UMSS

大学数学科学丛书 —13

算子半群与发展方程

王明新 编著

科学出版社
www.sciencep.com

大学数学科学丛书 13

算子半群与发展方程

王明新 编著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书系统地介绍了线性算子半群的基本理论及其在发展方程中的应用. 全书共分为八章：前两章是预备知识；第三章介绍 C_0 半群和解析半群的基本理论；第四章介绍半线性发展方程的抽象结论；第五章和第六章分别介绍半线性抛物型方程和波动方程；第七章介绍分数幂算子、分数幂空间和拟线性抛物型方程；第八章介绍 Schrödinger 方程. 本书的特点是强调应用和实例. 书中内容深入浅出，文字通俗易懂，并配有适量难易兼顾的习题.

本书可作为偏微分方程、动力系统、泛函分析、计算数学、控制论方向与理工科相关方向研究生的教材和教学参考书，亦可作为数学、工程等领域的青年教师和科研人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

算子半群与发展方程/王明新编著. —北京：科学出版社，2006
(大学数学科学丛书，13)
ISBN 7-03-017755-X

I. 算… II. 王… III. 线性算子半群-应用-发展方程 IV. ①O152.7 ②O175.26

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 087804 号

责任编辑：赵彦超 吕 虹/责任校对：赵桂芬
责任印制：安春生/封面设计：王 浩

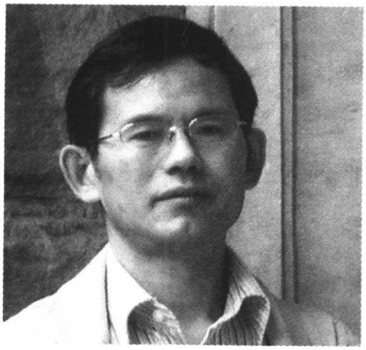
科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

天时彩色印刷有限公司 印刷
科学出版社编务公司排版制作
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2006 年 8 月第 一 版 开本：B5（720 × 1000）
2006 年 8 月第一次印刷 印张：12 3/4
印数：1—2 500 字数：232 000

定价：36.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈双青〉）

作 者 简 介



王明新，1957 年 3 月生，河南宁陵人。1987 年 9 月至 1990 年 6 月师从叶其孝教授攻读博士研究生。1990 年 8 月至 1994 年 8 月，分别在中国科学院数学与系统科学研究院系统科学研究所和应用数学研究所做博士后研究工作(协作导师：丁夏畦院士)。1994 年 8 月调入东南大学。现为东南大学教授，博士生导师。

长期从事偏微分方程理论与应用的研究和数学教学工作。主要研究领域为非线性偏微分方程和生物数学，研究方向涉及非线性抛物型方程和方程组、非线性椭圆型方程组和非线性双曲型方程组。在国内外专业杂志发表论文 130 余篇，著有《非线性抛物型方程》、《数学物理方程》。

多次访问美国 Minnesota 大学、香港科技大学和澳大利亚 Armedale 大学，与新加坡国立大学保持长期的合作关系。1992 年获教育部科技进步三等奖(第三获奖人)及河南省青年科技奖，1997 年获江苏省首届青年科学家奖提名奖，1998 年获江苏省科技进步二等奖(第一获奖人)，1999 年获教育部科技进步三等奖(第一获奖人)，1999 年获华英文化教育基金奖。现为江苏省“333”第二层次培养人选和江苏省跨世纪学术带头人。

《大学数学科学丛书》已出版书目

(按初版时间排序)

