主编◆郑桂华

考点

KAODIAN QQ

数学

九年级

广西教育出版社

考点QQ

KAODIAN QQ

九年级

数学

主编◆郑桂华
编著◆乐维英

广西教育出版社

考点 QQ
数学九年级
郑桂华　主编
☆
广西教育出版社出版
南宁市鲤湾路 8 号
邮政编码:530022　电话:0771 - 5865797
本社网址 http://www.gep.com.cn
读者电子信箱 master@gep.com.cn
全国新华书店经销　广西北海日报印刷厂印刷
*
开本 890×1240　1/32　9.875 印张　258 千字
2005 年 8 月第 1 版　　2005 年 8 月第 1 次印刷
印数:1—5000 册
ISBN 7-5435-4217-X/G·3267　定价:15.00 元

出版说明

《考点QQ》丛书紧扣课程标准，综合考虑现行的各套课标教材的内容和编排顺序，直接抓住考试中出现频率较高的内容（即考点）展开，既有知识点、重点、难点，也有疑点、盲点，还有考试的热点、焦点，并努力提示各类考试的出题规律，探索应考得分的策略。

编写思路上除了注意知识的传授和技能的训练外，还重视对探索兴趣及能力、良好思维习惯与创新意识的培养。力求使读者收到既复习、梳理了知识点，又深刻理解了考点，且熟练掌握了解题规律、应试方法的三重效果。形式上突出互动性、亲和力，力争贴近学生的学习，贴近教学实际。

编写体例上分考点扫描、考点分级、考点聊天室、考点收藏夹和考点冲浪等若干板块，对考点则按考试中出现频率的高低，分五个星级排列：一星级（★）为平时单元测试中常见的，二星级（★★）为段、期考中常见的，三星级（★★★）为小、中、高考中常见的，少量四、五星级（★★★★、★★★★★）为各种竞赛中常见的。书末附有练习题的答案或提示，供读者参考。

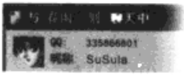
本丛书是我们开发精品教辅方面的一个尝试。我们希望它成为广大读者看得懂、用得上、买得起的一套好教辅。

广西教育出版社

目录

代数部分

一、一元二次方程



考点扫描

- 一元二次方程
  - 概念
  - 解法
    - 开平方法
    - 配方法
    - 公式法
    - 因式分解法
  - 判别式
  - 根与系数的关系
  - 二次三项式的因式分解
  - 列方程解应用题

↑ 转化为

- 分式方程、无理方程
  - 概念
  - 解法
  - 应用
- 二元二次方程组
  - $\begin{cases} a_1x^2+b_1xy+c_1y^2=0 \\ a_2x+b_2y=0 \end{cases}$
  - $\begin{cases} a_1x^2+b_1xy+c_1y^2=0 \\ a_2x^2+b_2xy+c_2y^2=0 \end{cases}$
  - 解法
- 简单的高次方程
  - 解法

考点分级

★

1. 一元二次方程的概念.

2. 一元二次方程的解法：

①用开平方法解一元二次方程；

②用配方法解一元二次方程；

③用公式法解一元二次方程；

④用因式分解法解一元二次方程.

3. 形如 ax^2+bx+c 的二次三项式的因式分解.

★★

1. 一元二次方程根的判别式.

2. 用求根公式分解形如 $ax^2+bxy+cy^2$ 及某些特殊类型的多项式.

3. 分式方程的概念和分式方程产生增根的原因.

4. 用去分母法解分式方程.

★★★

1. 由根的情况，求方程字母系数的取值范围.

2. 利用根与系数的关系求两根对称式的值.

3. 利用两个二次方程根之间的关系解求值问题.

4. 无理方程的概念.

5. 用逐次乘方法解无理方程.

6. 列一元二次方程解应用题.

★★★★

1. 用换元法解分式方程和无理方程.

2. 简单的高次方程及其解法.

3. 解简单的二元二次方程组.

4. 列分式方程和无理方程解应用题.

5. 一元二次方程根的判别式、根与系数关系的综合应用.

