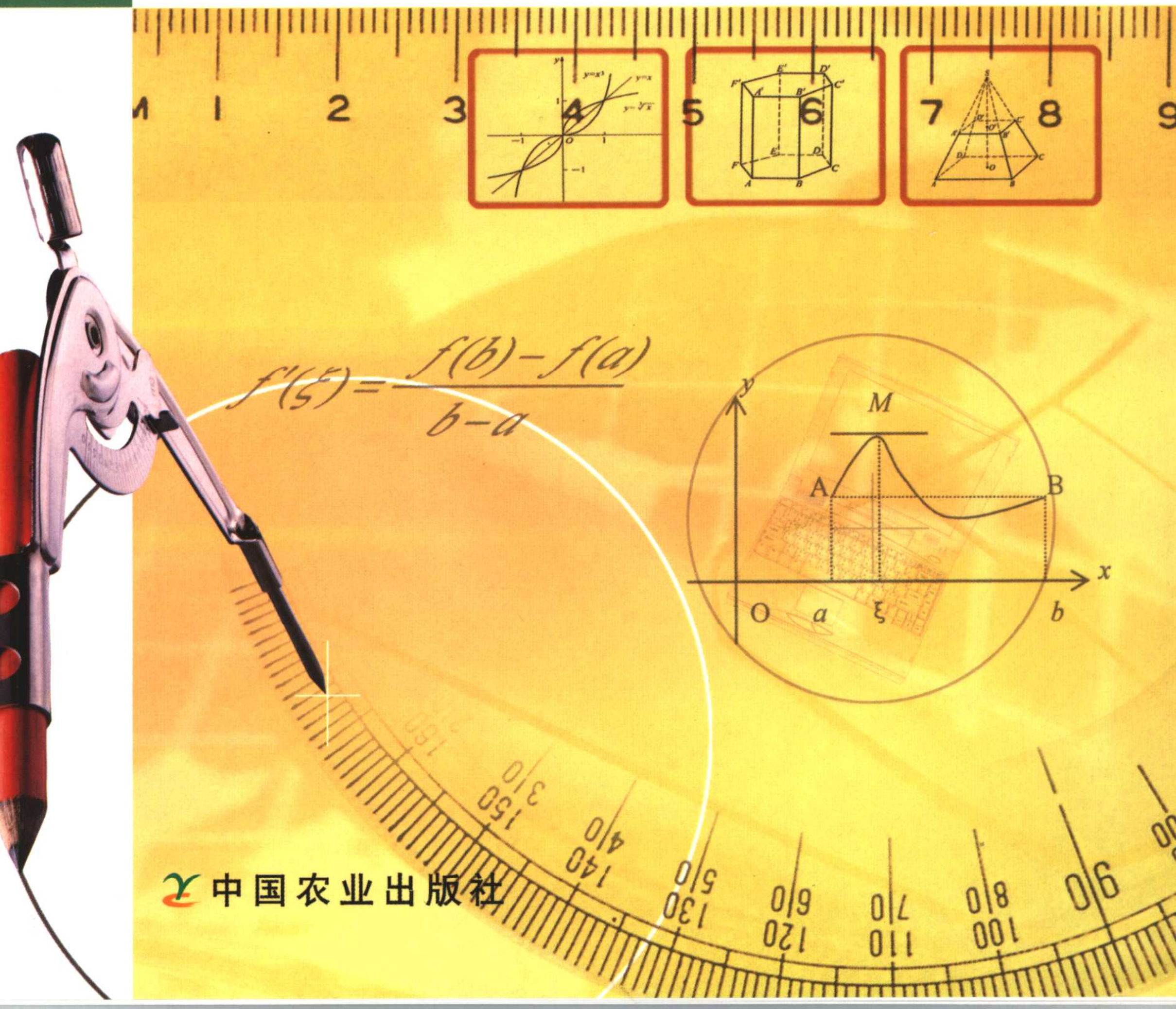
21世纪全国高职高专规划教材

董亲学 刘晓峰 主编

应用数学



中国农业出版社

21世纪全国高职高专规划教材

应 用 数 学

董亲学 刘晓峰 主编

中国农业出版社

图书在版编目（CIP）数据

应用数学/董亲学，刘晓峰主编．—北京：中国农业出版社，2006.6
21世纪全国高职高专规划教材
ISBN 7-109-10927-5

Ⅰ．应…　Ⅱ．①董…②刘…　Ⅲ．应用数学-高等学校：技术学校-教材　Ⅳ．029

中国版本图书馆CIP数据核字（2006）第060272号

中国农业出版社出版
（北京市朝阳区农展馆北路2号）
（邮政编码100026）
出版人：傅玉祥
责任编辑　许　坚

北京智力达印刷有限公司印刷　新华书店北京发行所发行
2006年7月第1版　2006年7月北京第1次印刷

开本：720mm×960mm　1/16　印张：11.75
字数：203千字
定价：19.00元

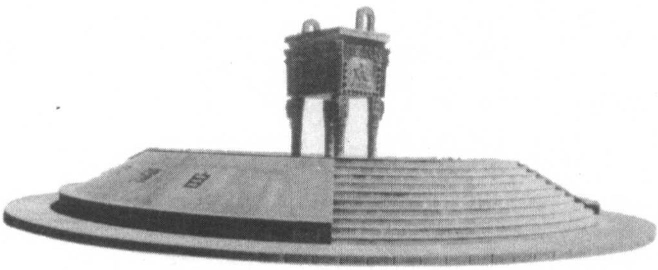
内 容 简 介

本教材是21世纪全国高职高专规划教材。

本教材着力体现当前高职高专院校数学改革的成果。全书始终贯彻“在基础课的教学中，要求以应用为目的，以必需、够用为度”的精神。本教材内容包括集合、函数、数列、三角函数、解析几何、排列组合、复数、几何体的画法与计算等8章。

本教材可供五年制高职高专院校师生使用，亦可作为数学爱好者的自学用书。

主　编　董亲学　刘晓峰
副主编　王玉家　马爱民
编　者　田　杰　巩　娟　李甜甜
姜晓艳　赵大伟　高　彦
郭亚坤　霍春光　张丽娟



