高等院校物理教材

Textbook in Physics for Higher Education

大学物理（下）

陈治　刘志刚　陈祖刚　编著

清华大学出版社

高等院校物理教材
Textbook in Physics for Higher Education

大学物理（下）

陈治　刘志刚　陈祖刚　编著

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书上册包括“牛顿力学及狭义相对论力学基础”、“热学”、“电磁学”3篇，下册包括“振动与波动”、“波动光学”和“量子物理学基础”3篇，总共26章。将理工学科大学物理课程教学基本要求的全部A类内容和绝大多数B类内容，按认知规律有序整合，构建了基础物理的知识网络。本书对物理学的基本概念、基本理论作了比较系统全面的讲述；特别注重将科学方法（模型、演绎、归纳、系统、类比）渗透全书，成为统率所有素材的灵魂；主动链接高等数学，正面解决学习物理的困难；取材联系实际应用，开拓视野；正文中提供了丰富的例题，有助自学。

本书可作为理工学科大学物理教材，也可以作为中学物理教师的教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

大学物理(下)/陈治，刘志刚，陈祖刚编著．—北京：清华大学出版社，2006.10

(高等院校物理教材)

ISBN 7-302-13588-6

Ⅰ．大…　Ⅱ．①陈…②刘…③陈…　Ⅲ．物理学—高等学校—教材　Ⅳ．O4

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第090984号

出 版 者：清华大学出版社　　**地　址**：北京清华大学学研大厦

http://www.tup.com.cn　　**邮　编**：100084

社 总 机：010-62770175　　**客户服务**：010-62776969

责任编辑：朱红莲

印 装 者：清华大学印刷厂

开　本：185×260　**印张**：20.75　**字数**：486千字

版　次：2006年10月第1版　2006年10月第1次印刷

书　号：ISBN 7-302-13588-6/O・563

印　数：1～3000

定　价：28.00元

前言 FOREWORD

学生是通过物理教材与前辈和当代物理学家展开对话的，教材编写者当是坐在学生一边，尽可能索取物理学的精华，认真重组。教材不等同于授课，其系统性、完整性与条理性是方便读者阅读与自学的前提。作者希望赋予教材的功能是：带领读者由浅入深系统地学习大学物理最基本的内容和科学方法。为此，理清思路，构建合理的知识架构，让读者学懂，而不是含糊其辞似是而非，自然成为编写者追求的目标。全书注意了正面揭示问题，深入探讨概念，扣紧主线前后呼应的编写方法。在物理学科内部，理顺脉络不绕弯；概念和规律，交待清楚不含糊；遇到难点，铺路搭桥不回避。在与其他学科重叠区域，互补链接不推卸不悬空。描述物理图像、使用物理模型力求明确，不生歧义。异型课程内容尽量贴近现实生活，抓住常识与科学概念之间的冲突作为深化认识，拓展视野的契机，保持基础科学并不高深莫测的本来形象。

学生理解物理概念，掌握物理规律不可能一步到位，发疑和释疑必将充满学习之路。这里需要提醒初学大学物理的学生，对高中建立的概念和方法要有“升级换代”的精神准备。首当其冲的力学，从一个较高的起点出发，就带来较宽的视角，学生可以感觉到，并不陌生的物理概念背后有很多问题需要再思考。一时出现理解不透、抓不住要领的状态其实是学习物理过程的正常心理体验。