1. 代数导引　万哲先　著　2004 年 5 月
2. 代数几何初步　李克正　著　2004 年 5 月
3. 线性模型引论　王松桂等　编著　2004 年 5 月
4. 抽象代数　张勤海　著　2004 年 8 月
5. 变分迭代法　曹志浩　编著　2005 年 2 月
6. 现代偏微分方程导论　陈恕行　著　2005 年 3 月
7. 抽象空间引论　胡适耕　张显文　编著　2005 年 7 月
8. 近代分析基础　陈志华　编著　2005 年 7 月
9. 抽象代数——理论、问题与方法　张广祥　著　2005 年 8 月
10. 混合有限元法基础及其应用　罗振东　著　2006 年 3 月
11. 孤子引论　陈登远　编著　2006 年 4 月
12. 矩阵不等式　王松桂等　编著　2006 年 5 月
13. 算子半群与发展方程　王明新　编著　2006 年 8 月

《大学数学科学丛书》序

按照恩格斯的说法，数学是研究现实世界中数量关系和空间形式的科学. 从恩格斯那时到现在，尽管数学的内涵已经大大拓展了，人们对现实世界中的数量关系和空间形式的认识和理解已今非昔比，数学科学已构成包括纯粹数学及应用数学内含的众多分支学科和许多新兴交叉学科的庞大的科学体系，但恩格斯的这一说法仍然是对数学的一个中肯而又相对来说易于为公众了解和接受的概括，科学地反映了数学这一学科的内涵. 正由于忽略了物质的具体型态和属性、纯粹从数量关系和空间形式的角度来研究现实世界，数学表现出高度抽象性和应用广泛性的特点，具有特殊的公共基础地位，其重要性得到普遍的认同.

整个数学的发展史是和人类物质文明和精神文明的发展史交融在一起的. 作为一种先进的文化，数学不仅在人类文明的进程中一直起着积极的推动作用，而且是人类文明的一个重要的支柱. 数学教育对于启迪心智、增进素质、提高全人类文明程度的必要性和重要性已得到空前普遍的重视. 数学教育本质是一种素质教育；学习数学，不仅要学到许多重要的数学概念、方法和结论，更要着重领会到数学的精神实质和思想方法. 在大学学习高等数学的阶段，更应该自觉地去意识并努力体现这一点.

作为面向大学本科生和研究生以及有关教师的教材，教学参考书或课外读物的系列，本丛书将努力贯彻加强基础、面向前沿、突出思想、关注应用和方便阅读的原则，力求为各专业的大学本科生或研究生(包括硕士生及博士生)走近数学科学、理解数学科学以及应用数学科学提供必要的指引和有力的帮助，并欢迎其中相当一些能被广大学校选用为教材，相信并希望在各方面的支持及帮助下，本丛书将会愈出愈好.

李大潜

2003 年 12 月 27 日

前　言

作为一本研究生教材或教学参考书，本书自成体系. 书中介绍了有界线性算子半群的基本理论及其在发展方程中的应用，同时还介绍了几种处理半线性抛物型方程、半线性波动方程以及半线性 Schrödinger 方程的初边值问题和初值问题解的整体存在性，以及解在有限时刻爆破的方法.

随着近年来研究生的扩招，教材建设已成为各高校研究生培养工作中亟待解决的一项头等大事. 算子半群和非线性发展方程，作为偏微分方程、动力系统、泛函分析、计算数学等相关方向研究生的基础课程，编写一本合适的教材是有意义的. 近十年来，作者每年都为研究生讲授“算子半群与发展方程”课程. 本书就是在该课程讲义的基础上，经多年逐步补充、修改完善而成.

含有未知函数关于时间变量 t 的导数 (偏导数) 的微分方程称为**发展方程**，其中常微分方程是它的特例. 因此，发展方程是一个范围广泛、内容丰富的领域. 研究发展方程的基本理论 —— 解的存在性、唯一性和连续依赖性的常用方法有两种：一是算子半群方法，二是先验估计结合不动点定理. 这两种方法都强烈地依赖于微分算子的性质 (也可以说是椭圆型方程解的先验估计) . 本书采用第一种方法来研究发展方程.

