农林院校必修课

考试辅导丛书

概率论与数理统计

GAI LÜ LUN YU SHU LI TONG JI

（修订版）

刘军凤　刘建明　等　编著

- 紧扣教学大纲
- 梳理知识体系
- 解读重点难点
- 网罗名校真题

科学技术文献出版社

《农林院校必修课考试辅导》丛书

概率论与数理统计

（修订版）

刘军凤　刘建明
经　玲　石媛昌　编著

科学技术文献出版社
Scientific and Technical Documents Publishing House
北　京

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/刘军凤等编著.-2版(修订版). -北京:科学技术文献出版社,2006.7

(农林院校必修课考试辅导丛书)

ISBN 7-5023-4367-9

Ⅰ.概… Ⅱ.刘… Ⅲ.①概率论-高等学校-教学参考资料 ②数理统计-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第065082号

出　版　者 科学技术文献出版社
地　　　址 北京市复兴路15号(中央电视台西侧)/100038
图书编务部电话 (010)58882909,(010)58882959(传真)
图书发行部电话 (010)68514009,(010)68514035(传真)
邮购部电话 (010)58882952
网　　　址 http://www.stdph.com
E-mail: stdph@istic.ac.cn
策划编辑 袁其兴
责任编辑 袁其兴
责任校对 唐　炜
责任出版 王杰馨
发　行　者 科学技术文献出版社发行　全国各地新华书店经销
印　刷　者 富华印刷包装有限公司
版(印)次 2006年7月第2版第1次印刷
开　　　本 850×1168　32开
字　　　数 375千
印　　　张 12.5
印　　　数 1～6000册
定　　　价 18.00元

科学技术文献出版社方位示意图

(京)新登字 130 号

内 容 简 介

本书兼顾非数学专业《概率论与数理统计》教学大纲要求，对概率论基本概念、一维随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律及中心极限定理、数理统计基本概念、参数估计、假设检验、回归分析、方差分析等内容进行了总结、归纳和例题分析。例题的设计既注重基础知识、基本技能的训练，又考虑到了重点、难点的掌握，配置了部分提高题。例题分析注重解题思路、方法和要领。自测题附有参考答案。本书可供在校本科生、考研生及数学教师参考使用。

再版前言

鉴于《概率论与数理统计》为非数学专业公共基础课，其基本概念、原理、方法应该是一致的。本书不针对某一教材，兼顾非数学专业本科生教学大纲与考研大纲，列出各章基本要求。并对各章概念、理论、方法进行总结归纳，指出学习重点及难点。在300余道例题中，既安排了用于巩固基础知识训练基本技能的基本题，还配置了一部分提高题；例题分析不仅讲解思路、解法，而且强调要领。每一章都提供了自测试题并附有参考答案，以方便读者更好地掌握本章内容。为满足考研同学需求，书后还附录了1994—2006年硕士研究生入学试题，供广大读者参考。

书中还提供了大量关于农业、工程、社会、经济、医疗等科学试验和生产实际的例子，以开拓学生的知识面，传递学科之间交叉与渗透的信息，引导读者提高应用概率统计解决实际问题的能力。

本书中定理、概念准确、规范；基本内容叙述简练、重点突出，基本要求明确清晰，便于读者理解概念和掌握方法。

第二版简化了一些冗长计算，增加了实用的例子和 2005 年、2006 年部分考研试题。

本书可作为非数学各专业学生和实际工作者的良师益友，也可作为复习考研的参考资料。

建议读者阅读典型例题时，先独立思考、自行推导，然后再看我们的解法，以便开阔思路、掌握解题方法，提高解决问题、分析问题的能力。

因水平所限，加之时间仓促，书中内容难免有不妥之处，恳请广大读者指正。

编者

目　录

第一章

随机事件及其概率

本章是概率论基本概念，只有理解这些基本概念，熟悉本章的基本运算，才能为今后各章打下基础.

一、教学大纲基本要求

(1) 了解随机试验的概念，并据此分析试验结果，搞清样本空间包含哪些基本事件；搞清某一事件由哪些基本事件构成.

(2) 理解随机事件的概念，掌握事件的关系及运算，知道事件的运算律.

(3) 理解概率的定义，掌握概率性质，会判断概率模型(古典概型、几何概型和贝努利概型). 知道3个概型中概率的计算公式.

(4) 理解条件概率、事件独立性的概念，搞清事件的互不相容、互为对

立与相互独立三者之间的区别.

(5) 熟练应用概率的加法公式、乘法公式、全概公式及逆概公式.

二、本章知识要点

(一) 事件及其概率

1. 随机现象

在一次试验中出现什么结果呈现不确定性,而在大量重复试验中其结果又呈现出固有统计规律的现象.