诚如李政道教授所说：“**真正物理学家其研究的目的，就是要把所有形形色色，似乎不相关的自然现象都归纳成同一组基础原理，都能融会贯通。这就是物理之精华。**”物理学逻辑结构的特点是具有统一性，其各分支学科之间有着内在的联系，有共同的理论基础。表面看来无关的事物在物理学中可以找到内在关联，不同领域发生的现象可能有完全相同的数学表述。物理课程的深刻内涵与深远意义就源于物理学的普遍性和统一性，如匀速圆周运动和简谐振动的关系，热机效率与热源温度的关系，无序性与态函数熵的关系，时间空间对称性与守恒定律的关系，质量与能量的关系，电与磁的关系，波与粒子的关系，牛顿力学与相对论的关系或量子力学的关系，以致臭氧层破坏与氟利昂使用的关系等。发现这些关联的科学方法与过程，带领着人类“思维向客体永恒地、无止境地接近”。的确如萨根所言：“理解世界是一种享受，没有被鼓励着去积极思考的人是不幸的。”物理学给学习者不仅提供了无限的想象空间，也提供了无数可深入研究的发展方向。激发学生对物理学的浓厚兴趣，就有益于他们投入到科学工作中来。基础知识一旦与学生的潜能和悟性相结合，必然内化为学生的科学文化素养，各种能力也将产生于这片沃土，为进入新的更深入的领域学习和工作打下了牢固的基础。

物理科学有着震撼心灵的强大的知识资源，物理课程可以有选择地把它们艺术地展现出来。大学物理教材应当是选材共性与结构个性的统一，不同作者针对心目中的不同读者群可能产生的问题，对物理学基础内容构造不尽相同的简化模型。这个模型应当体现物理科学统一性的基本特点，具有与物理科学一致的逻辑结构，使读者得到更多的启迪。本书提供一些与主线有松散联系的阅读材料，力图拉近物理学与工程技术的距离，展示物理学对人类文明、社会进步产生的巨大推动作用。

物理学的定量本质，决定了它曾经是很多数学问题和方法产生的根源。这个紧密结合过程在大学基础课阶段，通过“微积分”和“大学物理”两门课程得以再现。整合这两门基础课，凸显呼应加强链接，对于降低课程难度，提升课程水平，实现物理与数学双向受惠是必要的并且是可能的，对教与学都大有裨益。本书力图成为工科数学物理平台的组成部分，在教学内容本质上重叠的区域拆除人为的藩篱，友好沟通，努力将科学方法的共同点及其相互关联加以阐明，克服分离趋向，在大基础上修建跨学科的绿色通道。

本书由“牛顿力学及狭义相对论力学基础”、“热学”、“电磁学”、“振动与波动”、“波动光学”和“量子物理学基础”6 篇内容组成。在力学中，参照系问题实际是绵延很长的“暗礁”，把它搞清楚，理解相对论就不困难了。守恒定律面对的是质点系统，所以质点系动力学是力学的重点，刚体作为一个特殊的质点组可以顺理成章地解决。在热学篇，微观的统计方法和唯象的热力学方法是交织阐述的，充分利用理想气体这个物理模型，展示了热现象的本质及一般规律。其重点与难点是统计规律性与热力学第二定律以及熵的概念。电磁学篇中既有实验规律描述又有提炼概念、提出假说、场方程归纳的理论过程，所以对电磁场运动规律的认识是在一个视点不断上升的过程中进行的。形成场的观念，理解场和实物的相互作用，理解场方程，理解场与路的关系，对初学者是难点，然而，有电学和磁学两个可类比的循环，一旦突破对电磁运动规律的认识就能上升到麦克斯韦方程组的高度。振动与波动的核心是研究周期性过程，振动讲时间的周期性，波动涉及时间空间双重周期性。这部分的概念与规律都从力学模型引出，然后利用类比的方法推向电磁与光。在学过电磁学以后讲波动，应当立足于波场，但需要明确使用直观的物理模型，本书抓住张紧弦线这一模型贯穿始终，从无限长、半无限长到有限长，把行波、驻波的运动学与动力学特征顺序引出。作为麦克斯韦方程组应用和光电磁本性的铺垫，本书有一章专门讨论电磁波。波动光学以同时介绍惠更斯原理和费马原理开篇，在此基础上给出光的折反射定律，使几何光学的成像理论成为波动光学的一个组成部分，而后光的偏振与电磁波的横波性质相呼应。干涉概念在本书中是在波动光学中才出现的，因为掌握了光学干涉，机械波的干涉就易如反掌。衍射也如此。而干涉、衍射紧连着量子物理学中粒子的波动性，它们是近代物理与经典物理之间的一个重要的结合点，通过电子衍射实验把读者带入全新的量子世界。本书仅介绍了量子力学最基本的概念，但是文字叙述得比较详细，使读者能够初步领略微观世界物理图像的描述方法及其规律。

