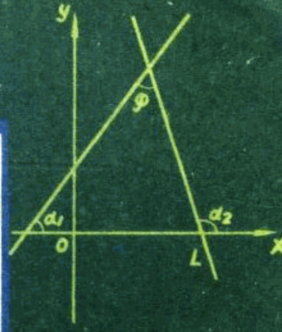
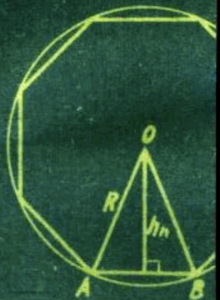
中学数学习题与例题选讲

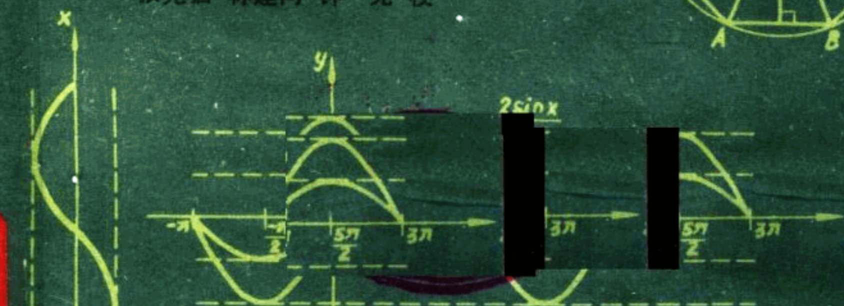
第二册（上）

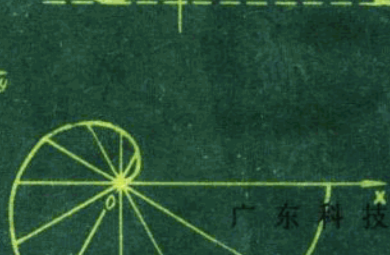
汪国强　罗家洪　袁国珍
黎镇垫　陈必彬　徐永汉　编

张兆驷　林建同　钟　光　校









广东科技出版社

中学数学习题与例题选讲

第 二 册（上）

汪国强 罗家洪 袁国珍
黎镇堃 陈必彬 徐永汉 编

张兆骊 林建同 钟 光 校

*

广东科技出版社出版

广东省新华书店发行

广东新华印刷厂印刷

787×1092毫米 32开本 8印张 176,000字

1980年1月第1版 1981年9月第2次印刷

印数 81,401—191,400册

统一书号 13182·13 定价 0.56元

写在前面

本书将分册出版。第一册是有关代数部分的，以后各册包括几何（平面几何、立体几何、解析几何）、三角、综合题以及高等数学的一部分内容。我们希望：它有助于中学生读者复习、巩固课堂所得知识，还可以加深基本概念和运算方法。

学好数学的基本要求是概念清楚和运算熟练。因为，准确的概念有助于解题方案的安排和解题方法的寻探；正确而简捷的解题方法有助于概念的进一步深化。对于中学生来说，主动地要求自己培养这方面的素质，是有好处的。

本书在题解方面，力求注意正反两个方面，“正面”指的是在解题技巧上下功夫，有的给出一般解法，有的给出两种甚至三种或更多种解法，“反面”指的是对同学们易犯的错误或易于疏忽的地方提出告诫。我们以为，正反两面的知识，都是值得重视的。

编者

目 录

第一篇 平面几何

第二篇 三 角

第三篇　立体几何

第 一 篇

平 面 几 何

（考虑到近年来中学平面几何的教学情况，在这一部分，我们着重补充一些关于证题方面的例子与习题）。

第一章　证明两线段相等的方法

例1．证明有两条高相等的三角形是等腰三角形。

【已知】$\triangle ABC$（如图1—1）中，$BD\perp AC$，$CE\perp AB$，且$BD=CE$。

【求证】$AB=AC$。

【分析】由于$BD\perp AD$，$CE\perp AB$，并且$BD=CE$，我们可以把AB，AC作为某两个全等直角三角形的对应边来考虑，显然可以取直角三角形BDA和CEA，因为$\angle A$是它们的公共角。