★★★★★

1. 灵活求解一元二次方程与几何相结合的综合题.

2. 灵活求解一元二次方程与函数相结合的综合题.

考点聊天室

一★室

例 1 下列说法是否正确?

(1) 关于 x 的方程 $(m-1)x^2+(2m-1)x+m-3=0$ (m 为实数) 是一元二次方程;

(2) $2^x+x^2=1$ 是一元二次方程.

含有一个未知数，并且未知数的最高次数是 2 的方程叫一元二次方程. 它的一般形式为 $ax^2+bx+c=0$ ($a\neq0$).

解 (1) 当 $m\neq1$ 时，(1)所述的方程是一元二次方程，但当 $m=1$ 时，未知数的最高次数为 1，根据一元二次方程的定义，(1)所述的方程不是一元二次方程，所以(1)的说法是错误的.

(2) 一元二次方程是整式方程，$2^x+x^2=1$，显然已不符合一元二次方程的定义，所以(2)的说法也是错误的.

紧扣概念，是判断是非的标准.

例 2 试指出一元二次方程 $(x+3)^2+2(x+3)+4=0$ 的二次项、一次项系数、常数项各是什么.

这个方程不是一元二次方程标准式，所以首先必须把它整理成标准式.

解 $x^2+6x+9+2x+6+4=0$,

$x^2+8x+19=0$.

所以该方程的二次项是 x^2，一次项系数是 8，常数项是 19.

一元二次方程的标准式：$ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）.

例 3 解下列方程.

(1) $4x^2=289$；(2) $(1-x)^2=1.44$.

缺一次项的一元二次方程，用开方法求解比较简单.

解 (1) $\because$ $4x^2=289$，

$2x=\pm17$，

$\therefore$ $x_1=\frac{17}{2}$，$x_2=-\frac{17}{2}$.

(2) $\because$ $(1-x)^2=1.44$，

$1-x=\pm1.2$，

$\therefore$ $x_1=-0.2$，$x_2=2.2$.

方程两边开平方时，不要遗漏“±”.

例 4 用配方法解下列方程.

(1) $4x^2+4x-15=0$；(2) $\frac{1}{2}x^2-3x-9=0$.

配方法解方程是四种基本方法中的一种，熟练掌握对解题很有帮助，同时它是推导公式法的基础.

解 (1) $\because$ $4x^2+4x-15=0$，

$4x^2+4x+1=16$，

$\therefore$ $(2x+1)^2=4^2$，

$2x+1=\pm4$，

$\therefore$ $x_1=-\frac{5}{2}$，$x_2=\frac{3}{2}$.

(2) $\because$ $\frac{1}{2}x^2-3x-9=0$，

$x^2-6x-18=0$，

$x^2-6x+9=27$，

$\therefore$ $(x-3)^2=(3\sqrt{3})^2$，

$\therefore\quad x-3=\pm 3\sqrt{3}$,

$\therefore\quad x_1=3\sqrt{3}+3$，$x_2=3-3\sqrt{3}$.

配方后仍是用开平方法解.

例5 解下列方程.

(1) $\frac{1}{3}x^2-2x=0$；(2) $x^2-6x+8=0$.

缺常数项的一元二次方程用因式分解法较为简便；一元二次方程左边的代数式能因式分解的就用因式分解.

解 (1) $\because\quad \frac{1}{3}x^2-2x=0$,

$\therefore\quad \frac{1}{3}x(x-6)=0$，$\therefore\quad x_1=0$，$x_2=6$.

(2) $\because\quad x^2-6x+8=0$,

$\therefore\quad (x-2)(x-4)=0$，$\therefore\quad x_1=2$，$x_2=4$.

提取公因式法，十字相乘法都是常用的手法.

例6 解下列方程.

(1) $x^2-7x+9=0$；(2) $x^2+2x+9=0$.

用公式法解一元二次方程可适用于任何情况，一般地，我们先看能否用开方法，再看能否用因式分解法，最后用公式法.