解答一定数量例题和习题是学好物理基础理论的条件之一。本书将一部分与基本概念、基本方法有较强关联的习题转化为例题置入相关的章节，为自学和深入理解提供较多的范例。部分习题增加了多层设问和提示，使其具有启发性，适当降低了习题难度，起到举一反三的作用。

阅读材料选自于多种科学文献与专家学者的报告，改编后与广大读者分享，以培养学生了解科技前沿的习惯和兴趣。由于多方取材，只能在此一并向原作者表示衷心的感谢与敬意。

书中标有“*”号的部分章节为选学内容，教师可以选择课上讲解，要求学生自学或者跳过，不影响后续内容的学习。

本书作者有融会百家之长的初衷，有把物理学讲得比较明白的夙愿。二十余年从名师名著中汲取营养，消化吸收，屡修屡改，并不间断地实践于讲台，逐渐形成一个比较紧凑的体系和独特的风格。然而，受作者学识能力限制，偏颇不当之处在所难免，希望得到同行批评指正！

作者特别感激清华大学出版社的各位编辑，他们以锐利的目光指出了原稿中存在的诸多问题与纰漏，帮助作者纠正，使作者获益匪浅。

作者衷心感谢张三慧、吴思诚、李申生、陆果诸位教授的指导与鼓励，衷心感谢张丹海、张国忠两位教授的帮助。作者深深怀念已经去世的梁铁铮教授，他生前与作者进行过大量有益的讨论。

陈　治

2006 年 2 月

目录 CONTENTS

第 4 篇　振动与波动

第5篇 波动光学

第 6 篇 量子物理学基础

第 4 篇　振动与波动

第16章 振　动

弹簧振子或单摆在平衡位置附近的往复运动，LC 电路的电磁振荡，空间某点电场或磁场的场矢量随时间周期性变化，声波场中，某点附近声压的周期性变化等都属于振动。振动(vibration)是自然界里广泛存在而且形式多样的运动方式。严格地讲，振动是指物理性质集中的系统状态一次又一次地重复曾经发生过的变化。

每一种参数集中的物理系统都可能以它特有的方式进入周期性的变化过程——振动。然而，振动的规律，无论是从具体物理过程中抽象出来的微分方程，还是微分方程的解——物理量随时间变化的规律，在数学上都有着相似的，甚至统一的表述。在力、电、光各类系统中发生的振动，以力学中的机械振动最为直观。我们以弹簧振子模型作为切入点，逐步认识振动这个物理过程的描述方法及其基本规律。

16.1 简谐振动

16.1.1 弹簧振子的简谐振动

劲度为 k 的理想弹簧放置在水平桌面上，一端固定，一端连接一个质量为 m 的质点，不计任何阻力。系统一经触发，就围绕平衡位置自由振动，这样的装置称为弹簧振子，如图 16.1.1 所示。取弹簧保持原长时自由端质点所在位置为坐标原点 O，Ox 轴沿弹簧伸长方向，自由端质点坐标 $x=x(t)$。

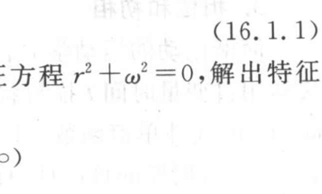

图 16.1.1　弹簧振子

根据胡克定律和牛顿第二定律，有

$$-kx = m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$$

令 $\omega^2=\dfrac{k}{m}$，得动力学方程

$$\ddot{x}+\omega^2 x = 0 \tag{16.1.1}$$

将试解 $x=\mathrm{e}^{rt}$ 代入二阶常系数齐次微分方程(16.1.1)，得特征方程 $r^2+\omega^2=0$，解出特征根 $r=\pm\mathrm{i}\omega$，即微分方程的通解为

$$x = c_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}+c_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\quad(-\infty<t<\infty)$$