2. 随机试验

满足以下 3 条的试验:

(1) 试验可以在相同条件下重复进行.

(2) 每次试验不止一个可能结果,且试验前明确所有可能结果.

(3) 一次试验之前不能确定哪个结果出现.

3. 随机事件(简称事件)

随机试验中可能发生可能不发生的结果.

(1) 必然事件:随机试验中必然发生的事件,记为 S.

(2) 不可能事件:随机试验中必然不发生的事件,记为 Φ.

必然事件和不可能事件都是确定性的,只是为研究方便,规定它们为特殊的随机事件.

(3) 随机试验中满足以下两条的结果称为基本事件:

① 每次试验出现且仅出现这些结果之中一个.

② 任何事件由这些结果之中若干个组成.

4. 样本空间

随机试验中全部基本事件组成的集合,记为 S.

随机事件是样本空间的子集;基本事件是样本空间的单点集;必然事件就是样本空间;不可能事件是空集.

概率通俗讲是描述随机事件发生的可能性大小的一个数.

（二）事件间的关系及其运算

1. 包含与相等

若事件 A 发生，事件 B 必发生，则称 B 包含 A. 记为 $B \supset A$ 或 $A \subset B$. 若事件 A 包含 B，且 B 也包含 A，则称事件 A 与 B 相等，记为 $A = B$.

2. 和

若事件 W 发生，事件 A 与 B 至少发生一个，则称 W 为 A 与 B 的和事件. 记为　$W = A \cup B$.

类似地可定义 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和为

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$$

也可定义可列无穷多个事件 $A_k (k = 1,2,\cdots)$ 的和为

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots = \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k$$

3. 积

若事件 W 发生则事件 A 与 B 同时发生，则称 W 为事件 A 与 B 的积事件. 记为 $W = A \cap B$ 或 $W = AB$.

类似地可定义 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的积为 $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \bigcap_{k=1}^{n} A_k$

也可定义可列无穷多个事件 $A_k (k = 1,2,\cdots)$ 的积为

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap \cdots = \bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k$$

4. 差

事件 A 发生，但事件 B 不发生，称为事件 A 与 B 的差事件发生，记为 $A - B$ 或 $A \cap \overline{B}$.

5. 对立事件

事件“非 A”称为 A 的对立事件，记为 $\overline{A}$.

一次随机试验中，事件 A 与 $\overline{A}$ 发生且仅发生一个. 即：事件 A 与 B 互为对立事件充要条件是 $A \cup B = S$ 且 $AB = \Phi$

6. 互不相容

若事件 A 与 B 满足 $AB = \Phi$，则称 A 与 B 互不相容.

注意:对立事件一定互不相容,反之两事件互不相容不一定对立.

7. 事件的运算规律

(1) 交换律:$A \cup B = B \cup A$;$AB = BA$;

(2) 结合律:$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;$(AB)C = A(BC)$;

(3) 分配律:$(A \cup B)C = (AC) \cup (BC)$;$(AB) \cup C = (A \cup C)(B \cup C)$;

(4)*De Morgan* 定律:$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$;$\overline{AB} = \bar{A} \cup \bar{B}$;(可推广到 n 个事件);

(5) 蕴含律:$(A \cup B) \supset A$;$(A \cup B) \supset B$;$AB \subset A$;$AB \subset B$;

(6) 重叠律:$A \cup A = A$;$AA = A$;

(7) 吸收律:$A \cup S = S$;$A \cup \Phi = A$;$A\Phi = \Phi$;

(8) 对立律:$A \cup \bar{A} = S$;$\bar{A}A = \Phi$;

(9) 两次求对立律:$\bar{\bar{A}} = A$.

(三) 事件的频率与概率

1. 频率

若 n 次试验中,事件 A 发生了 μ 次,则称 $f = \frac{\mu}{n}$ 为事件 A 在此 n 次试验中出现的频率.

2. 概率的统计定义

在一组不变条件 Ω 下重复进行 n 次试验,当试验次数 n 很大时,如果事件 A 发生的频率 $\frac{\mu}{n}$ 稳定地在一个数 p 附近摆动,而且一般说来随着 n 的增加,摆动幅度愈变愈小,则称事件 A 为随机事件;称数 p 为 A 事件在条件组 Ω 下发生的概率.记为:$P(A) = p$.

注意:频率是个变数;概率是个定数.