前　言

本教材根据《教育部关于加强高职高专教育人才培养工作的意见》和《关于加强高职高专教育教材建设的若干意见》的精神，结合高职高专教学现状及总结多年来教学经验编写而成。

数学的教学目的一方面是为学习专业和其他课程提供必备的数学知识和计算能力，另一方面是养成良好的数学素质，培养与提高学生的思维能力和分析、解决问题的能力. 故本教材在编写过程中，本着以能力为本位，确保基础、服务专业、突出能力，以“必需、适用、够用”为度的原则，尽力与初中数学基础衔接，覆盖高中数学知识点，在论述数学基础知识、基本理论和基本技能时，力求注重启迪思想、开发智力，淡化或省略理论推导，降低难度，尽力做到联系实际，联系相关专业，简明扼要，深入浅出，并带有一定的趣味性.

本教材由董亲学、刘晓峰任主编，王玉家、马爱民任副主编，田杰、巩娟、李甜甜、姜晓艳、赵大伟、高彦、郭亚坤、霍春光、张丽娟等参加了编写，刘晓峰统一策划并定稿. 李甜甜为本教材的打印和校对做了大量的工作.

尽管我们在编写过程中尽职尽责，努力工作，但书中难免存在错误和不当之处，敬请读者提出批评、建议和意见，以便进一步完善.

编　者

2006 年 5 月

目　　录

第一章　集　　合

1.1　集　　合

我们在研究一些事物的过程中，常常会遇到符合某些条件的事物的整体，如：

(1) 二年级一班的全体同学；

(2) 小明的所有玩具；

(3) 所有的三角形．

这些具有某种属性的事物的全体，我们称之为**集合**，集合里的每个对象叫做这个集合的**元素**.上例中的"二年级一班的全体同学"为一集合，其中每一个同学都是这个集合的元素."所有的三角形"为一集合，每一个三角形都是这个集合的元素.