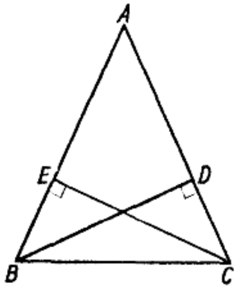


图1—1

【证】　在直角$\triangle BDA$和直角$\triangle CEA$中，$\angle A$是公共角，$BD=CE$，$\therefore \triangle BDA\cong\triangle CEA$（一锐角、一直角边相等），$\therefore AB=AC$（对应边），即$\triangle ABC$为等腰$\triangle$。

例2．证明有两条中线相等的三角形为等腰三角形。

【已知】$\triangle ABC$（如图1—2）中，BD和CE分别是AC边与AB边上的中线，且$BD=CE$。

【求证】$AB=AC$。

【分析】设想已经证得$AB=AC$，那末很明显地有关

系式$\triangle BDA\cong\triangle CEA$，于是$\angle 1=\angle 2$，反之，若证得$\angle 1=\angle 2$，则$\triangle BDA\cong\triangle CEA$。（为什么？）所以，我们应设法证明$\angle 1=\angle 2$，为此我们只须证明$\triangle BDA\backsim\triangle CEA$。

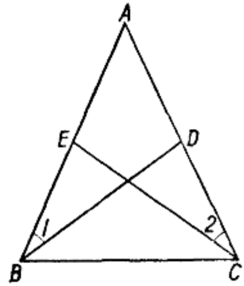


图1—2

【证】 在$\triangle BDA$与$\triangle CEA$中，$\angle A$为公共角，夹角的两边是成比例的。

$$AD:AE=AC:AB.$$

$$(\because\quad AD:AC=AE:AB=1:2)$$

$$\therefore\quad \triangle BDA\backsim\triangle CEA,\qquad 从而\angle 1=\angle 2.$$

由于$BD=CE$（已知），$\angle A$为公共角，$\angle 1=\angle 2$，故$\triangle BDA\cong\triangle CEA$（角、角、边），于是$AB=AC$。

例3．证明有两条角的平分线相等的三角形是等腰三角形。

【已知】 $\triangle ABC$（如图1—3）中，BD，CE各为$\angle B$与$\angle C$的平分线，且$BD=CE$。

【求证】 $AB=AC$。

【分析】 前两个例子，我们是通过两个三角形全等来证明两线段相等的．因为根据所给条件，这样的三角形容易找到．但对于本题，情况就复杂得多了；因为仅仅给出底角的平分线相等，依照前两例的证法就无能为力了。

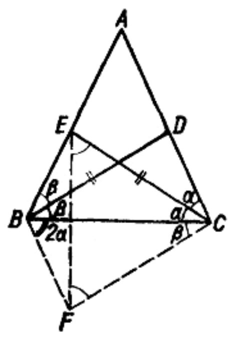


图1—3

在直接证明感到无从下手时，往往采用反证法却比较容易。如果从 $AB \neq AC$ 出发，导致矛盾的结果，那末就只能有 $AB = AC$ 成立了。

【证】 引 $BF \parallel AC$，$CF \parallel BD$ 则四边形 $BDCF$ 为平行四边形。于是 $BD = CF$，$BF = CD$。

令 $\angle ACE = \alpha$，$\angle ABD = \beta$；在 $\triangle BCE$ 和 $\triangle BCF$ 中，BC 为公共边，而 $CF = CE(=BD)$；也就是说，这两个三角形有两边对应相等，今假设 $AB > AC$，从而 $\angle C = 2\alpha > \angle B = 2\beta$，即 $\alpha > \beta$，换言之，$\angle BCE > \angle BCF$，于是在这两个三角形中，夹角大者所对的边也大，从而 $BE > BF$。

$\therefore$ 当 $\alpha > \beta$ 时，$BE > BF$。

另方面，在 $\triangle EBF$ 中，又有：

$$\angle BEF = \angle BEC - \angle FEC = 180° - \alpha - 2\beta - \angle FEC$$
$$= 180° - (\alpha + \beta) - \angle FEC - \beta,$$
$$\angle BFE = \angle BFC - \angle EFC = 180° - 2\alpha - \beta - \angle EFC$$
$$= 180° - (\alpha + \beta) - \angle FEC - \alpha.$$

在 $\alpha > \beta$ 情况下，比较上述 $\angle BEF$ 和 $\angle BFE$ 的表达式，可见 $\angle BFE < \angle BEF$，故在 $\triangle EBF$ 中，又应有 $BE < BF$（大角对大边）。