解 (1) $\because\quad x^2-7x+9=0$,

$\therefore\quad x_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{7^2-4\times 9}}{2}=\frac{7\pm\sqrt{13}}{2}$,

$\therefore\quad x_1=\frac{7+\sqrt{13}}{2}$，$x_2=\frac{7-\sqrt{13}}{2}$.

(2) $\because\quad x^2+2x+9=0$,

$\therefore\quad x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\times 9}}{2}$,

$\because\quad \Delta=2^2-4\times 9=4-36<0$,

$\therefore$ 方程无解.

😐 若 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$，即有 $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

例 7 分解下列因式.

(1) $2x^2-10x+12$；(2) $-x^2+3x-1$；(3) $-2y^2-4y+2$.

😊 运用一元二次方程求根公式，在实数范围内将二次三项式 ax^2+bx+c 进行因式分解，关键在于理解一元二次方程的根和二次三项式的因式分解之间的关系.

解 (1) 令 $2x^2-10x+12=0$，

$$x_{1,2}=\frac{10\pm\sqrt{10^2-4\times 2\times 12}}{2\times 2}=\frac{10\pm 2}{4},$$

∴ $x_1=3$，$x_2=2$，

∴ $2x^2-10x+12=2(x-3)(x-2)$.

(2) 令 $-x^2+3x-1=0$，

$$x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9-4\times 1\times 1}}{2\times(-1)}=\frac{3\mp\sqrt{5}}{2},$$

∴ $x_1=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$，$x_2=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$，

∴ $-x^2+3x-1=-\left(x-\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$.

(3) 令 $-2y^2-4y+2=0$，

$$y_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2+4\times 2\times 2}}{2\times(-2)}=\frac{4\pm 4\sqrt{2}}{-4},$$

∴ $y_1=-1+\sqrt{2}$，$y_2=-1-\sqrt{2}$.

∴ $-2y^2-4y+2=-2(y+1-\sqrt{2})(y+1+\sqrt{2})$.

😐 $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$，二次项系数前的系数千万不要忘记.

二★室

例 1 不解方程，判断下例方程根的情况：

(1) $\frac{1}{2}x^2+2x+2=0$；(2) $7x^2=5x$.

不解方程判断根的情况，解题时先把方程化为一般式，准确地确定 a、b、c，然后求出判别式是大于零，等于零，还是小于零，从而判断根的情况.

解 (1) $\because$ $a=\frac{1}{2}$，$b=2$，$c=2$，

$\therefore$ $\Delta=2^2-4\times\frac{1}{2}\times2=0$，

$\therefore$ 原方程有两个相等的实数根.

(2) 将原方程整理，得 $7x^2-5x=0$，

$\because$ $a=7$，$b=-5$，$c=0$，

$\therefore$ $\Delta=(-5)^2-4\times7\times0=25>0$，

$\therefore$ 原方程有两个不等的实数根.

判别式决定了根的个数.

例 2 不解方程，判断下列关于 x 的方程根的情况：

(1) $3x^2+2=2\sqrt{6}x$；(2) $\frac{\sqrt{3}}{2}x^2+1=\frac{\sqrt{2}}{2}x$；

(3) $ax^2+bx=0$ $(a\neq0)$；(4) $y^2-2my+4(m-1)=0$；

(5) $4x^2+2nx+n^2-2n+5=0$.

一元二次方程的根的情况是由 $\Delta=b^2-4ac$ 的符号决定的，所以，在判断一元二次方程根的情况时，应想尽办法判断出"Δ"的符号，然后根据判别式定理判定根的情况，尤其是当方程系数中含有字母时，一般利用配方法将"Δ"化成完全平方式或完全平方式加上(或减去)一个常数，再根据完全平方式的非负性判断"Δ"的符号，从而决定方程的根的情况，有时还需要对字母进行讨论.

解 (1) 将方程化为一般形式 $3x^2-2\sqrt{6}x+2=0$，

$\because$ $a=3$，$b=-2\sqrt{6}$，$c=2$，

$\therefore$ $\Delta=b^2-4ac=(-2\sqrt{6})^2-4\times3\times2=0$，

$\therefore$ 方程有两个相等的实数根.