两个任意常数分别取以下形式 $c_1=\dfrac{A}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$，$c_2=\dfrac{A}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}$。代入上式后，微分方程的通解有了简明的表述，即

$$x = A\frac{e^{i(\omega t+\varphi)} + e^{-i(\omega t+\varphi)}}{2} = A\cos(\omega t + \varphi) \quad (-\infty < t < \infty) \tag{16.1.2}$$

通解中两个新的任意常数 A 和 φ 也将具有明确的物理意义。式(16.1.2)表明质点位置随时间按余弦规律变化。其实，任何一个物理量如果随时间按余弦规律变化，就称这个物理量作简谐振动(simple harmonic motion，SHM)。

微分方程 $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ 及其通解 $x = A\cos(\omega t + \varphi)(-\infty < t < \infty)$ 分别从动力学和运动学两个角度给出了简谐振动这一类物理过程的根本特征。如果依照具体问题的特定"历史"—— 系统的初始条件，确定了常数 A 和 φ，也就获得了弹簧振子简谐振动的定解，即这个简谐振动全过程的完整描述。

16.1.2　描述简谐振动的参量

1. 周期 T

振动状态自相重复的相邻两个时刻的间隔，称为周期。由 $f(t+T) = f(t)$，有 $x(t) = A\cos(\omega t+\varphi) = A\cos(\omega t+\varphi+2\pi) = A\cos\left[\omega\left(t+\frac{2\pi}{\omega}\right)+\varphi\right] = x(t+T)$，得弹簧振子简谐振动的周期

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{16.1.3}$$

系统经历所有振动状态各一次，称为一次全振动。那么振动的周期就是全振动一次所需的时间。

2. 频率 ν 和角频率 ω

单位时间内完成全振动的次数称为振动的频率(frequency)，

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \tag{16.1.4}$$

频率的 2π 倍称为角频率(angular frequency)，

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$$

频率和角频率的单位都是 Hz($1\mathrm{Hz} = 1\mathrm{s}^{-1}$)。

弹簧振子自由振动的角频率 $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ 取决于振子固有的物理性质，与振子的初始状态无关，因此它的周期和频率也是弹簧振子所固有的，与振子的初始状态无关。

3. 相位和初相

简谐振动的运动学方程 $x = A\cos(\omega t + \varphi)$ 给出了周期量 x 与时间 t 的函数关系。直接运用自变量时间 t 描写状态量 x 的周期性变化并不方便，而变量 $\omega t + \varphi$ 是个纯数，它是时间 t 的线性单值函数。以这个中间变量作为描述振动状态的自变量，则凸现了余弦函数以 2π 为周期的普遍性，称中间变量$(\omega t + \varphi)$为简谐振动的**相位**。

相位不仅惟一地确定了振动的状态，而且直接反映出状态特征。相位变化直接反映出不同状态之间的关联。不管振动的周期是多少，相位每增加 2π，系统状态就复原一次。只要了解相位在任意一个 2π 区间中对应的所有振动状态，就足以认识简谐振动的全过

程。从以时间 t 为自变量到以相位 $(\omega t+\varphi)$ 为自变量描述振动状态，在数学上只是减少了复合函数 $x=A\cos(\omega t+\varphi)$ 的一个层次，在物理上，相位概念则显示出巨大的优势。这种优势早已应用到重复发生的周期性事件的表达之中。如每天的作息时刻表、每周的课程表，每月一次的日程安排等，都不是以连续计时作为时间的表达，而是采用与相位相仿的计时概念：早 8:00 上课，星期三下午做实验，20 日接待来访，……。表述本身就体现了事件重复的周期。对于非周期性的物理过程，没有每天、每周、每月的描述。

$t=0$ 时振动的相位 φ，称为**初相**。它取决于时间原点的选择。

4. 振幅 A

简谐量的最大值称为振幅(amplitude)。对于弹簧振子，振幅 A 是指质点最大位移的绝对值。在方程 $x=A\cos(\omega t+\varphi)$ 中，我们约定常数 $A>0$，也就是 $|x|\leqslant A$。