于是得出了矛盾．因此 $\alpha > \beta$ 是不能成立的，亦即 $AB > AC$ 是不成立的，同样的理由，$AC > AB$ 也是不能成立的。

$$\therefore \quad AB = AC.$$

〔注〕（Ⅰ）读者们在学习平面几何时，恐怕大多已经知道：等腰三角形两腰上的中线相等，两腰上的高相等，两底角的平分线相等；而且这些结论的证明也较容易．上述三个例子表明，这些结论的逆命题也是正确的．但是其证明——尤其是例 2 与例 3，就不那么容易了．

（Ⅱ）在例3的证明中，我们用到了反证法．所谓反证法，即：如果要证明"在条件A下，结论B成立"，那末只须证明"当结论B不成立时，条件A必定不成立"．换句话说，从假定"结论B不成立"的前提下，引出（与条件A）矛盾的结果来．反证法是证明几何命题的重要方法之一，下面我们还要多次应用这种方法．

（Ⅲ）上述三个例子，我们都把它们归结为证明两线段相等的问题．如何证明两线段相等呢？证明两线段相等的常用方法是：

（i）全等三角形的对应边相等；如例1和例2．

（ii）同一个三角形中，等角所对的边相等；如例3．

（iii）平行四边形中，对边相等，对角线互相平分．

（iV）过三角形一边上的中点且与第三边平行的直线，必把第二边平分为两相等线段．

（V）线段的垂直平分线上任一点和这线段的两端点等距离．

（Vi）角的平分线上任一点到角的两边等距离．

（Vii）两平行线间的距离处处相等．

（Viii）在同圆或等圆中，等圆心角或等弧所对的弦相等；圆心距相等的弦相等．

（iX）垂直于弦的直径平分此弦．

（X）从圆外一点向此圆所引的两切线相等．

（Xi）两圆的内（外）公切线相等．

我们再举一些例子来说明这些方法．最后我们还要补充一些其他方法及相应的例子．

例4．证明对角线相等的梯形是等腰梯形．

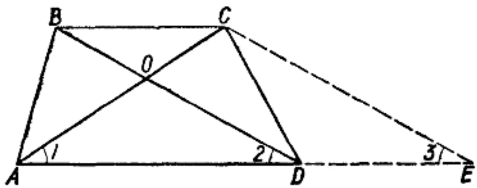


图1—4

【已知】 梯形$ABCD$（如图1—4）中，$AD \parallel BC$，$AC=BD$。

【求证】 $AB=CD$。

【分析】 我们把AB和CD作为两个全等三角形的对应边来考虑．由于$AC=BD$，取AD为公共边，当研究$\triangle ABD$能否全等于$\triangle ACD$的问题时，如能证明$\angle 1=\angle 2$，显然就有$\triangle ABD \cong \triangle ACD$。为了证明$\angle 1=\angle 2$，我们可如图1—4中所示作辅助线就行了：把$\angle 2$“平移”到$\angle 3$的位置，然后证$\angle 3=\angle 1$．

【证】 作$CE \parallel BD$，而CE与AD的延长线交于E，则$BCED$为平行四边形（两组对边平行），所以$CE=BD$，$\angle 2=\angle 3$。

由于$AC=CE$，故$\triangle ACE$为等腰三角形，于是$\angle 1=\angle 3$，因$\angle 2=\angle 3$，故$\angle 1=\angle 2$，所以$\triangle ACD \cong \triangle ABD$（边、角、边）于是得$AB=CD$。

〔注〕不难证明，等腰梯形的两底角相等，两对角线也相等．反过来也是正确的，亦即两底角相等的梯形是等腰梯形；两对角线相等的梯形是等腰梯形．例4给出了后一结论的证明．

上述四个例题的结论，是颇有意思的，这是较为典型的例子，而且表面上看来很简单的事实，但是证明起来却并不很简单，尤其是例3．

例5．在$\triangle ABC$的AB和BC两边上向外作正方形，又BM为AC边上的中线，求证$EF=2BM$（见图1—5）。

【分析】要证明$EF=2BM$，考虑到$AM=MC$（因BM为AC上的中线），因此，设想之一是：延长BM至P，使得$BP=2BM$，然后设法去证明$BP=EF$。为此，自然要考虑$\triangle BAP$与$\triangle FBE$是否全等。

