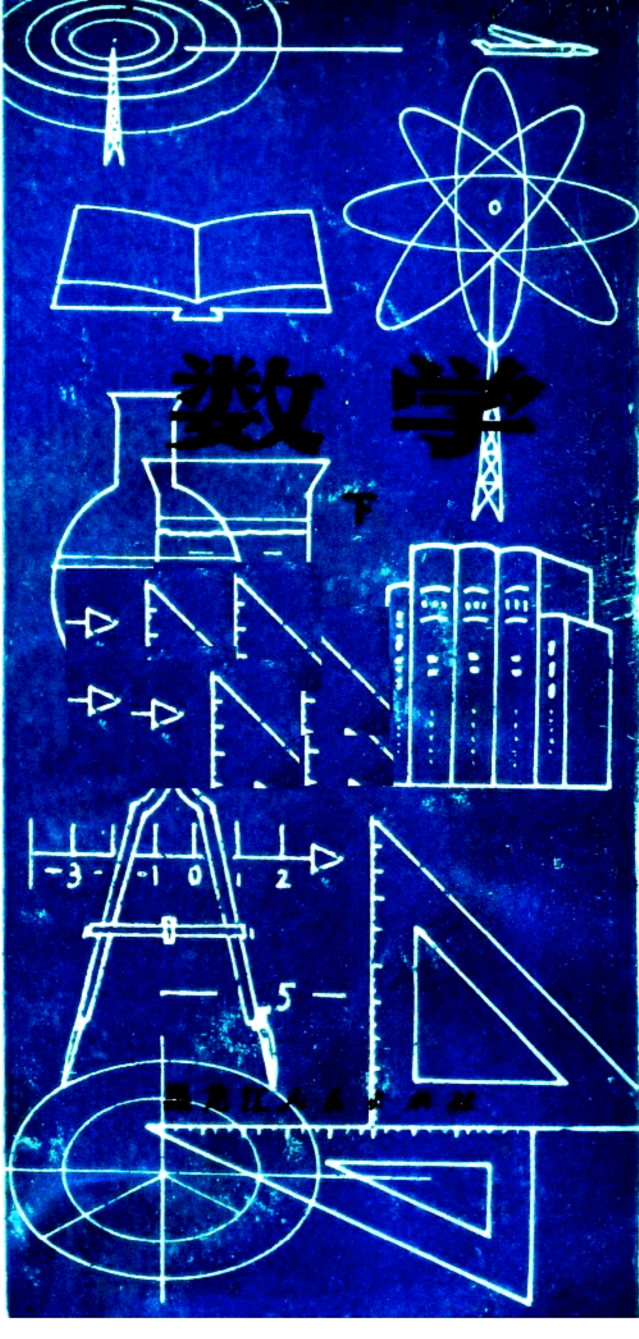
初中升学参考书

数学

下



黑龙江人民出版社

目　录

第九章　直线、相交线和平行线

一、线段、射线和直线

（一）　线段、射线和直线的联系和区别

线段向一方无限延伸形成射线，线段向两方无限延伸形成直线。线段、射线都是直线的一部分，直线的两点间的部分是线段，一点一旁的部分是射线。线段有两个端点，射线只有一个端点，直线没有端点。

（二）　直线的基本性质

1.两点决定一条直线。

2.两点间，线段最短。

图 9－1

图 9－2

二、　角

（一）　一些基本概念

1．定义：以一点为公共端点的两条射线所组成的图形叫做角。

2．度量

1 周角 $=360°$，$1°=60'$，$1'=60''$。

3．0°到180°的角

锐角　$0°<\alpha<90°$

直角　$\alpha=90°$

钝角　$90°<\alpha<180°$

平角　$\alpha=180^{\circ}$

4．量的相关

α、β互为余角　$\alpha+\beta=90^{\circ}$

α、β互为补角　$\alpha+\beta=180^{\circ}$

5．位置相关

α和β互为邻角（图9—3）

α和β互为邻补角（图9—4）

α和β互为邻余角（图9—5）

图9－3

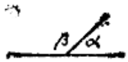


图9－4

对顶角：一个角的两条边分别是另一个角的两条边的反向延长线，这两个角叫做对顶角。（图9—6）

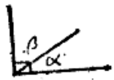


图9－5

图9－6

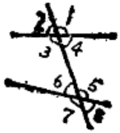


图9－7

同位角：∠1和∠5，∠4和∠8，∠2和∠6，∠3和∠7。

内错角：∠3和∠5，……

同旁内角：∠3和∠6，……

6．角的平分线定义　从一个角的顶点出发，把这个角分成相等的两个角的射线，叫做这个角的平分线。

（二）　**有关定理**

1．对顶角的性质：对顶角相等（图9—8）

2．角的平分线的性质：

（1）角平分线上任意一点到这个角的两边的距离相等。（图9—9）

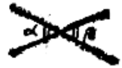
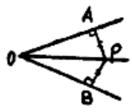