在振动方程中振幅 A 与初相 φ 是以任意常数的形式出现的，它与系统的动力学性质无关，仅仅决定于系统的初始条件。

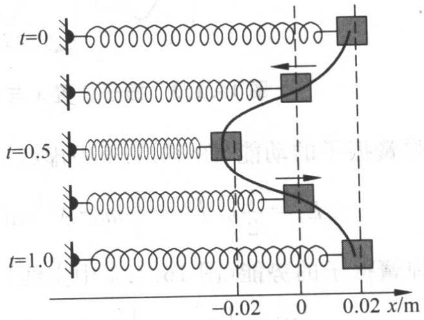

图 16.1.2　例题 16.1.1 解读弹簧振子的初相用图

例题 16.1.1　拉长一弹簧振子，在 $t=0$ 时，从 $x=0.02\text{m}$ 处自由释放，其后运动如图 16.1.2 所示。从图中解读出弹簧振子的振幅 A、周期 T 和角频率 ω。

若振子运动方程为

$$x=A\cos(\omega t+\varphi)$$

求初相 φ。

解：弹簧振子的振幅 $A=0.02\text{m}$，周期 $T=0.1\text{s}$，角频率 $\omega=2\pi\text{s}^{-1}$。由于 $x(0)=A\cos\varphi=A$，所以振子振动的初相 $\varphi=0$。

例题 16.1.2　劲度为 k 的理想弹簧放置在水平桌面上，一端固定，一端连接一个质量为 m 的质点，形成一弹簧振子。取弹簧保持原长时自由端质点所在位置为坐标原点 O，Ox 轴沿弹簧伸长方向，若振子初始坐标 $x(0)=x_0$，初速度 $v(0)=v_0$，求弹簧振子自由振动的振幅和初相。

解：弹簧振子自由振动运动学方程为 $x=A\cos(\omega t+\varphi)$，其中角频率 $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$。振子速度 $\dot{x}=-A\omega\sin(\omega t+\varphi)$，在 $t=0$ 时，$x_0=A\cos\varphi$；初速度 $v_0=-A\omega\sin\varphi$。故振子初相 φ 满足

$$\tan\varphi=-\frac{v_0}{\omega x_0}$$

振幅为

$$A=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}}=\sqrt{x_0^2+\frac{mv_0^2}{k}}$$

16.1.3　弹簧振子自由振动的速度、加速度和机械能

弹簧振子在自由振动中的 v 和加速度 a 分别为

$$v=\dot{x}=-A\omega\sin(\omega t+\varphi)=A\omega\cos\left(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$a=\dot{v}=-A\omega^2\cos(\omega t+\varphi)=\frac{kA}{m}\cos(\omega t+\varphi+\pi)$$

把 x-t 曲线、v-t 曲线和 a-t 曲线画在一起，进行比较，见图 16.1.3。显然，速度和加速度仍然是角频率为 ω 的简谐量，速度的相位超前位移的相位$\pi/2$，加速度的相位超前速度的相位$\pi/2$，加速度与位移的相位差是 π，称这两个简谐量反相。

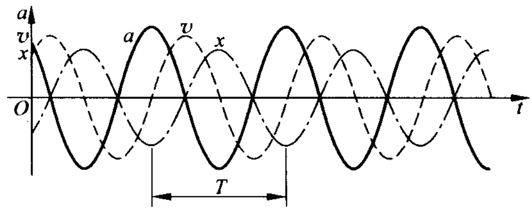

图 16.1.3 振子位置 x 与速度 v，加速度 a 随时间 t 变化曲线

弹簧振子的动能（图 16.1.4 中虚线）

$$E_k=\frac{1}{2}m\dot{x}^2=\frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t+\varphi)=\frac{1}{2}kA^2\ \frac{1-\cos2(\omega t+\varphi)}{2}$$