(2) 将方程化为一般形式 $\frac{\sqrt{3}}{2}x^2-\frac{\sqrt{2}}{2}x+1=0$，

方程的两边同乘以 2(为了计算简便)，得

$$\sqrt{3}x^2-\sqrt{2}x+2=0,$$

$\because$ $a=\sqrt{3}$，$b=-\sqrt{2}$，$c=2$，

$\therefore$ $\Delta=(-\sqrt{2})^2-4\times\sqrt{3}\times2=2-8\sqrt{3}<0$，

$\therefore$ 方程没有实数根.

(3) $ax^2+bx=0$ $(a\neq0)$，

$\because$ $a\neq0$，$\therefore$ 方程是一元二次方程，

$\because$ $\Delta=b^2-4\cdot a\cdot 0=b^2$，

无论 b 取任何实数，b^2 均为非负数，

$\therefore$ $\Delta\geqslant0$ 成立. $\therefore$ 方程有两个实数根.

(4) $\Delta=(-2m)^2-4\times1\times4(m-1)=4m^2-16m+16$

$=4(m^2-4m+4)=4(m-2)^2\geqslant0.$

$\therefore$ 方程有两个实数根.

(5) $\Delta=(2n)^2-4\times4\times(n^2-2n+5)=4n^2-16n^2+32n-80$

$=-12n^2+32n-80=-12\left(n-\frac{4}{3}\right)^2-\frac{176}{3}<0.$

$\therefore$ 方程没有实数根.

😐 运用根的判别式判定一元二次方程根的情况时，必须把方程化为一般形式，正确地确定各项系数.

例 3 设 m 是实数，求证：方程 $(x-1)(x-2)=m^2$ 有两个不相等的实数根.

😊 解此类型题，一般要将"Δ"化成完全平方式或完全平方式加上(或减去)一个常数，再根据完全平方式的非负性判定"Δ"的符号，从而判定根的情况.

解 $\because$ $(x-1)(x-2)=m^2$，

整理，得 $x^2-3x+2-m^2=0$.

$\because\quad \Delta=(-3)^2-4\times1\times(2-m^2)=9-8+4m^2=4m^2+1$,

又 $\because\quad m$ 为实数，则 $4m^2\geqslant0$，$\therefore\quad 4m^2+1>0$，即 $\Delta>0$.

$\therefore$ 此方程有两个不相等的实数根.

配方的目的是利用完全平方式的非负性.

例4　分解因式.

(1) $x^2-3xy+y^2$；(2) $2x^2-3xy-y^2$.

形如 $ax^2+bxy+cy^2$ 的多项式叫做关于 x、y 的二元二次齐次式，我们可以选择其中一个变元作为未知数，另一个就看做已知数，这样一来，就可把这个二次式看作二次三项式来分解，如(1)题可看作是关于 x 的二次三项式，其中 $a=1$，$b=-3y$，$c=y^2$.

解　(1) 令 $x^2-3xy+y^2=0$，则

$$\Delta=(-3y)^2-4y^2=5y^2.$$

$$\therefore\quad x_{1,2}=\frac{3y\pm\sqrt{5y^2}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}y.$$

$$\therefore\quad x^2-3xy+y^2=\left(x-\frac{3+\sqrt{5}}{2}y\right)\left(x-\frac{3-\sqrt{5}}{2}y\right).$$

(2) 把 $2x^2-3xy-y^2=0$ 看作是关于 x 的二次方程，它的根是

$$x_{1,2}=\frac{3y\pm\sqrt{9y^2+8y^2}}{4}=\frac{3\pm\sqrt{17}}{4}y.$$

$$\therefore\quad 2x^2-3xy-y^2=2\left(x-\frac{3+\sqrt{17}}{4}y\right)\left(x-\frac{3-\sqrt{17}}{4}y\right).$$

一般地，二元二次齐次式的分解结果应该是两个二元一次齐次式之积.

例5　多项式 $2x^2+3xy-4y^2$ 在实数范围内分解因式，正确的结果是(　　).