通常集合用大写字母表示，如 $A,B,C,\cdots\cdots$. 元素用小写字母表示，如 $a,b,c,\cdots\cdots$. 集合中的元素具有以下特性：

(1) 确定性　即组成集合的每一个事物都是明确的，不能模棱两可．如集合"二年级一班的全体同学"中，有或者没有某个人非常明确．

(2) 互异性　即一个集合中不能有两个完全一样的元素．

(3) 无序性　即组成集合的元素不分先后顺序，只要符合特定条件即可．如在集合"二年级一班的全体同学"中，先说谁后说谁都可以．

例 1　判断下列各题能否构成集合：

(1) 我们班所有的桌子；

(2) 好看的图画；

(3) 所有的中国人；

(4) 所有的好人．

解　(1)、(3)是集合，因为组成这两个整体的每一个个体都是确定的．(2)、(4)不是集合，因为没有一个确定的标准来判断，其中的元素是不确定的．

为了方便起见，下面我们用固定的字母表示常用的集合：

所有自然数组成的集合为**自然数集**，记为$\mathbb{N}$．

所有整数组成的集合为**整数集**，记为$\mathbb{Z}$．

所有有理数组成的集合为**有理数集**．记为$\mathbb{Q}$．

所有实数组成的集合为**实数集**．记为$\mathbb{R}$．

正整数集记为$\mathbb{Z}^+$，**负整数集**记为$\mathbb{Z}^-$，**正有理数集**记为$\mathbb{Q}^+$，**负有理数集**记为$\mathbb{Q}^-$，**正实数集**记为$\mathbb{R}^+$，**负实数集**记为$\mathbb{R}^-$.

集合与元素之间的关系表述如下：

设有元素a、b和集合A，若元素a在集合A中，则说a**属于**A，记为$a\in A$. 若元素b不在集合A中，则说b**不属于**A，记为$b\notin A$(或$b\,\overline{\in}A$).

例 2 用符号"$\in$"或"$\notin$"填空：

(1) 4 ______ $\mathbb{N}$；(2) -2 ______ $\mathbb{Q}$；(3) $\sqrt{3}$ ______ $\mathbb{Q}^+$；(4) $\frac{1}{2}$ ______ $\mathbb{Z}$；

(5) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ______ $\mathbb{Z}$；(6) 0 ____ $\mathbb{N}$；(7) $-\sqrt{5}$ ______ $\mathbb{R}^-$；(8) 0 ______ $\mathbb{Q}^-$.

解 (1) $\in$；(2) $\in$；(3) $\notin$；(4) $\notin$；(5) $\notin$；(6) $\in$；(7) $\in$；(8) $\notin$.

按集合中元素的多少可将其分为以下几类：

(1) 有限集　只有有限个元素的集合；

(2) 无限集　含有无限个元素的集合；

(3) 单元素集　只含有一个元素的集合；

(4) 空集　不含任何元素的集合，记作$\varnothing$.

练习

1. 下列各题能否构成集合？说明理由.

(1) 小于 10 的整数；

(2) 英文的 26 个字母；

(3) 非常小的数；

(4) 喜欢运动的人.

2. 用符号"$\in$"或"$\notin$"填空：

(1) $\frac{1}{3}$ ____ $\mathbb{N}$；(2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ______ $\mathbb{Z}$；(3) π ______ $\mathbb{Q}$；(4) $\sqrt{3}$ ______ $\mathbb{R}$；

(5) $-\sqrt{5}$ ______ $\mathbb{R}$；(6) $\sqrt{7}+1$ ______ $\mathbb{R}^+$；(7) 0 ______ $\varnothing$；(8) $\sqrt{9}$ ______ $\mathbb{Q}$.

1.2 集合的表示法

集合的表示方法，一是列举法，二是描述法.