弹簧振子的势能（图 16.1.4 中实线）

$$E_p=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi)=\frac{1}{2}kA^2\ \frac{1+\cos2(\omega t+\varphi)}{2}$$

弹簧振子的机械能

$$E=E_k+E_p=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kA^2 \tag{16.1.5}$$

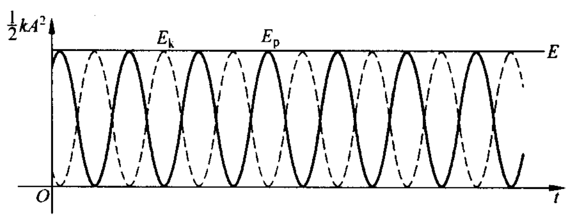

图 16.1.4 弹簧振子的能量曲线

弹簧振子自由振动满足机械能守恒条件，系统机械能守恒是意料之中的。振子机械能与振幅平方成正比。对于振子的简谐振动，振子动能和势能的瞬时值此长彼消，都做周期性变化，角频率为 2ω。将式(16.1.5)对时间取微商，得

$$m\ddot{x}+kx=0$$

这正是简谐振动的动力学方程。

16.1.4 简谐振动的旋转矢量描述

弹簧振子的简谐振动与质点的匀速圆周运动的一些运动学量之间存在着简单的对应关系：前者是后者在一个坐标轴上的几何投影，如图 16.1.5 所示。

以振幅 A 为模，作一个始端位于原点 O 的矢量 $\boldsymbol{A}$，让它在 Oxy 平面内以角频率 ω 为角速度绕原点逆时针方向匀角速转动。设 $t=0$ 时矢量 $\boldsymbol{A}$ 与 Ox 轴的夹角等于振动的初相 φ，那么，矢量 $\boldsymbol{A}$ 就是与简谐振动 $x=A\cos(\omega t+\varphi)$ **对应的旋转矢量**。这里存在着一系列的对应关系：矢量 $\boldsymbol{A}$ 与 Ox 轴的夹角 $\theta=\omega t+\varphi$ 就是简谐振动的相位；矢量 $\boldsymbol{A}$ 转动一周的时间就是振动的周期 T；矢量 $\boldsymbol{A}$ 末端在 Ox 轴上的投影就是这个简谐振动 x；矢量 $\boldsymbol{A}$ 末端速度 $\boldsymbol{v}$ 在 Ox 轴上的投影正是简谐振子的速率 $\dot{x}$（速度与 Ox 轴的夹角是 $\omega t+\varphi+\pi/2$）。

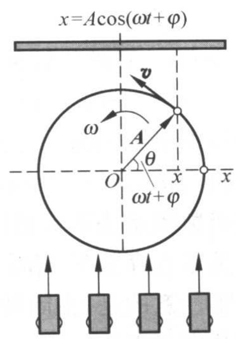

图 16.1.5　小球圆周运动在坐标轴上的投影是简谐振动

旋转矢量（rotational vector）是建立在对应关系上的简谐振动的几何表述。在简谐振动的叠加以及简谐量对时间和空间求微分或积分时对照矢量代数法则可以简化运算，增强直观表现能力。

例题 16.1.3　质点作振幅为 A 的简谐振动，已知 $t=0$ 时质点的运动状态分别是

(1) $x(0)=-A$；　　(2) $x(0)=0, v(0)>0$；

(3) $x(0)=A/2, v(0)<0$；　　(4) $x(0)=-A/\sqrt{2}, v(0)<0$。

用旋转矢量图求质点振动 $x=A\cos(\omega t+\varphi)$ 的初相 φ。

解：(1) $x(0)=-A=A\cos\varphi$，$\varphi=\pi$　　(2) $x(0)=0=A\cos\varphi$，$\varphi=\pm\pi/2$，$\varphi=-\pi/2$

(a)　　(b)

(3) $x(0)=A/2=A\cos\varphi$，$\varphi=\pm\pi/3$，$\varphi=\pi/3$　　(4) $x(0)=-A/\sqrt{2}=A\cos\varphi$，$\varphi=\pm 3\pi/4$，$\varphi=3\pi/4$