(A) $\left(x-\frac{3-\sqrt{41}}{4}y\right)\left(x-\frac{3+\sqrt{41}}{4}y\right)$

(B) $2\left(x-\frac{-3-\sqrt{41}}{4}y\right)\left(x-\frac{-3+\sqrt{41}}{4}y\right)$

(C) $2\left(x+\frac{-3-\sqrt{41}}{4}y\right)\left(x+\frac{-3+\sqrt{41}}{4}y\right)$

(D) $\left(x-\frac{-3-\sqrt{41}}{4}y\right)\left(x-\frac{-3+\sqrt{41}}{4}y\right)$

所给题目的二次三项式的二次项系数不为1，应注意把二次项系数2写在积中；两个因式内根的前面是减号，切不可写成加号.

解 令 $2x^2+3xy-4y^2=0$.

$$x_{1,2}=\frac{-3y\pm\sqrt{(3y)^2+4\times2\times4y^2}}{2\times2}=\frac{-3\pm\sqrt{41}}{4}y,$$

∴ 原式 $=2\left(x-\frac{-3-\sqrt{41}}{4}y\right)\left(x-\frac{-3+\sqrt{41}}{4}y\right)$.

∴ 选(B).

因式分解实质上是恒等变形，所以不能少乘二次项系数.

例6 已知下列各式：①$5x^2+x-1=0$；②$\frac{x}{2}+\frac{2x^2}{3}=1$；③$\frac{3}{x+1}+\frac{7}{5-x}=\frac{1}{10}$；④$\frac{1}{y-z}+\frac{1}{x-y}=\frac{1}{x-z}$；⑤$\frac{1}{2x-1}+\frac{1}{4x^2-5}$；⑥$\frac{1}{x}=0$，其中是分式方程的有__________.

分母里含有未知数的方程叫做分式方程.

解 ①是一元二次方程；②是一元二次方程；

③的分母中含有未知数，所以是分式方程；

④的分母中含有未知数，所以是分式方程；

⑤是代数式，不是方程；

⑥的分母中含有未知数，所以是分式方程.

注意代数式和方程的区别.

例7 当 a 为多少时，关于 x 的分式方程 $\frac{x^2}{x^2-3}-2=\frac{a^2}{x^2-3}$ 会产

生增根?

解分式方程时，我们一般会在方程的两边同乘含有未知数的代数式，从而把分式方程变换为整式方程，因此，原来分式方程中分母不为零的限制被无形地取消了，这样未知数的取值范围扩大了，这就产生了增根的可能.

解 将分式方程通分，得

$$\frac{x^2-2x^2+6}{x^2-3}=\frac{a^2}{x^2-3}，即 a^2=6-x^2.$$

当 $x^2-3=0$，即 $x^2=3$ 时，方程会产生增根.

把 $x^2=3$ 代入 $a^2=6-x^2$，得 $a^2=3$，

∴ $a=\pm 3$.

分式方程中，如果一个根使分母为零，则这个根就是增根.

例 8 解方程：$\frac{4x}{x^2-4}+\frac{2}{2-x}=1-\frac{1}{x+2}$.

解分式方程的基本思想是"化分式方程为整式方程". 解分式方程一定要注意验根. 用去分母法求解时，要找准最简公分母，并用它乘以每一项.

解 $\frac{4x}{(x+2)(x-2)}-\frac{2}{x-2}=1-\frac{1}{x+2}$，

两边同乘以$(x+2)(x-2)$，

整理，得 $x^2-3x+2=0$. 解得 $x_1=1$，$x_2=2$.

检验：把 $x_1=1$ 代入$(x+2)(x-2)\neq 0$，

把 $x_2=2$ 代入$(x+2)(x-2)=0$.

∴ $x_2=2$ 是原方程的增根，舍去，故原方程的根是 $x=1$.

去分母过程中要防止符号方面的错误.

三★室

例 1 当 m 为何值时，关于 x 的一元二次方程$(m-1)x^2+2mx+m=x-1$ 有两个不相等的实数根.

此题有一个隐含条件，即 $m-1\neq 0$，必须把它在解题的一