1. 列举法

把集合中的元素一一列举出来，写在大括号内，这种表示集合的方法叫做**列举法**.

例如，所有大于 2 且小于 8 的整数组成的集合，可表示为

$$\{3,4,5,6,7\}.$$

又如，方程 $x^2=1$ 的所有的解组成的集合，可表示为

$$\{-1,1\}.$$

注意 用列举法表示集合时，每个元素只写一次，不必考虑元素之间的先后顺序. 元素之间用逗号隔开.

例 1 用列举法表示下列集合：

(1) 小于 10 的自然数；

(2) 一年中的四季；

(3) 方程 $x^2-3x+2=0$ 的解.

解 (1) $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$；

(2) {春,夏,秋,冬}；

(3) $\{1,2\}$.

2. 描述法

列举法简单明了，但有时用起来不太方便. 如“小于 10 000 的自然数”组成的集合就不太方便用列举法表示，有的集合用列举法表示不了，如“所有实数组成的集合”就不能用列举法表示. 因此，我们给出集合的另一种表示方法——描述法.

把集合中的元素的共有特性，用文字或数学表达式描述出来，写在大括号内，这种表示集合的方法，叫做**描述法**.

例 2 用描述法表示下列集合：

(1) 所有偶数组成的集合；

(2) $\{1,3,5,7,9\}$；

(3) 方程 $x^2+5x+4=0$ 的解的集合.

解 (1){偶数}；

(2) $\{x \mid x=2n-1, n\in\mathbb{Z}^+，且 n\leqslant 5\}$；

或 $\{2n-1 \mid n\in\mathbb{Z}^+ 且 n\leqslant 5\}$

(3) $\{x \mid x^2+5x+4=0\}$.

注意 用数学表达式来描述时，大括号中竖线左边的 x 表示集合的代表元素，右边的表达式描述集合中元素的性质特征.

例 3 用适当方法表示下列集合：

(1) 最小的自然数；

(2) 小于 100 的正偶数；

(3) 36 的平方根；

(4) 能被 3 整除的自然数.

解 (1) $\{0\}$；

(2) $\{2m \mid m \in \mathbb{Z}^+$ 且 $m < 50\}$；

(3) $\{-6, 6\}$；

(4) $\{3m \mid m \in \mathbb{N}\}$.

注意 $\{0\} \neq \varnothing, 0 \notin \varnothing$.

练习

1. 用适当方法表示下列集合：

(1) 2 的整数次幂；

(2) 大于-3且小于等于 5 的偶数；

(3) 不等式 $x+3<0$ 的解集；

(4) 最大的负整数；

(5) 火药、指南针、造纸术、印刷术；

(6) 相反数等于本身的数；

(7) 小于 10 000 的自然数；

(8) 绝对值等于 5 的实数.

2. 用另一种方法表示下列各集合：

(1) $\{2,4,6,8,10,12\}$；

(2) {6 的因数}；

(3) {北京市}；

(4) $\{x \mid 0<x<15$ 且是 4 的倍数$\}$；

(5) $\{-2,2\}$；

(6) {我国国旗的颜色}；

(7) {能整除 5 的正数}；

(8) $\left\{x \,\middle|\, \begin{cases} x^2-2x-3=0 \\ x^2-3x-4=0 \end{cases}\right\}$.

1.3 集合之间的关系

两个集合之间可能有什么样的关系呢？我们看下面的例子：

(1) $A=${我们班的全体同学}；

$B=${我们班的全体男同学}；

(2) $A=\{1,2,3,4,5,6\}$；

$B=\{2,4,6\}$.

可以看出，B 中的元素都在 A 中，称 B 为 A 的子集．

一般地，如果集合 B 中的每一个元素都是集合 A 中的元素，那么，集合 B 叫做集合 A 的**子集**，记作 $B\subseteq A$（或 $A\supseteq B$）. 读作"B 包含于 A"（"或 A 包含 B"）.