常微分方程初值问题解的存在性、唯一性和连续依赖性，是本科生“常微分方程”课程的基本内容，学生在本科阶段就已经了解并熟练掌握了处理的方法和思想. 把一个发展型偏微分方程写成一个抽象的常微分方程，从而可以借助于常微分方程的处理方法来研究非线性发展型偏微分方程解的存在性、唯一性和连续依赖性，这是一个十分自然的思路. 由于此时解的值域不再是 $\mathbb{R}^N$, 而是一个 Banach 空间，因此作为预备知识，本书的第一章介绍了抽象函数的基本性质和结果. 这一章也是定义和理解发展方程弱解的基础，如果学时不够，本章可以略讲. 在这种情况下，建议用一个课时的时间介绍一些基本思想，并举几个例子，比如，解释空间 $L^p([0,T],L^q(\Omega))$ 以及 $u\in C^1([0,T],H_0^1(\Omega))$ 等的含义，以便于学生自学.

把一个发展型偏微分方程改写成一个抽象的常微分方程 $u'(t)+Au(t)=F(t,u(t))$, 该常微分方程中含有一个微分算子 A. 然而，并不是对所有的微分算子 A, 该问题都可以求解. 本书的第二章介绍一类重要的线性算子 —— 增生算子，并阐述了线性算子的谱和共轭算子的一些结果，同时还给出了偏微分方程理论中的一些实例.

第二章的内容是对泛函分析课程的补充.

在前两章的基础上，第三章引入 C_0 半群和解析半群，论述它们的基本性质以及线性方程解的存在性和唯一性. 第四章讨论半线性发展方程的抽象结论，研究解的存在性、唯一性、连续依赖性、解的延拓 (极大定义解) 以及二择一性质. 利用第四章中的抽象结果，在第五章和第六章中，我们分别讨论了半线性抛物型方程和半线性波动方程，并介绍了几种处理半线性抛物型方程和波动方程的初边值问题解的整体存在以及解在有限时刻爆破的方法. 在半线性抛物型方程的研究中，最大值原理发挥着重要作用. 这是因为在最大值原理成立时，我们可以不再用 L^2 方法，而是直接用 C_0 方法来讨论解的性质，这样的处理方法运用起来非常简单、便捷. 在研究半线性波动方程时，我们首先在空间 $H^1\times L^2$ 中引入等距群的概念，并在此空间中给出局部解的存在性. 一般来说，这种局部解仅在较大的空间 $L^2\times H^{-1}$ 中关于 t 是可微的. 为了得到解在空间 $H^1\times L^2$ 中关于 t 的可微性质，就需要对初值附加更高的光滑性条件.

第七章介绍分数幂算子和分数幂空间及其对于拟线性抛物型方程的应用. 这一章涉及的拟线性抛物型方程的最简单形式是 $u_t-\Delta u=f(u,\nabla u)$. 处理方法是通过研究分数幂空间与适当的 Sobolev 空间之间的嵌入关系，用主项 (Δu) 来控制非线性项中的 ∇u, 进而得到所要的结果. 把本章的结论应用于具体问题时，寻找合适的“工作空间”和“分数幂空间”是成功与否的关键.

本书的最后一章，即第八章，介绍了 Schrödinger 方程的的一些基本结论，以及非线性 Schrödinger 方程的初值问题 —— 解的局部存在性、整体存在性和有限时刻爆破.

把抽象结果运用于具体的发展方程时，选取合适的“工作空间” (基本 Banach 空间) 至关重要. 然而，为了选取合适的“工作空间”，必须熟悉 Sobolev 嵌入定理以及椭圆型方程的先验估计的相关结论. 通过本课程的学习，读者可以很好地理解这一点.

本书的部分内容参考了国内外出版的一些教材，请参阅所附的参考文献. 本书的讲义，作者在东南大学和徐州师范大学为研究生讲授过多次，并被列为东南大学研究生优秀课程. 本书的出版得到了东南大学科技出版基金和国家自然科学基金 (No.19831060,10471022) 的资助. 在编写讲义和成书的过程中，东南大学的师生，特别是历届偏微分方程专业的研究生，都提出了许多宝贵的意见，在此一并致谢. 由于作者学识所限，错误和不足之处在所难免，还望读者予以批评指正.