图9－8

（2）到一个角的两边距离相等的点，在这个角的平分线上。（图9—9）

图9－6



3．对应边平行（或垂直）的两个角

（1）如果两个角都是锐角或钝角，那么这两个角相等。

（2）如果两个角之中，一个为锐角另一个为钝角，那么这两个角互补。

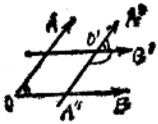


图9－10

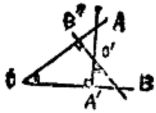


图9－11

三、同一平面内不重合的两条直线的位置关系

- 相交（有一个公共点）
  - 斜交
  - 垂直
- 平行（没有公共点）

（一）垂线

1．定义：两条直线相交成直角，叫做互相垂直，其中的一条叫做另一条的垂线，它们的交点叫做垂足。

2．基本性质

（1）经过一点有且只有一条直线垂直于已知直线。

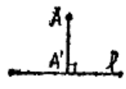


图9－12

（2）从直线外一点到这条直线的所有线段中，垂直线段最短。

图9－13

（二）线段的垂直平分线

1．定义：垂直于一条线段并且平分这条线段的直线叫

做这条线段的垂直平分线。

2．性质

（1）线段的垂直平分线上的任意一点，到线段两端的距离相等。

（2）和一条线段的两端距离相等的点，在这条线段的垂直平分线上。

图9－14

（三）平行线

1.定义：在同一平面内不相交的两条直线叫做平行线。

2．判定定理

（1）两条直线被第三条直线所截：

若同位角相等，则两直线平行；

若内错角相等，则两直线平行；

若同旁内角互补，则两直线平行。

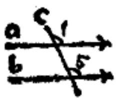


图9－15

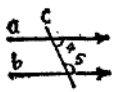


图9－16

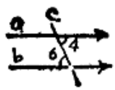


图9－17

（2）平行（或垂直）于同一直线的两条直线平行。

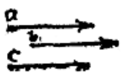


图9－18

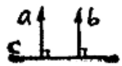


图9－19

3．性质

（1）过直线外一点，有且只有一条直线和这条直线平行。

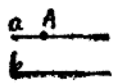


图9－20

（2）若两直线平行，则同位角相等；内错角相等；同旁内角互补。

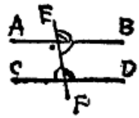


图 9—21

（3）若一条直线和两条平行线中的一条垂直，则它和另一条也垂直。

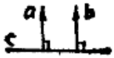


图 9—22

（4）夹在平行线间的平行线段相等。

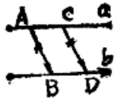


图 9—23

（5）平行线间距离处处相等

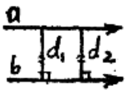


图 9—24

（6）如果一组平行线在一条直线上截得的线段相等，那么在任何一条与平行线相交的直线上截得的线段也相等。

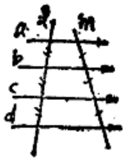


图 9—25

四、几个距离的概念

（一）两点间的距离　连结两点的线段的长，叫做这两点间的距离。

（二）点到直线的距离　从直线外一点向这条直线引垂线，点到垂足之间的距离，叫做这点到这直线的距离。

（三）平行线间的距离　两条平行线中一条直线上任意一点到另一条直线的距离，叫做这两条平行线间的距离。

五、逻辑知识

（一）几个名词

1、定义　对一个名词或述语的意义的规定。

2．命题　判断一件事情的句子。

3．公理　由人类长期实践所证实，不用推理的方法加以证明，而作为证明其它命题的根据的命题。

4．定理：用推理方法证明是正确的命题。

（二）命题的组成和四种命题的关系

1．命题的组成：命题由题设和结论两部分组成。

2．四种命题的关系

原命题　若A成立则B就成立（$A\Rightarrow B$）（1）；

逆命题　若B成立则A就成立（$B\Rightarrow A$）（2）；

否命题　若A不成立则B就不成立（$\bar{A}\Rightarrow\bar{B}$）（3）；

逆否命题　若B不成立则A就不成立（$\bar{B}\Rightarrow\bar{A}$）（4）．

四种命题的相互关系如图：

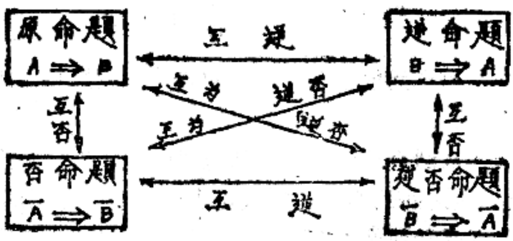


图9—26

命题（1）、（4）中的一个正确，另一个也一定正确，即（1）、（4）是等价命题（1）$\Longleftrightarrow$（4）．