当集合 B 不包含于集合 A，或集合 A 不包含集合 B 时，记作

$$B\nsubseteq A(\text{或 } A\nsupseteq B).$$

我们规定：**空集是任何集合的子集**，即 $\varnothing\subseteq A$.

特别地，**任何一个集合都是它本身的子集**，即 $A\subseteq A$.

例 1 填空：

(1) $\mathbb{N}$ ____ $\mathbb{Z}$；(2) $\mathbb{Z}$ ______ $\mathbb{Q}$；(3) $\mathbb{R}^+$ ______ $\mathbb{R}$；

(4) $\mathbb{R}$ ______ $\mathbb{Q}$；(5) $\varnothing$ ______ $\{1\}$；(6) $\{1,2,3\}$ ______ $\{2\}$；

(7) $\{1,2,3\}$ ______ $\{2,3,4\}$；(8) $\{0\}$ ______ $\varnothing$.

解 (1) $\subseteq$；(2) $\subseteq$；(3) $\subseteq$；(4) $\supseteq$；(5) $\subseteq$；(6) $\supseteq$；(7) $\nsubseteq$；(8) $\supseteq$.

例 2 写出集合 $\{1,2,3\}$ 的所有的子集.

解 集合 $\{1,2,3\}$ 的所有的子集是 $\varnothing$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$，$\{1,2\}$，$\{1,3\}$，$\{2,3\}$，$\{1,2,3\}$.

观察上述例 2，集合 $\{1,2,3\}$ 的所有子集中，除了它本身，其余 7 个元素有一共同特点，即每个集合至少比集合 $\{1,2,3\}$ 少一个元素．

一般地，如果集合 B 是集合 A 的子集，且集合 A 中至少有一个元素不属于集合 B，那么集合 B 是集合 A 的**真子集**，记作 $B\subsetneqq A$（或 $A\supsetneqq B$）.

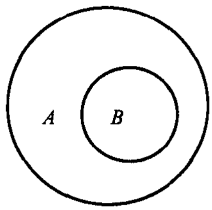


图 1-1

空集是任何非空集合的真子集.

为了更形象地比较集合之间的关系，常用一条封闭的曲线（如圆、矩形等）的内部来表示一个集合，称这种图形为**文氏图**．图 1-1 表示 $B\subsetneqq A$，图 1-2 表示 $C\subsetneqq B\subsetneqq A$.

例 3 指出下列各集合之间的关系，并用文氏图表示．

$A=\{$三角形$\}$；$B=\{$直角三角形$\}$；

$C=\{$等腰三角形$\}$；$D=\{$等腰直角三角形$\}$.

解 图 1-3 表示 $D\subsetneqq B\subsetneqq A$，图 1-4 表示 $D\subseteq C\subseteq A$.

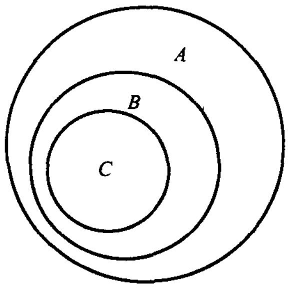


图 1-2

两个集合之间的关系除了包含或不包含的关系外，还有相等关系．

一般地，如果两个集合的元素完全相同，那么就说这两个**集合相等**，记作 $A=B$. 于是 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A\Leftrightarrow A=B$.

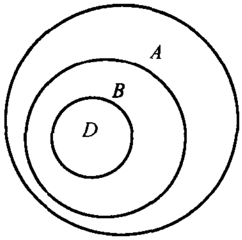


图 1-3

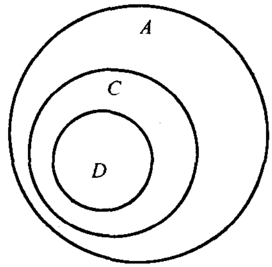


图 1-4

例 4 指出下列两个集合的关系：

(1) $A=\{$自然数$\}$, $B=\{$整数$\}$；

(2) $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{1,3\}$；

(3) $A=\{x|x^2-5x+6=0\}$, $B=\{2,3\}$；

解 (1) $A \subsetneqq B$；(2) $A \supsetneqq B$；(3) $A=B$.