【证】 延长BM至P，使得$BP=2BM$，连AP，CP，

于是四边形$ABCP$为平行四边形（因为对角线互相平分）。

$$\therefore\quad \angle PAB+\angle ABC=180^\circ\ (\because AP\parallel BC).$$

而
$$\angle EBF+\angle ABC=180^\circ$$
$$(\because\quad \angle EBF+\angle ABC+2\times 90^\circ=360^\circ),$$
$$\therefore\quad \angle PAB=\angle EBF.$$

又
$$AP=BC=BE,\quad AB=BF;$$
$$\therefore\quad \triangle BAP\cong\triangle FBE.$$

所以，$EF=BP=2BM$。

下列三个例子比较简单，我们只写出“分析与证明要点”，不作详细的叙述。

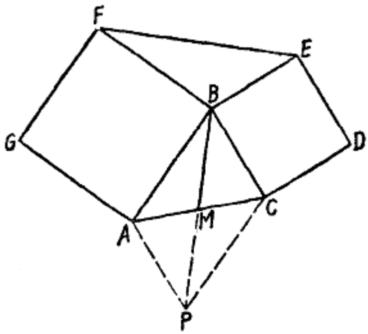


图 1—5

例6. 已知 AD 和 BD 分别是 $\triangle ABC$ 的$\angle A$与$\angle B$的平分线，延长AD交$\triangle ABC$的外接圆于E（如图1—6），连结BE，求证$BE=DE$.

【分析与证明要点】 为了证明$BE=DE$，我们可取$\triangle EBD$，并证明$\angle EBD=\angle BDE$。由条件知$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，于是可得：

$\angle EBD=\angle 5+\angle 4=\angle 2+\angle 3=\angle 1+\angle 3$；

$\angle BDE=\angle 1+\angle 3$.（$\triangle$的外角等于不相邻两内角之和）即$\triangle BED$中，$\angle EBD=\angle BDE$，$\therefore$ $BE=DE$。

例7. 已知$ABCD$为圆内接四边形，$AC\perp BD$，垂足为E，过E作$EF\perp CD$，垂足为F，延长FE交AB于G；求证$AG=BG$（见图1—7）。

【分析与证明要点】因$\triangle AEB$为直角三角形，AB为斜边，求证$AG=BG$也就是要证明G为斜边上的中点。由于斜边上的中点到三顶点等距，故应证明$EG=BG$及$EG=AG$。

∵ $\angle 2=\angle 6=90°-\angle 5=\angle 7=\angle 1$,

∴ $BG=EG$;

又 $\angle 4=90°-\angle 2=90°-\angle 1=\angle 3$,

∴ $EG=AG$.

于是证得 $AG=BG$。

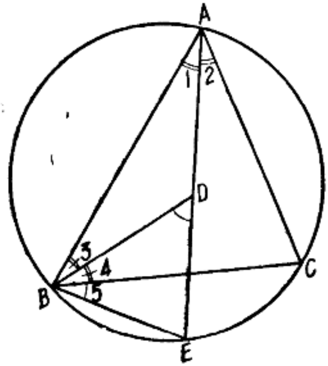


图 1－6

例8. 已知E是某圆的$\overset{\frown}{AC}$之中点，而AB是此圆的切线，且$AD\perp DE$，$AB\perp BE$（如图1－8），求证$BE=DE$。

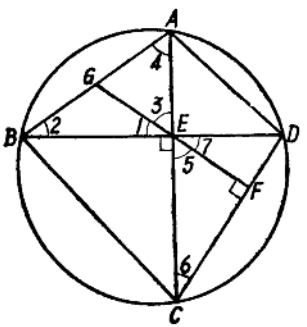


图1－7

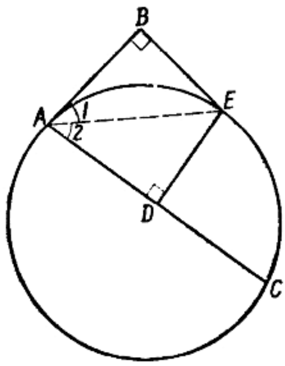


图1－8

【分析与证明要点】 连AE，∵ $\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{CE}$，∴ $\angle 1=\angle 2$（为什么？）。AE公共，$\angle ABE=\angle ADE=90°$。所以$\triangle ABE\cong\triangle ADE$；∴ $BE=DE$。