作 者

2006 年 3 月

符 号 表

$\mathbb{R}^N$	N- 维实欧氏空间, $\mathbb{R}=\mathbb{R}^1$
$\mathbb{C}$	复空间
$\mathbb{K}$	数域 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$
$\mathcal{R}(A)$	算子 A 的值域
$\mathcal{N}(A)$	算子 A 的核 (零子空间)
$\mathbb{N}$	表示集合 $\{1,2,\cdots\}$
$\hookrightarrow$	嵌入
$\approx$	等价
$\mathbb{N}^N$	表示集合 $\{\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_N): \alpha_i\in\mathbb{N}\}$, 这里的 α 称为多重指标
$\mathcal{L}(X,Y)$	从 X 到 Y 的连续线性算子空间, 通常记 $\mathcal{L}(X)=\mathcal{L}(X,X)$
X^*	向量空间 X 的拓扑共扼空间
$D(A)$	带有范数 $\Vert u\Vert_{D(A)}=\Vert u\Vert+\Vert Au\Vert$ 的 Banach 空间 $(D(A),\Vert\cdot\Vert_{D(A)})$, 其中 A 是一个具有闭图象的线性算子
$\mathcal{D}(\Omega)$	在 Ω 内具有紧支集的实值或复值 C^∞ 函数空间
$C_0^\infty(\Omega)$	表示函数空间 $C_c^\infty(\Omega)=\mathcal{D}(\Omega)$
$C_c(\Omega)$	在 Ω 内具有紧支集的连续函数空间
$C_0(\Omega)$	空间 $C(\bar{\Omega})$ 中在边界 $\partial\Omega$ 上取值为零的函数空间
$\mathcal{S}$	表示函数空间 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)=\{u\in C^\infty(\mathbb{R}^N): \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^N}\lvert x^\beta D^\alpha u\rvert<\infty$ 对所有多重指标 α,β 成立 $\}$, 通常称 $\mathcal{S}$ 为速降函数空间
$\mathcal{D}'(\Omega)$	Ω 上的分布函数空间
$L^p(\Omega)$	在 Ω 上可测并且 $\lvert u\rvert^p$ 可积的函数空间 $(1\leqslant p<\infty)$
$\Vert u\Vert_p$	表示范数 $\left(\int_\Omega \lvert u\rvert^p dx\right)^{1/p}$, $u\in L^p(\Omega)$
$L^\infty(\Omega)$	在 Ω 上可测且几乎处处有界的函数空间, $\Vert u\Vert_\infty=\inf\{C>0: \lvert u(x)\rvert\leqslant C$ 几乎处处成立 $\}$
p'	p 的共扼指数, 即 $p'=p/(p-1)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$