命题（2）、（3）是等价命题（2）$\Longleftrightarrow$（3）．

（三）定理的证明和反证法

1．**定理的证明**　从定理的题设出发，根据已经讲过的定义、公理和已经证明过的定理，推导出定理的结论．这种直接证明求证的结论的方法叫直接证法．

2．反证法：先提出跟求证的结论相反（相排斥）的假定，然后推导出和公理、定义、已经证明过的定理或题设相矛盾的结果，这样就证明了跟求证的结论相反的假定不能成立，从而肯定了原来求证的结论不得不成立．这实际是证明原命题的逆否命题．

例1　已知：$\angle\alpha$和$\angle\beta$互为补角，并且$\angle\beta$的一半比$\angle\alpha$小30°，求：$\angle\alpha$和$\angle\beta$的大小．

解：设$\angle\alpha = x°$，$\angle\beta = y°$，那么

$$\begin{cases} x + y = 180 \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ x - \dfrac{1}{2}y = 30 \cdots\cdots (2) \end{cases}$$

（1）+（2）×2得　$3x = 240$　$\therefore x = 80$

代入（1）得　$y = 100$

$\therefore \angle\alpha = 80°$　　$\angle\beta = 100°$

注：解几何题常要用到代数知识，特别是代数式的运算和方程的知识，同学们解题时应该注意，

例2　一个角为54°．用圆规和直尺把这个角三等分．

已知：$\angle AOB = 54°$．

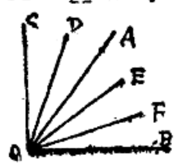
求作：射线OE、OF，使$\angle AOE = \angle EOF = \angle FOB$．

作法：1．过O作$CO \perp OB$．

2．作$\angle AOC$的平分线OD．

3．在$\angle AOB$内作OE使

图9—27



$\angle AOE=\angle AOD$。

4．作OF使$\angle EOF=\angle AOD$。

则OE、OF即为所求。

证明：$\because CO\perp OB$

$\therefore \angle AOC=\angle COB-\angle AOB=90°-54°=36°$

$\because OD$是$\angle AOC$的平分线

$\therefore \angle AOD=\frac{1}{2}\angle AOC=18°=\frac{1}{3}\angle AOB$

$\therefore \angle AOE=\angle EOF=\angle FOB$

$\therefore OE$、OF合所求

注：（1）用圆规直尺三等分任意角是不可能的，三等分54°角，实质是作18°角，这里是借助已知的54°角作出18°角，如果没有给出54°角，可用黄金分割法先将圆周10等分求得36°角，再得到18°角。

（2）欲作一个角，要注意利用给出的已知角和熟知的能够作出的特殊角，一副三角板有30°、45°、60°、90° 等四种角，只用三角板可以作出这些基本角度和它们的和、差、正整数倍.用圆规、直尺可以作出60°、90°、36°。因此，也可以作出它们的和、差、正整数倍和2^n（n是自然数）等分。

例3　已知：如图，AOB为一直线，OD平分$\angle AOC$，OE平分$\angle BOC$。

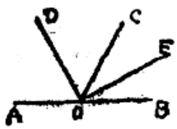


图9－28

求证：$OD\perp OE$

证明：$\because AOB$为一直线　$\therefore \angle AOC+\angle COB=180°$。

又OD平分$\angle AOC$，OE平分$\angle BOC$

$\therefore \angle AOD=\angle DOC$，$\angle COE=\angle EOB$

于是 $2\angle DOC+2\angle COE=180^\circ$

$\therefore\ \angle DOC+\angle COE=90^\circ$

$\therefore\ OD\perp OE$

注：用类似的方法可解下题：若一条直线与两平行线相交，则一对同旁内角的平分线互相垂直。实际上，把例 3 图形中的 AB 与 OE 沿 OC 方向平移，如果 OE 的新位置是 CE'，然后反向延长 CE' 与 OD 相交，就得到本题图形。因为是平移，所以 $CD\perp OD$。

