm{e}}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\mathrm{e}}\right)=1.$$

3. 利用两个重要极限

例 11　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$.

解　令 $u=\arcsin x$，则 $x=\sin u$ 且 $x\to 0\Leftrightarrow u\to 0\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{u}{\sin u}=1$.

例 12　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\tan\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos\ln(1+x)}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\ln(1+x)}{\ln(1+x)}=1$.

例 13　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-1}{x}$.

解　令 $u=3^x-1$，则 $x=\log_3(1+u)$ 且 $x\to 0\Leftrightarrow u\to 0$，

$$\lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{x}=\lim_{u\to 0}\frac{u}{\log_3(1+u)}=\lim_{u\to 0}\frac{1}{\log_3[(1+u)^{1/u}]}=\frac{1}{\log_3\mathrm{e}}=\frac{1}{\ln\mathrm{e}/\ln 3}=\ln 3.$$

4. 利用单调有界准则判断极限存在

例 14　$S_n=\left(\dfrac{1}{1+2}+\dfrac{1}{1+2+3}+\cdots+\dfrac{1}{1+2+\cdots+n}\right)$，$S_n$ 显然单调递增，又因

$$S_n=\sum_{k=2}^{n}\frac{2}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+1)}-1\leqslant 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}-1<\frac{\pi^2}{3}-1 \quad \left(\text{参考级数}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}\right),$$

因此可以判断 $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$ 存在.

5. 利用等价替换求极限

例 15　求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+\mathrm{e}^x)\ln\left(1+\dfrac{\pi}{x}\right)$.

解　这是无穷大量与无穷小量之积，需要先作恒等变形后，再选择适当的等价替换.

$$\ln(1+e^x)=\ln\left[e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)\right]=x+\ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right),$$

因为，当 $x\to 0$ 时，$\ln(1+x)\sim x$. 所以，如果 $x\to+\infty$，则 $\ln(1+\pi/x)\sim\pi/x$. 同理，

$$x\to+\infty\text{ 时 }\quad \frac{1}{e^x}\to 0\quad\Rightarrow\quad \ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right)\sim\frac{1}{e^x},$$

所以，如果 $x\to+\infty$，则

$$\lim_{x\to+\infty}\ln(1+e^x)\ln\left(1+\frac{\pi}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)\right]\frac{\pi}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left[x+\ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right)\right]\frac{\pi}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\frac{\pi}{x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi}{x}\ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right)=\pi+\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi}{x}\frac{1}{e^x}=\pi.$$

需要特别注意的是，上面运算过程中，**等价替换只在乘积中施行**. 如果在和式中就进行等价代换，如

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x+\ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right)\right]\frac{\pi}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{1}{e^x}\right)\frac{\pi}{x}=\pi,$$

虽然结果是正确的，但过程是错误的，会冒犯大错的风险！例如：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{6}$，如果因为当 $x\to 0$ 时，$\sin x\sim x$，就把分子中 $\sin x$ 的替换成等价无穷小 x，就得

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}\xrightarrow{\text{等价替代}}\lim_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x^3}=0,\text{ 结果错.}$$

§3 连续

重点分析

1. 函数连续性的等价定义和意义 设函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处及其邻域内有定义，$\Delta x=x-x_0$，$\Delta x\to 0\Leftrightarrow x\to x_0$. 对应于此 Δx 有 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续之等价条件有：

(1) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=0$（自变量和因变量的增量间的关联）；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}\Delta y=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)-f(x_0)=0$（极限值与函数值之间的关联）；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$（左、右极限值与函数值之间的关联），

此时，称 x_0 为 $f(x)$ 的连续点. 如果某个区间（开的或闭的），其中每一点都是 $f(x)$ 的连续点，则 $f(x)$ 是此区间上的连续函数，此区间是 $f(x)$ 的连续区间. 连续的函数有一些良好的数学性质，大致归纳起来：

(1) 有广泛的应用 自然、技术、社会科学中连续变化的现象和过程不胜枚举. 在生命科学特别是医学领域里，很多量，例如新生婴儿的体温、体重、体长、体表等指标，都是随时间而连续变化的. 如果人口数量很大，如中国人口，则可以当作是连续变化的.