3. 概率的公理化定义

设随机试验 E 的样本空间为 S,对于 S 中每一个事件 A,赋于一个实数 $P(A)$,如果满足:

(1)$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$;

(2)$P(S) = 1,\ P(\Phi) = 0$;

(3) 对于任何两两互斥的事件 $A_i(i = 1,2,3,\cdots)$ 有

$$P(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i)$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

4. 概率的基本性质

(1) 对于任何事件 A,都有 $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$;

(2)$P(S) = 1, P(\Phi) = 0$;

(3) 若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容,则

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

(4) 对 A 和 $\overline{A}$,有 $P(A) = 1 - P(\overline{A})$;

(5) 若事件 $B \subset A$,则 $P(A-B) = P(A) - P(B)$,且 $P(A) \geqslant P(B)$;

(6) 加法公式:对任何事件 A, B 有:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

加法公式推广到多个事件,n 个事件的和事件的概率为:

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i \neq j} P(A_i A_j) + \sum_{i \neq j \neq k} P(A_i A_j A_k) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \cdots A_n).$$

5. 古典概型

若随机试验 E 满足(1) 有限性(样本空间含有有限个基本事件)(2) 等可能性(每个基本事件发生的概率相等),则称此概率模型为古典概型.

在古典概型中,A 事件的概率为

$$P(A) = \frac{A\text{ 包含基本事件总数}}{\text{样本空间基本事件总数}}$$

6. 几何概型

把随机试验 E 设想为向一个可度量(长度、面积、体积) 区域 Ω 内掷一质点,如果它满足以下两条,则称其为几何概型.

(1) 质点只能落在 Ω 内任意点上;且 Ω 是无限点集.

(2) 质点落在 Ω 内任意子区域 g 的概率仅与 g 的几何度量成正比，而与 g 的形状，位置无关.

在几何概型中，随机事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{A\text{ 的度量}}{\Omega\text{ 的度量}}$$

(四) 条件概率，乘法公式，独立性

1. 条件概率

设事件 A、B，且 $P(B)>0$，则称 $P(A/B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$ 为事件 B 发生的条件下事件 A 发生的条件概率.

条件概率的求法：

(1) 在原样本空间求 $P(B)$、$P(AB)$，然后代入公式

$$P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

(2) 在原试验基础上加上 B 发生的条件，在缩减的样本空间中，A 的概率则为 $P(A/B)$.

2. 乘法公式

若 $P(B)>0$，则：$P(AB)=P(B)\cdot P(A/B)$；

若 $P(A)>0$，则：$P(AB)=P(A)\cdot P(B/A)$.

3. 事件的独立性

若事件 A 与 B 满足 $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$，则称事件 A 与 B 相互独立.

下列 4 对事件：A 与 B；A 与 $\bar{B}$；$\bar{A}$ 与 B；$\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 若有一对相互独立，则其他 3 对也相互独立.

若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 对任意 $k(1<k\leqslant n,1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n)$ 有 $P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$，则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立.

注意：(1) n 个事件相互独立，一定两两独立；反之两两独立，不能保证 n 个事件相互独立.

(2) 通常是根据实际判断事件相互独立(即互不影响),然后用上面的公式计算积事件的概率.

(3) 互不相容简化概率的加法.相互独立简化概率的乘法.

4. 全概公式

设 S 是随机试验 E 的样本空间,$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 是 E 中 n 个事件,如果 $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = S$,且对任意 $i \neq j(1 \leqslant i,j \leqslant n)$ 有 $B_iB_j = \Phi$,则称 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 S 的一个划分.

设 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 S 的一个划分,A 是 E 中任一事件,则:$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A/B_i)$.

5. 逆概公式(*Bayes* 公式)

设 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为样本 S 的一个划分.A 是 E 中任一事件,则有:

$$P(B_i/A) = \frac{P(B_i)P(A/B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B_j)P(A/B_j)}(i = 1,2,\cdots,n)$$

(五) 贝努利概型

(1) 每次试验有两个可能结果 A 或 $\overline{A}$,$P(A) = p(0 < p < 1)$,这样的试验称为贝努利试验.

(2) 重复进行 n 次贝努利试验,各次试验结果相互独立,这一概率模型称为贝努利概型.

(3) 在重复进行的 n 次贝努利试验中:

$P(A$ 恰好发生 k 次$) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k = 0,1,2,\cdots,n$.

(4) 在重复进行的贝努利试验中

$P(A$ 首次发生出现在第 k 次试验$) = (1-p)^{k-1}p, k = 1,2,3,\cdots$.

$P(A$ 第 r 次发生出现在第 k 次试验$) = C_{k-1}^{r-1} p^{r-1} (1-p)^{k-r} p, k = r, r+1, r+2, \cdots$.

三、重点、难点

重点:古典概型,贝努利概型,加法公式,乘法公式,全概公式,逆概公式.

难点:分析事件之间的关系,判断试验的概率模型.