例9．从等腰三角形ABC的一腰上及另一腰延长线上截取两等长的线段BD与CE，试证DE被底边所平分。

【已知】 $\triangle ABC$（如图1—9）中，

$$AB=AC,\ BD=CE。$$

【求证】 $DF=EF$。

【证法1】 为证明$DF=EF$，设想把"分散的条件"即$BD=CE$"收拢"起来，即把BD"移到"AC边上，为此可引辅助线$DG\parallel BC$。

因$DG\parallel BC$，故$\triangle DAG$也是等腰三角形，$AD=AG$；于是$CG=BD$（∵ $AB=AC$）。由于$CF\parallel DG$，而且$CE=CG$，所以F是ED之中点，即 $DF=EF$。

【证法2】（如图1—10）

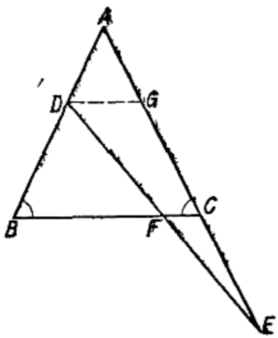


图1—9

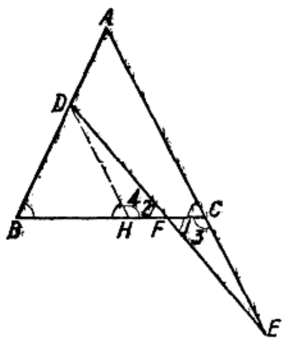


图1—10

为了构造两个全等的三角形（以DF及EF为对应边），

可引辅助线 $DH \parallel AC$.

$$\therefore \quad \angle 4 = \angle 3 \text{（平行线的内错角相等）}.$$

又，$\angle 1 = \angle 2$（对顶角），而且 $DH = BD = CE$,

$$\therefore \quad \triangle DFH \cong \triangle EFC, \quad \therefore \quad DF = EF.$$

〔注〕以上我们一共讲了九个例题．其中有五个例题（即例3，4，5，8，9）都是通过引辅助线来证明的．读者必然会问：为什么要引这些辅助线？如何想到要引这样的辅助线？一般说来引辅助线的目的是什么呢？

几乎大多数的几何证明题，都涉及到引辅助线问题．证明题的难处其实就在于如何想出引辅助线这点上．"冰冻三尺，非一日之寒"．我们觉得，引辅助线问题，也只有多做、多想才能积累到较多的经验和办法，碰到具体问题时，才不致束手无策；其次，引辅助线的问题也不是神秘莫测的．一般地说，引辅助线的目的，是为了在证题过程中起到"搭桥"的作用：①通过引辅助线，把"分散开"的几何事实尽量使它"靠拢"起来，以利于证题的进行；②通过引辅助线，把已知条件和所需证明的结论联系起来；③通过引辅助线，把已知的几何事实和学过的、可能跟本题证明有关的定理联系起来，并进行分析，以便找出证明的途径和决定辅助线的取舍．下面，我们对此加以进一步的说明．

比如例4，辅助线 CE 的引入，目的是使已知的两条相等线段 AC 与 BD 更好地"靠拢"起来，只要作 $CE \parallel BD$，那末就能把 BD"移到"CE 处（因为 $BC \parallel AD$，$\therefore BCED$ 是平行四边形），故 $AC = BD$ 的条件就转变为 $\triangle ACE$ 是等腰三角形，这对问题的讨论就比较有利．

又如例9的证法2中，辅助线 DH 的引入也属于这种情形．因为 $\triangle BAC$ 是等腰三角形，所以引 $DH \parallel AC$ 就意味着把 BD"移到"DH 处（因 $\triangle BDH$ 为等腰三角形），于是 $DH = CE$，从而归结为考虑 $\triangle CFE$ 与 $\triangle HFD$ 是否全等的问题．

又如当我们要证明三角形的三内角之和等于180°时（虽然本例已离开本节的要求——"证线段相等"，但为了说明引辅助线的情形①，我们还是放在这里来讲．下面的另一个例子也是如此），读者一看下