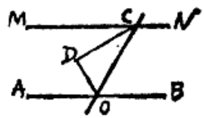


图 9—29

例 4　如图，已知：$\angle BED=\angle B+\angle D$。

求证：$AB\parallel CD$

证明：过 E 作 $EF\parallel AB$，则 $\angle 1=\angle B$

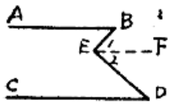


图 9—30

$\because\ \angle BED=\angle B+\angle D$

又 $\angle BED=\angle 1+\angle 2$　$\therefore\ \angle 2=\angle D$

$\therefore\ EF\parallel CD$　$\therefore\ AB\parallel CD$。

注：1．引辅助线的目的是创造条件使未知和已知联系起来，从而找到解决问题的方法。引辅助线，要考虑问题的结论需要根据什么图形性质来推出？问题的已知条件构成什么图形？它有什么性质可以利用？例 4 是关于直线平行的问题，引辅助线是为了运用有关平行线的性质和判定，从这个想法出发还可以有别种引辅助线的方法。如：

（1）过 E 作射线 EF，使 $\angle BEF=\angle B$，证 $EF\parallel CD$（如上图 9—30）。

（2）延长BE交CD于F，根据三角形外角的性质，推出$\angle B=\angle 1$。（图9—31）

（3）连结BD，根据三角形内角和定理推出$\angle ABD+\angle CDB=180°$。图（9—32）

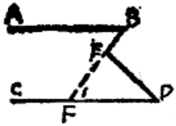


图9—31

图9—32

2，如果把例4的条件和结论调换一下，即改成已知：$AB /\!/ CD$，求证：$\angle BED=\angle B+\angle D$。由于解这个题还要常运用平行线的性质，因此，仍然可以象例4那样引辅助线。解每个题，如果能这样多想想，会得到更多的收益。

例5　已知：如图，P为线段AB的中点，$AC\perp MN$，$BD\perp MN$，C、D为垂足。

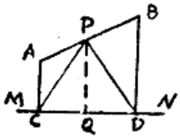


图9—33

求证：$PC=PD$

证法一：作$PQ\perp MN$，那么$AC /\!/ PQ /\!/ BD$

$\because$　P是AB中点　$\therefore$　Q是CD中点

$\therefore$　PQ是CD的垂直平分线　$\therefore$　$PC=PD$。

证法二：如图9—34，延长CP和DB的延长线相交于E。

$\because AC /\!/ ED$，$\therefore \angle A=\angle PBE$。

又$\angle APC=\angle BPE$，$AP=PB$，

$\therefore \triangle APC\cong\triangle BPE$ $\therefore CP=PE$

$\because$在$\triangle CDE$中，$\angle CDE=Rt\angle$，

$\therefore PD=\dfrac{1}{2}CE=PC$。

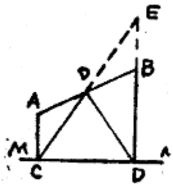


图9—34

注：如果线段的两端点在直线MN的两侧，只要延长CP交BD于E，然后证明PD是$Rt\triangle EDC$斜边CE上的中线即可。

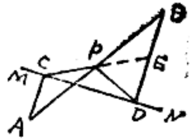


图9－35

本书例题，凡给出几种解法的，除第一种解法外，其余的只写出略解。

例6 求证：如果两条直线分别垂直于两条相交的直线，那么这两条直线相交。

已知：直线a、b、c、d，a与b相交于P，$c\perp a$，$d\perp b$。

求证：c与d必相交。

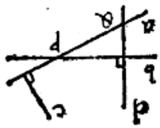


图9－36

证明：假定c与d不相交，根据平行线定义有：

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l} c \parallel d \\ a\perp c\end{array}\right\}\Rightarrow a\perp d \\ \qquad\qquad b\perp d\end{array}\right\}\Rightarrow \text{过}P\text{有两条直线垂直于直线}d$$