D^α	表示导数 $\dfrac{\partial^{\lvert\alpha\rvert}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1}\cdots\partial_{x_N}^{\alpha_N}}$，$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_N)$, $\lvert\alpha\rvert=\sum_{i=1}^N\alpha_i$
$W^{m,p}(\Omega)$	表示函数空间 $\{f\in L^p(\Omega), D^\alpha f\in L^p(\Omega), \lvert\alpha\rvert\leqslant m\}$, $\lVert u\rVert_{W^{m,p}}=\sum_{\lvert\alpha\rvert\leqslant m}\lVert D^\alpha u\rVert_p$, $H^m(\Omega)=W^{m,2}(\Omega)$
$W_0^{m,p}(\Omega)$	空间 $\mathcal{D}(\Omega)$ 在范数 $\lVert\cdot\rVert_{W^{m,p}}$ 下的闭子空间，$H_0^m(\Omega)=W_0^{m,2}(\Omega)$
$\mathcal{D}(I,X)$	从 I 到 X 的具有紧支集的 C^∞ 函数空间
$\mathcal{D}'(I,X)$	表示集合 $\mathcal{L}(\mathcal{D}(I,X),X)$, 取值于 X 且定义于 I 的分布函数空间，当 $u\in\mathcal{D}'(I,X)$ 时，用 $u'=\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ 表示 u 的广义导数
$C_c(I,X)$	从 I 到 X 的具有紧支集的连续函数空间
$C_b(I,X)$	从 I 到 X 的连续有界函数空间
$C_{b,u}(I,X)$	从 I 到 X 的一致连续且有界的函数空间
$L^p(I,X)$	从 I 到 X 的可测函数空间，并且 $\lVert u\rVert_X^p$ 在 I 上可积，$1\leqslant p<\infty$. 当 $u\in L^p(I,X)$ 时，简记 $\lVert u\rVert_p=\lVert u\rVert_{L^p(I,X)}=\left(\int_I\lVert u\rVert_X^p\right)^{1/p}$
$L^\infty(I,X)$	从 I 到 X 可测且几乎处处有界的函数空间. 当 $u\in L^\infty(I,X)$ 时，简记 $\lVert u\rVert_\infty=\lVert u\rVert_{L^\infty(I,X)}=\inf\{C>0: \lVert u(t)\rVert_X\leqslant C$ 几乎处处成立 $\}$
$W^{1,p}(I,X)$	表示集合 $\{u\in L^p(I,X)$: 在广义导数的意义下，$u'\in L^p(I,X)\}$, $\lVert u\rVert_{W^{1,p}(I,X)}=\lVert u\rVert_{L^p(I,X)}+\lVert u'\rVert_{L^p(I,X)}$

目　录

第一章　预备知识 ······ 1
§1.1　Sobolev 空间 ······ 1
§1.2　抽象函数 ······ 2
1.2.1　可测函数 ······ 2
1.2.2　可积函数 ······ 4
1.2.3　$L^p(I, X)$ 空间 ······ 6
1.2.4　抽象函数的导数 ······ 8
1.2.5　抽象广义函数 ······ 9
1.2.6　$W^{1,p}(I, X)$ 空间 ······ 12
习题一 ······ 15
第二章　线性算子和谱 ······ 17
§2.1　预备知识 ······ 17
§2.2　增生算子与耗散算子 ······ 20
§2.3　延拓 ······ 22
§2.4　Hilbert 空间中的线性算子 ······ 23
§2.5　偏微分方程理论中的一些例子 ······ 29
2.5.1　$\mathbb{R}^N$ 中的开集上的 Laplace 算子：L^2 理论 ······ 29
2.5.2　$\mathbb{R}^N$ 中的开集上的 Laplace 算子：C_0 理论 ······ 30
2.5.3　$\mathbb{R}^N$ 中的 Laplace 算子：L^∞ 理论 ······ 31
2.5.4　$H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ 中的波动算子 ······ 34
2.5.5　$L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ 中的波动算子 ······ 36
2.5.6　Schrödinger 算子 ······ 37
习题二 ······ 39
第三章　线性算子半群 ······ 40
§3.1　引言 ······ 40
§3.2　半群的基本性质 ······ 41
§3.3　扇形算子与解析半群 ······ 51
3.3.1　可微半群和解析半群的性质 ······ 51
3.3.2　扇形算子的性质 ······ 55
§3.4　由微分算子确定的半群 ······ 63
§3.5　非齐次问题 ······ 66