(c)　　(d)

图 16.1.6　旋转振动矢量图

用旋转矢量图确定质点振动 $x=A\cos(\omega t+\varphi)$ 的初相 φ 时，初始条件 $x(0)=x_0$ 往往给出了两个初始状态，要利用初速度 $v(0)$ 的方向从二者之中选择符合条件的一个。

16.1.5　简谐量的复指数描述

简谐量还可以用复指数表示。它与简谐振动的旋转矢量描述同源，但使用范围

更广。

一个 Oxy 平面旋转矢量 $\boldsymbol{A}=\hat{\boldsymbol{x}}x+\hat{\boldsymbol{y}}y=\hat{\boldsymbol{x}}A\cos(\omega t+\varphi)+\hat{\boldsymbol{y}}A\sin(\omega t+\varphi)$ 与复平面上一个复变量 $z=x+\mathrm{i}y=A\cos(\omega t+\varphi)+\mathrm{i}A\sin(\omega t+\varphi)=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t+\varphi)}$ 相互对应。将旋转矢量 $\boldsymbol{A}$ 还原为简谐量 x 的方法是求 $\boldsymbol{A}$ 在 Ox 轴上的投影；将复指数 z 还原为简谐量 x 的方法则是求 z 的实部，即 $x=\mathrm{Re}\,z$。

复指数表示法不仅适用于加减运算，还适用于微分和积分运算，简谐量 x 与复指数 z 的对应关系也存在于 $\dot{x}$ 和 $\dot{z}$ 之间，$\dot{x}=\mathrm{Re}\,\dot{z}$。

值得注意的是，在简谐量的复指数表示中，与时间有关的部分和与时间无关的两部分能够分离开来，

$$z=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t+\varphi)}=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \tag{16.1.6}$$

式中与时间无关的部分 $A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ 称为复振幅。

设两个同频率的简谐振动，相差为 δ：

$$x_1=A\cos\omega t\text{，复指数描述为 } z_1=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$$

$$x_2=A\cos(\omega t+\delta)\text{，复指数描述为 } z_2=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$$

它们的差别仅显示在复振幅的相因子中。

由于 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}0}=1$，$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}=\mathrm{i}$，$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}=-1$，$\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\pi/2}=-\mathrm{i}$，即以虚数单位 i 乘以复指数 z，得到的新的复变量所对应振动的相位超前原振动 $\pi/2$。

用 z^* 表示复变量 z 的共轭复数，简谐量 x 的振幅

$$A=\sqrt{zz^*} \tag{16.1.7}$$

16.2 谐振动举例

例题 16.2.1 单摆 一根不可伸长的细线长为 l，上端固定，下端系一质量为 m 的质点，在重力场中作微振动，如图 16.2.1 所示，忽略空气阻力，求单摆振动周期。

解：设质点加速度为 $\boldsymbol{a}$，细线张力为 $\boldsymbol{T}$，则

$$m\boldsymbol{g}+\boldsymbol{T}=m\boldsymbol{a}$$

在自然坐标中，取切向投影式

$$-mg\sin\theta=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(l\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)$$

摆线与竖直方向夹角（摆线角位置）$\theta=\theta(t)$，整理得 θ 的微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\frac{g}{l}\sin\theta=0$$

由于 $\sin\theta=\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}-\cdots$，在摆幅较小，即 $\theta\ll1$ 时，取一次近似 $\sin\theta\approx\theta$，令 $\omega^2=\frac{g}{l}$，则

$$\ddot{\theta}+\omega^2\theta=0$$

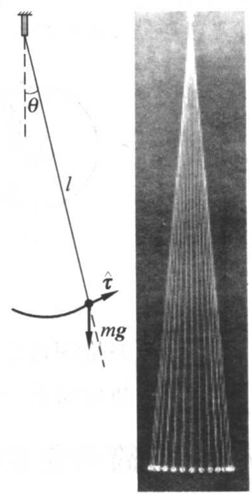

图 16.2.1 单摆