与垂线基本性质矛盾。

$\therefore$直线c与d必相交。

例7 已知：$\triangle ABC$，点P满足条件，$PB+PC>AB+AC$。

求证：点P在$\triangle ABC$的外部。

证明：假定点P不在$\triangle ABC$外部，那么点P或在$\triangle ABC$边上，或在$\triangle ABC$内部。

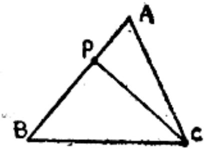


图9－37

（1）若点P在$\triangle ABC$边上，则

点P或在AB边上，或在AC边上，或在BC边上。

当点P在AB边上，

$\because PC \leqslant AP + AC$（$P$与$A$重合时取等号），

$\therefore PB + PC \leqslant AB + AC$，与已知矛盾。

当点P在AC边上，同理可推出

$PB + PC \leqslant AB + AC$，与已知矛盾。

当P在BC边上，

$\because PB + PC = BC$，$BC < AB + AC$。

$\therefore PB + PC < AB + AC$，与已知矛盾。

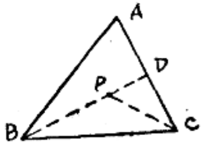


图 9－38

（2）若点P在$\triangle ABC$内部，连结PC、PB。并延长BP交AC于D，则

$\because BD < AB + AD \quad PC < PD + DC \quad PB = BD - PD$

$\therefore PB + PC < AB + AD + DC$

即$PB + PC < AB + AC$，与已知矛盾。

综合（1）、（2），点P必在$\triangle ABC$外部。

注：用反证法证题，当所要求证的命题的结论的反面不止一种情形时，我们就要把所要求证的结论的反面逐个否定，然后再得出所要求证的结论。

练 习 A

1．三点P、Q、R在一条直线上，确定几条不同的线段和不同的射线？

2．过一点能画几条直线？过两点呢？ 过三点呢？ 过四点呢？（按点的不同位置关系说明）

3．从一点出发的三条射线能组成几个小于平角的角？如果是四条射线呢？

4．已知一个角，怎样画出它的对顶角？有公共顶点的两个角是否就是对顶角？还需要添什么条件才是对顶角？

5．已知直线a通过点P且与直线b成25°角，如果保持通过点P的要求，怎样改变直线a的位置才能使：（1）$a\perp b$；（2）$a/\!/b$。

6．如图，直线AB、CD、EF都通过点O，并且已知$\angle AOC=35°$，$\angle COE=46°$。图中有多少个在0°到180°之间的角？都是多少度？

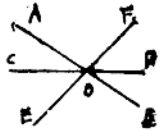


图9－39

7．如图，$AD/\!/BC$，$AB/\!/DC$，哪些角相等？哪些角互补？为什么？

图9－40

练习 B

1．填空

（1）$3.5m=$（　　）cm；（2）45厘米＝（　　）米；

（3）1980米＝（　　）公里；

（4）$57.32°=$（　　）°（　　）′（　　）″；

（5）$49°28'32''\div 4=$（　　）；

（6）$\frac{1}{4}$平角＝（　　）°，$\frac{1}{6}$周角＝（　　）°，

$\frac{2}{3}$直角＝（　　）°；

（7）15°21′30″的余角为（　　），补角为（　　）；

（8）一个角是它的补角的5倍，则这个角是（　　）度。

2．一点将长为28.8米的线段分为$\frac{2}{5}$：$\frac{4}{15}$的两部分，求此分点与原线段中点的距离。

3．线段AB被分成2：3：4：5四部分。两端的两部分的中点间的距离为47.25，求中间两部分的中点的距离。

4．两个角互为邻角，它们的比是7：3，它们的差是72°，这两个角是不是邻补角？

5．如图，已知：$\angle AOB=165°$，$\angle AOC=\angle BOD=90°$，求：$\angle COD$。

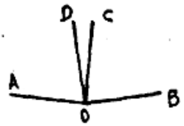


图9－41

6．一个角的补角等于这个角的余角的3倍，求这个角。

7．测量员沿着一块地的周围测绘这块地时，先从A点向北偏东75°走240米到B点，再从B点向北偏西20°走360米到C点，再从C点向南偏西65°走450米到D点，最后从D点回到A点。用1厘米表示100米作图，并量出A和D间的距离（精确到10米），以及D到A的方向（精确到1°）。

8．已知一条直线和两条平行线相交，求证其一组同位角的平分线互相平行。

9．如图，已知，$FE\perp AB$，$CD\perp AB$，$\angle 1=\angle 2$。求证：$\angle AGD=\angle ACB$

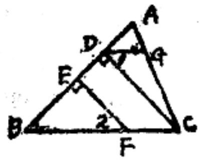


图9－42

10．如图，已知：$\angle ABE+\angle E+\angle CDE=360°$；

求证：$AB\parallel CD$。　图9－43．