习题三 …… 75
第四章　半线性发展方程：抽象结论 …… 78
§4.1　引言 …… 78
§4.2　基本理论 …… 81
习题四 …… 87
第五章　半线性抛物型方程 …… 89
§5.1　初值问题 …… 89
§5.2　初边值问题 …… 91
5.2.1　齐次问题 …… 92
5.2.2　问题 (5.4) 的古典解的局部存在性 …… 96
5.2.3　问题 (5.4) 的古典解的整体存在性 …… 98
5.2.4　有限时刻爆破 …… 104
习题五 …… 109
第六章　波动方程 …… 112
§6.1　齐次问题 …… 112
§6.2　非齐次问题 —— 一个抽象结果 …… 113
§6.3　$H_0^1(\Omega)$ 中的泛函 …… 114
§6.4　局部存在性 …… 118
§6.5　整体存在性 …… 120
§6.6　有限时刻爆破 …… 122
习题六 …… 127
第七章　拟线性抛物型方程 …… 128
§7.1　分数幂算子和分数幂空间 …… 128
§7.2　由微分算子确定的分数幂空间 …… 137
§7.3　非齐次问题 …… 139
§7.4　整体存在性 —— 一个特殊情形 …… 142
§7.5　主要结论 …… 144
§7.6　正则性 …… 151
7.6.1　紧性结果 …… 152
7.6.2　解关于参数的连续依赖性和可微性 …… 152
7.6.3　微分方程的光滑作用 …… 155
§7.7　抛物型方程的实例 …… 157
习题七 …… 159

第八章 Schrödinger 方程 ······ 161
§8.1 预备知识 ······ 161
§8.2 一个一般性结论 ······ 164
§8.3 $\mathbb{R}^N$ 上的线性 Schrödinger 方程 ······ 168
§8.4 非线性 Schrödinger 方程的初值问题: 局部存在性 ······ 172
8.4.1 若干估计 ······ 173
8.4.2 定理 8.4.1 的证明 ······ 176
§8.5 非线性 Schrödinger 方程的初值问题: 整体存在性 ······ 181
§8.6 非线性 Schrödinger 方程的初值问题: 有限时刻爆破 ······ 183
习题八 ······ 187
参考文献 ······ 189

第一章　预 备 知 识

常微分方程初值问题解的存在性、唯一性和连续依赖性，是本科生“常微分方程”课程的基本内容. 学生在本科阶段就已经了解并熟练掌握了处理“解的存在性、唯一性和连续依赖性”的方法和思想. 把一个发展型偏微分方程写成一个抽象的常微分方程，并利用常微分方程的处理方法来研究非线性发展型偏微分方程解的存在性、唯一性和连续依赖性，是一个十分自然的思路. 由于此时解的值域不再是 $\mathbb{R}^N$, 而是一个 Banach 空间，因此作为预备知识，介绍抽象函数的基本性质和结果是必要的. 这一章也是定义和理解发展方程的弱解的基础.

本章总假设 X 和 Y 均为 Banach 空间.

§1.1　Sobolev 空间

在本节里，我们不加证明地叙述本书经常用到的 Sobolev 空间中的几个重要结果.

设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的开子集. $W^{m,p}(\Omega)$, $W_0^{m,p}(\Omega)$ 表示通常的 Banach 空间. 当 $p=2$ 时，记 $W^{m,2}(\Omega)=H^m(\Omega)$, $W_0^{m,2}(\Omega)=H_0^m(\Omega)$.

定理 1.1.1 (Poincaré 不等式)　若 Ω 有界，则有

$$\|u\|_2 \leqslant \lambda^{-1/2}\|\nabla u\|_2, \qquad \forall\ u \in H_0^1(\Omega),$$

其中 λ 是 $-\Delta$ 在 Ω 上带有齐次 Dirichlet 边界条件的第一特征值.

定理 1.1.2　若 Ω 是的边界 Lipschitz 连续，则有

(1) 如果 $1 \leqslant p < N$, 那么 $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ 对所有 $q \in [p,p^*]$ 成立，其中 $p^*=\dfrac{Np}{N-p}$;

(2) 如果 $p=N$, 那么 $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ 对所有 $q \in [p,\infty)$ 成立;

(3) 如果 $p>N$, 那么 $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega) \cap C^{0,\alpha}(\Omega)$, 其中 $\alpha = 1-\dfrac{N}{p}$.