练习

1. 写出集合 $\{1,2\}$ 的所有的子集和真子集.

2. 指出下列集合之间的关系，并用文氏图表示.

$A=\{$四边形$\}$, $B=\{$梯形$\}$, $C=\{$直角梯形$\}$, $D=\{$等腰梯形$\}$.

3. 用符号“$\in$、$\notin$、$\subsetneqq$、$\supsetneqq$、$=$”填空：

(1) $\{x|x^2=16\}$ ______ $\{-4,4\}$；　(2) 2 ______ $\{1,2,3\}$；

(3) $\{0\}$ ______ $\varnothing$；　(4) $\sqrt{3}$ ______ $\{\sqrt{2},3,5\}$；

(5) 3 ______ $\{x|x-3=0\}$；　(6) $\{x|x^2+1=0\}$ ____ $\varnothing$；

(7) $\{0,1\}$ ______ $\{0,1,2\}$；　(8) 0 ______ $\varnothing$；

(9) $\{x||x|=2\}$ ____ $\{-2,2\}$；　(10) $\{x|x\geqslant 5\}$ ______ $\{x|5<x<7\}$.

1.4 集合的运算

1. 交集

一般地，给定两个集合 A、B，由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做 A 与 B 的**交集**，记作 $A\cap B$（读作“A 交 B”），即 $A\cap B=\{x|x\in A$，且 $x\in B\}$.

如图 1-5 中，$A\cap B$ 为图中的阴影部分. 由交集的定义容易知道，对于任何集合 A 和 B，有 $A\cap A=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$，$A\cap B=B\cap A$.

例 1 求下列集合 A 与集合 B 的交集：

(1) $A=\{a,b,c,d\}$，$B=\{c,d,e,f\}$；

(2) $A=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 5\}$，$B=\{x\mid 3<x<7\}$.

解 (1) $A\cap B=\{c,d\}$；

(2) $A\cap B=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 5$ 且 $3<x<7\}=\{x\mid 3<x\leqslant 5\}$.

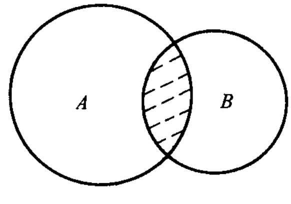


图 1－5

2. 并集

一般地，给定两个集合 A 和 B，由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做 A 与 B 的**并集**，记作 $A\cup B$（读作"A 并 B"），即 $A\cup B=\{x\mid x\in A$，或 $x\in B\}$.

图 1－6 中的阴影部分表示集合 $A\cup B$. 由并集的定义我们可知 $A\cup A=A$，$A\cup\varnothing=A$，$A\cup B=B\cup A$.

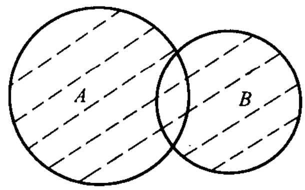


图 1－6

例 2 求下列两个集合的并集：

(1) $A=\{-1,0,1,3\}$，$B=\{1,3,5,7\}$.

(2) $A=\{x\mid -2<x\leqslant 0\}$，$B=\{x\mid -1<x\leqslant 3\}$.

解 (1) $A\cup B=\{-1,0,1,3,5,7\}$；

(2) $A\cup B=\{x\mid -2<x\leqslant 0$ 或 $-1<x\leqslant 3\}=\{x\mid -2<x\leqslant 3\}$.

3. 全集和补集

设集合 S 是班级同学的全体，集合 A 是班上所有参加跳绳比赛的同学所组成的集合，而集合 B 是班上所有没有参加比赛的同学的集合，容易看出，集合 B 就是集合 S 中除去集合 A 之后余下来的集合.