(2) 可预测其局部性态 假若 $f(x)$ 在 x_0 连续，$f(x)$ 在 x_0 处的取值对 $f(x)$ 在 x_0 的邻域里的取值会产生约束的作用，因为，只要 x 充分接近 x_0，$f(x)$ 就充分接近 $f(x_0)$. 因此，只要知道了 $f(x_0)$，就能估计到 $f(x)$ 在 x_0 邻域里取值的大致范围.

(3) 简化极限运算 假若 $f(x)$ 在 x_0 连续，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(\lim\limits_{x\to x_0}x)$，这表明两种不同的运算，函数（映射）运算和极限运算可以交换实施的先后顺序. 在实效上，求极限值就简化成了函数的

代入运算.

(4) 保持闭区间上的整体性　若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,其值域也是闭区间 $[c,d]$,其中 c,d 分别是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值和最大值. 由此得出 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的整体性质:有界,有最值,保号(见习题一之 34,35)等.

2. 函数的间断点类型　$f(x)$ 在 x_0 不连续,则 x_0 是 $f(x)$ 的不连续点,或称间断点. $f(x)$ 的间断点具有下列一种或数种情形:

(1) $f(x)$ 在 x_0 无定义;

(2) $f(x)$ 在 x_0 无极限;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$.

第二种情形可细分为:$f(x)$ 在 x_0 的左右极限均不存在,或只有一个存在,或都存在却不相等. 只要左右极限都存在,则 x_0 是 $f(x)$ 的第一类间断点;否则为第二类间断点.

例 16　$f(x)=\begin{cases} x\ln x, & 0<x<1; \\ \dfrac{\ln x}{x}, & 1<x<+\infty, \end{cases}$ $f(x)$ 在 $x=1$ 无定义,在例 9 的求解过程中已得到

$$\lim_{x\to 1} f(x)=0,$$

故 $x=1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点. 因为 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=0$ 存在,$x=1$ 是 $f(x)$ 的可去间断点,亦即可补充定义使 $f(x)$ 在 $x=1$ 连续:

$$f(x)=\begin{cases} x\ln x, & 0<x<1; \\ 0, & x=1; \\ \dfrac{\ln x}{x}, & 1<x<+\infty. \end{cases}$$

例 17　设 $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$,求间断点及其类型.

解　这是复合函数,首先,商 $\dfrac{x}{1-x}$ 在 $x=1$ 处无定义,是间断点. 又当 $x=0$ 时,有

$$\lim_{x\to 0} e^{\frac{x}{1-x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{1-x}}=1 \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to 0}(1-e^{\frac{x}{1-x}})=0 \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}=\infty,$$

故 $x=0$ 也是间断点,且为第二类间断点(无穷间断点). 至于在 $x=1$ 处,因为

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x}{1-x}=-\infty \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to 1^+} e^{\frac{x}{1-x}}=0 \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}=1$$

和

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x}{1-x}=+\infty \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to 1^-} e^{\frac{x}{1-x}}=+\infty \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}=0,$$

则 $x=1$ 是第一类间断点.

3. 初等函数的连续性　函数的定义域涵盖了其所有有定义的点,一般的初等函数,其定义域为一个或多个或开或闭的区间,我们说所有初等函数在其定义域内都是连续的,都是指在这样的区间上。但也有某些初等函数,其定义域可能只是几个孤立点,例如,$f(x)=\sqrt{x}-\sqrt{-x}$ 的定义域只包含 $x=0$ 这一个点. 在孤立点处,是没有连续性可言的. 连续函数的四则运算和复合运算的结果仍是连续函数,这是充分性性质. 相反的情形需个案处理,见思考与讨论相关部分.

4. 闭区间上连续函数的性质　包括最值定理,介值定理,有界定理和零点定理,其充分性