定理 1.1.3　如果在定理 1.1.2 的条件下，进一步假设 Ω 是有界的，那么在定理 1.1.2 中，结论 (2) 和 (3) 中的嵌入都是紧的. 如果又有 $q \in [p,p^*)$, 那么结论 (1) 中的嵌入也是紧的.

注 1.1.1　当用 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 替代 $W^{1,p}(\Omega)$ 时，即使没有关于 Ω 的光滑性假设，定理 1.1.2 和定理 1.1.3 中的结论仍然成立.

上述结论的证明可参见文献 [1]. 下面的内插不等式的证明可参见文献 [7](定理 9.3, p.24).

定理 1.1.4 (内插不等式) 假设 $1 \leqslant q, r \leqslant \infty$, j, m 是整数且满足 $0 \leqslant j < m$. 假定 $j/m \leqslant \theta \leqslant 1$ (当 $m - j - N/r$ 是非负整数时, 要求 $\theta < 1$), p 满足

$$\frac{1}{p} = \frac{j}{N} + \theta\left(\frac{1}{r} - \frac{m}{N}\right) + (1-\theta)\frac{1}{q}.$$

那么存在常数 $C(q, r, j, m, \theta, N)$, 使得

$$\sum_{|\alpha|=j} \|D^\alpha u\|_p \leqslant C\left(\sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_r\right)^\theta \|u\|_q^{1-\theta}, \qquad \forall\, u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N).$$

命题 1.1.5 (复合法则 [11]) 设 $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是 Lipschitz 连续函数, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. 那么对所有 $u \in W^{1,p}(\Omega)$, 函数 $F(u) \in W^{1,p}(\Omega)$. 此外, 若记 $\mathcal{N}$ 是 F 的不可微点的集合 ($|\mathcal{N}| = 0$) , 则在 Ω 内, 几乎处处成立

$$\nabla F(u) = \begin{cases} F'(u)\nabla u, & \text{如果 } u \notin \mathcal{N}, \\ 0, & \text{如果 } u \in \mathcal{N}. \end{cases}$$

推论 1.1.6 设 $1 \leqslant p \leqslant \infty$. 则对任意 $u \in W^{1,p}(\Omega)$, 有 $u^+, u^-, |u| \in W^{1,p}(\Omega)$, 并且在 Ω 内几乎处处成立

$$\nabla u^+ = \begin{cases} \nabla u, & \text{如果 } u > 0, \\ 0, & \text{如果 } u \leqslant 0. \end{cases}$$

§1.2 抽 象 函 数

本节陈述后面将要用到的有关于抽象函数的积分和抽象广义函数的若干结果. 给定一个 Banach 空间 X 和一个开区间 $I \subset \mathbb{R}$.

1.2.1 可测函数

定义 1.2.1 称函数 $f : I \to X$ 是可测的, 如果存在零测集 $E \subset I$ 和序列 $\{f_n\} \subset C_c(I, X)$, 使得 $f_n(t) \to f(t)$ 在 $I \setminus E$ 上成立.

易知, 如果 $f : I \to X$ 可测, 那么 $\|f\| : I \to \mathbb{R}$ 可测.

命题 1.2.1 设 $\{f_n\}$ 是从 I 到 X 的可测函数序列. 若 $f : I \to X$, 并且 $f_n(t) \to f(t)$ 对几乎所有的 $t \in I$ 成立, 则 f 是可测的.