面的图1—11和图1—12便知道，辅助线 $DE(/\!/ BC)$ 的引入，在于把 $\angle B$ 和 $\angle C$“收拢”到 $\angle A$ 的两旁；辅助线 $CF(/\!/ AB)$ 的引入，在于把 $\angle B$“移到”$\angle 1$ 的位置（平行线的同位角等），$\angle A$“移到”$\angle 2$ 的位置（平行线的内错角等），即把 $\angle B$ 与 $\angle A$“收集”在 $\angle C$ 的近旁。

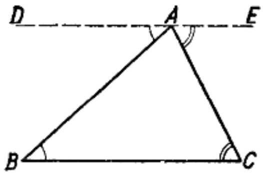


图1—11

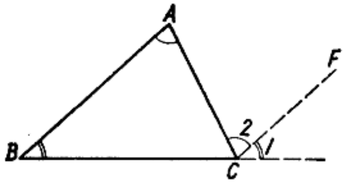


图1—12

关于引辅助线问题的第②点，例子也是很多的。比如例8，辅助线 AE 的作用，就是把已知条件与所需要证明的结论($BE=DE$)联系起来的很好的例子。又如例5，辅助线 $BP(=2BM)$ 的引入（当然 AP，CP 也是辅助线），目的在于把证明 $EF=2BM$ 转化为证明 $BP=EF$，所以 BP 等辅助线把已知的事实与求证之结论联系起来。

关于引辅助线的第③点。例9的图1—9中，辅助线 $DG(/\!/ BC)$ 的引入也属于这方面的例子。因为要证明 F 是 DE 的中点，我们可联想到“平行截线定理”，为此应引 $DG/\!/ BC$，以构成 $\triangle EDG$，而只须证明 C 是 EG 的中点就行了。又如求证顺次连结平行四边形各边中点所得四边形仍为平行四边形时，如下图1—13所示，辅助线 AC 的引入，是可以从这样的角度来考虑的：由于 EF 是 AB 与 BC 两边中点的联线，因此，自然应把它和三角形的“中位线定理”联系起来，所以我们应连结 AC，以构成 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADC$。

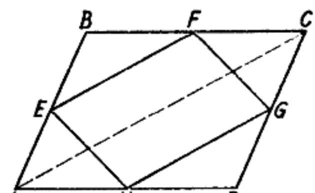


图1—13

由中位线定理，$EF \underline{\underline{//}} \frac{1}{2}AC \underline{\underline{//}} GH$，$\therefore$ $EFGH$ 为平行四边形．

在以上所述的例子中，已出现一题多个证法的事实．在几何中这种情况是不少的，而且往往正是由于从不同的角度出发去引辅助线，导致不同的证法．在上面所举的例子中，绝大多数例子我们只写出一种证法，其实它们并不只是一种证法的，甚至读者已有比这更好的别的证法．不过限于篇幅，我们不打算在许多例子中大量地列举种种证法，宁可多举几个例子．

例10． 已知O是正方形 $ABCD$ 中的一点，而且 $\angle OAB = \angle OBA = 15°$；求证 $\triangle OCD$ 为等边三角形（见图1—14）（等边三角形也叫正三角形）．

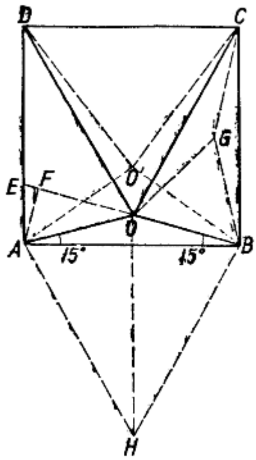


图1—14

【分析】由已知条件，$\triangle COD$ 是等腰三角形，这是容易证明的，只要利用 $\angle OAB = \angle OBA$ 就行了，因为 $\triangle AOD \cong \triangle BOC$（边、角、边）．但要进一步证明 $\triangle COD$ 是正三角形，还必须证得 OC 或 OD 中有一与正方形边长相等，或者 $\triangle COD$ 中有一内角等于 $60°$．如仅就图中原有线段来考虑，经过几次尝试以后，便发现推出结论是困难的，问题在于不能有效地利用 $\angle OAB$ 和 $\angle OBA$ 都等于 $15°$ 这个条件，因此需要添加辅助线以架设从已知条件导向结论的桥梁．下面介绍几个证法．

【证法1】 在正方形外作正 $\triangle ABH$，连结 OH．

$\because$ $\triangle OHB \cong \triangle OHA$（边、边、边），