一般地，设 S 是一个集合，如果在所研究的问题中，涉及的每一个集合都是 S 的一个子集，那么就称 S 为**全集**. 设 A 是 S 的一个子集（即 $A\subseteq S$）. 由 S 中所有不属于 A 的元素组成的集合，叫做 A 在 S 中的**补集**，记作 $\complement_S A$，即 $\complement_S A=\{x\mid x\in S$，且 $x\notin A\}$.

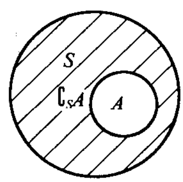


图 1－7

图 1－7 中的阴影部分表示 A 在 S 中的补集 $\complement_S A$.

由定义知，$A\cap\complement_S A=\varnothing$；

$A\cup\complement_S A=S$；

$\complement_S(\complement_S A)=A$.

例 3 设全集 $S=\{0,1,2,3,4,5,6\}$，$A=\{0,2,4\}$，$B=\{1,3,5\}$，求 $\complement_S A$，$\complement_S B$，$\complement_S(\complement_S A)$，$\complement_S(A\cap B)$，$\complement_S(A\cup B)$.

解 $A\cap B=\varnothing$，$A\cup B=\{0,1,2,3,4,5\}$；

$\complement_S A=\{1,3,5,6\}$；

$\complement_S B=\{0,2,4,6\}$，$\complement_S(\complement_S A)=\{0,2,4\}=A$；

$\complement_S(A\cap B)=\{0,1,2,3,4,5,6\}=S$；

$\complement_S(A\cup B)=\{6\}$.

例 4 全集 $S=\mathbb{R}$，$A=\{x|x<-3\}$，$B=\{x|x\geqslant 5\}$，求 $\complement_S A$，$\complement_S B$，$A\cup B$，$A\cap B$，$\complement_S(A\cap B)$，$\complement_S(A\cup B)$，$(\complement_S A)\cap(\complement_S B)$，$(\complement_S A)\cup(\complement_S B)$.

解 $A\cap B=\varnothing$，$A\cup B=\{x|x<-3$ 或 $x\geqslant 5\}$；

$\complement_S A=\{x|x\geqslant -3\}$，$\complement_S B=\{x|x<5\}$，$\complement_S(A\cap B)=\mathbb{R}$；

$\complement_S(A\cup B)=\{x|-3\leqslant x<5\}$；

$(\complement_S A)\cap(\complement_S B)=\{x|-3\leqslant x<5\}$；

$(\complement_S A)\cup(\complement_S B)=\{x|x\geqslant -3$ 或 $x<5\}=\mathbb{R}$.

练习

1. 指出下列集合中 A 与 B 的交集和并集：

(1) $A=\{a,b,e,f\}$，$B=\{c,d,e,f\}$；

(2) $A=\{-2,0,2,4\}$，$B=\{-1,0,1,2\}$；

(3) $A=\{x|-3<x\leqslant 0\}$，$B=\{x|x\geqslant 0\}$；

(4) $A=\{$正方形$\}$，$B=\{$矩形$\}$.

2. 设全集 $S=\{$小于 8 的自然数$\}$，$A=\{1,3,5\}$，$B=\{5,7,8\}$，求 $A\cup B$，$A\cap B$，$\complement_S A$，$\complement_S B$，$\complement_S(A\cap B)$，$\complement_S(A\cup B)$.

3. 已知 $S=\mathbb{R}$，$A=\{x|-2<x\leqslant 5\}$，$B=\{x|0\leqslant x<3\}$，求 $A\cup B$，$A\cap B$，$\complement_S A$，$\complement_S B$，$\complement_S(A\cap B)$，$\complement_S(A\cup B)$.

1.5 含绝对值的不等式解法

根据绝对值的含义，我们知

$$|a|=\begin{cases}a, & a>0\\ 0, & a=0\\ -a, & a<0\end{cases}$$

因此，对于正实数 a，有公式

$|x|\leqslant a\Leftrightarrow -a\leqslant x\leqslant a$；

$|x|>a\Leftrightarrow x<-a$ 或 $x>a$.

利用上述公式和以前的不等式的基本性质，我们可以解含有绝对值的不等式.