证明 首先，存在零测集 $E \subset I$，使得在 $I \setminus E$ 上，$f_n \to f$. 设 $\{f_{n,k}\}$ 是具有紧支集的连续函数列，并且 $f_{n,k} \to f_n \, (k \to \infty)$ 几乎处处成立. 对序列 $\{\|f_{n,k} - f_n\|\}$ 应用 Egorov 定理知，存在 $E_n \subset I$ 满足 $|E_n| \leqslant 2^{-n}$，使得在 $I \setminus E_n$ 上一致地有 $f_{n,k} \to f_n$. 设 $k(n)$ 是使得 $\|f_{n,k(n)} - f_n\| \leqslant 1/n$ 在 $I \setminus E_n$ 上成立的下标，并令 $g_n = f_{n,k(n)}$. 取 $F = E \bigcup \left(\bigcap_{m \geqslant 0} \bigcup_{n>m} E_n \right)$，则 $|F| = 0$. 对任意 $t \in I \setminus F$，有 $f_n(t) \to f(t)$. 另一方面，对足够大的 n 以及 $t \in I \setminus E_n$，有 $\|g_n - f_n\| \leqslant 1/n$. 于是，$g_n(t) \to f(t)$，从而 f 可测. 证毕.

注 1.2.1 如果 $f: \mathbb{R} \to X$ 和 $\varphi: I \to \mathbb{R}$ 都可测，那么 $f(\varphi): I \to X$ 可测.

注 1.2.2 设 $\{x_n\}$ 是 X 中的序列，$\{\Omega_n\}$ 是 I 中的一列可测子集. 若对任意 $i \neq j$，都有 $\Omega_i \cap \Omega_j = \varnothing$，则 $\sum\limits_n x_n \chi_{\Omega_n}$ 可测.

引理 1.2.2[13] 设 X 是可分的 Banach 空间，X^* 是它的对偶空间. 若 S^* 是 X^* 中的单位球，则在 S^* 中存在序列 $\{x'_n\}$，使得对任意 $x' \in S^*$，都有该序列的子序列 $\{x'_{n_k}\}$，满足 $x'_{n_k}(x) \to x'(x)$ 对所有 $x \in X$ 成立.

证明 取 X 中的稠密点列 $\{x_n\}$. 对每一个 n，按如下方式定义从 S^* 到 $\ell^2(n)$ 的映射 F_n:

$$F_n(x') = (x'(x_1), \cdots, x'(x_n)), \qquad \forall\, x' \in S^*.$$

因为 $\ell^2(n)$ 是可分的，所以存在 S^* 中的序列 $\{x'_{n_k}\}$，使得 $F_n(\{x'_{n_k}\})$ 在 $F_n(S^*)$ 中稠密. 特别地，对任意 $x' \in S^*$，存在 $x'_{n_{k(n)}} \in \{x'_{n_k}\}$，使得

$$|x'(x_j) - x'_{n_{k(n)}}(x_j)| \leqslant 1/n, \qquad \forall\, 1 \leqslant j \leqslant n.$$

由此推出，当 $n \to \infty$ 时，$x'_{n_{k(n)}}(x_j) \to x'(x_j)$ 对所有 $j \in \mathbb{N}$ 成立. 由于 $\{x_n\}$ 在 X 中稠密，因此当 $n \to \infty$ 时，对任意 $x \in X$，均有 $x'_{n_{k(n)}}(x) \to x'(x)$. 故引理成立. 证毕.

定理 1.2.3 (Pettis 定理) 设 $f: I \to X$，那么 f 可测当且仅当以下两个条件同时成立：

(1) f 是弱可测的 (对任意 $x' \in X^*$，函数 $t \mapsto \langle x', f(t) \rangle$ 可测)；

(2) 存在零测集 $\mathcal{N} \subset I$，使得 $f(I \setminus \mathcal{N})$ 是可分的.

证明 因为 f 可测，所以 f 弱可测. 设 $\{f_n\} \subset C_c(I, X)$，使得 $f_n \to f$ 在 $I \setminus \mathcal{N}$ 上成立，其中 $|\mathcal{N}| = 0$. 显而易见，$f_n(I \setminus \mathcal{N})$ 是可分的，从而 $f(I \setminus \mathcal{N})$ 也是可分的.

反之，假设 $f(I)$ 是可分的. 于是，X 也是可分的 (可用包含 $f(I)$ 的 X 的最小闭子空间来代替 X).