四、典型例题解析

(一)事件的关系与运算

事件的运算实质是集合的运算,关键是会用概率论的语言描述集合的运算,会用集合的运算表示事件.

1. 甲、乙、丙3人射击,每人一次.以A、B、C分别表示甲、乙、丙击中,试用事件A、B、C的运算表示下列事件.

(1) 甲、乙、丙至少一人无击中.

(2) 甲、乙、丙最多一人无击中.

(3) 甲、乙、丙最多两人击中.

(4) 甲、乙、丙中恰有两人击中.

(5) 甲、乙、丙最多一人击中.

解:(1) 甲、乙、丙至少一人无击中$\Leftrightarrow A$、B、C至少有一个不发生,相当于$\bar{A}$、$\bar{B}$、$\bar{C}$至少有一个发生,可用$\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}=\overline{ABC}$表示.

(2) 甲、乙、丙最多一人无击中$\Leftrightarrow A$、B、C最多一个不发生$\Leftrightarrow A$、B、C至少两个发生,故可用$(AB)\cup(BC)\cup(AC)$表示.

(3) 甲、乙、丙最多两人击中$\Leftrightarrow$甲、乙、丙至少一人无击中,故同(1).可用$\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}=\overline{ABC}$表示.

(4) 甲、乙、丙中恰有两人击中$\Leftrightarrow A$、B、C中恰有2个发生,可用$(\bar{A}BC)\cup(A\bar{B}C)\cup(AB\bar{C})$表示.

(5) 甲、乙、丙最多一人击中$\Leftrightarrow$甲、乙、丙至少两人无击中$\Leftrightarrow\bar{A}\cap\bar{B}$、$\bar{A}\cap\bar{C}$、$\bar{B}\cap\bar{C}$至少有一个发生,故可用$(\bar{A}\cap\bar{B})\cup(\bar{A}\cap\bar{C})\cup(\bar{B}\cap\bar{C})$表

示;或说"至少两人击中"的对立事件用$\overline{AB \cup AC \cup BC}$表示.

2. 设某人向靶子射击3次,用A_i表示"第i次射击击中靶子"($i = 1,2,3$),试用语言描述下列事件:

(1)$\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \bar{A}_3$;(2) $\overline{A_1 \cup A_2}$;(3)$(A_1A_2\bar{A}_3) \cup (\bar{A}_1A_2A_3)$.

解:(1)$\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \bar{A}_3$ 表示3次射击至少一次无击中靶子;

(2) $\overline{A_1 \cup A_2}$ 表示前两次射击都没有击中靶子;

(3)$(A_1A_2\bar{A}_3) \cup (\bar{A}_1A_2A_3)$ 表示恰好连续两次击中靶子.

3. 设A、B为两个事件,若$AB = \bar{A} \cap \bar{B}$,问$A$和$B$有什么关系.

解:由德摹根法则知$\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$,又已知$AB = \bar{A} \cap \bar{B}$,所以有$AB = \overline{A \cup B}$,即$A$,$B$同时发生$\Leftrightarrow A$,$B$无一个发生.

又因为$A \cup B \supset AB$,所以$AB = \Phi$,故$\overline{A \cup B} = \Phi$,$A \cup B = S$.

所以A与B互为对立事件.

4. 设有图1-1所示两个电路,令A_i表示"第i个节点开关闭合"($i = 1,2,3,4,5,6$).试用A_i表示下列事件:B_1:"L_1R_1是通路";B_2:"L_2R_2是通路".

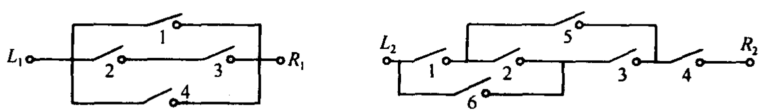

图1-1

解:因为B_1发生的充要条件是"A_1,A_2A_3,A_4至少发生一个",所以$B_1 = A_1 \cup (A_2A_3) \cup A_4$;

B_2发生充要条件:A_4发生,A_1发生且A_2A_3与A_5至少发生一个;或:A_4发生;A_6发生,A_2A_5与A_3至少发生一个.

所以$B_2 = A_4\{[A_1 \cap (A_2A_3 \cup A_5)] \cup [A_6 \cap (A_2A_5 \cup A_3)]\}$.

5. 下列各式哪个成立哪个不成立,说明为什么.

(1)$A \cup B = A\bar{B} \cup B$;　　(2)$A \cup B = \bar{A}B$;

(3)$(AB)(A\bar{B}) = \Phi$;　　(4)若$AB = \Phi$,且$C \subset A$,则:$BC = \Phi$;

(5) 若$A \subset B$,则:$A \cup B = B$;　(6) 若$A \subset B$,则:$AB = A$;