主　编　莫智文
副主编　张　跃　邓丽洪
喻秉钧　杜受仪

文科类

大学数学
课程学习与考试指南

Daxue Shuxue
Kecheng Xuexi Yu Kaoshi Zhinan

西南交通大学出版社
SWJUP
Http://press.swjtu.edu.cn

大学数学课程学习与考试指南

（文科类）

主　编　莫智文
副主编　张　跃　邓丽洪
　　　　喻秉钧　杜受仪

西南交通大学出版社
·成　都·

图书在版编目（CIP）数据

大学数学课程学习与考试指南. 文科类 / 莫智文主编. 成都：西南交通大学出版社，2005. 9
ISBN 7-81104-140-5

Ⅰ. 大…　Ⅱ. 莫…　Ⅲ. 高等数学－高等学校－教学参考资料　Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 090978 号

大学数学课程学习与考试指南

（文科类）

主编　莫智文

*

责任编辑　黄淑文
责任校对　李　梅
封面设计　肖　勤
西南交通大学出版社出版发行
（成都二环路北一段 111 号　邮政编码：610031　发行部电话：028-87600564）
http: //press.swjtu.edu.cn
E-mail: cbsxx@swjtu.edu.cn
四川森林印务有限责任公司印刷

*

成品尺寸：170mm×230mm　　印张：9
字数：169 千字
2005 年 9 月第 1 版　　2005 年 9 月第 1 次印刷
ISBN 7-81104-140-5/O・016
定价: 15.00 元

前　言

四川师范大学从2003年开始对一年级大学生实行“大文大理”教学改革，在文科各专业开设大学数学课程．

经过两年的教学实践，为配合张顺燕编著的教材——《数学的思想、方法和应用》编写该学习指导书．本书针对四川师范大学一年级学生的实际情况，为帮助其更好地掌握正确的学习方法，学好本课程，使教师在总结两年成功教学经验的基础上更加明确文科数学教学的特点以及重点和难点，从而提高教学质量，推进“大文大理”教学改革实践的进一步深入．

本书章节、内容与教材基本对应，各章内容大致分为四个部分．第一部分为基本内容，简要介绍本章内容，突出重点、难点，帮助读者概括了解学习内容．第二部分为知识要求，参照课程教学大纲要求，本着文科教学内容以介绍数学的思想方法为中心，不以难度和技巧为重点的施教原则，提出应掌握程度的具体要求，使读者明确重点；同时选取了异于教材的内容，以期传播数学的思维方式和文化精神，提高学生对数学的兴趣．第三部分为典型例题示范．虽然对文科学生的数学教育不是技术教育，而是素质教育，但为避免本书成为只讲数学“思想”而不涉及数学具体内容的科普读物，在原教材的基础上补充了一些代表性的例题，给出详细的分析和解答过程，在传播数学知识的同时，着眼于培养读者应用数学知识解决实际问题的意识和能力．第四部分为习题和模拟试题，为提高学生的应试能力，试题结构、题型及难易程度均遵照教学大纲要求．

该书由四川师范大学基础部主任莫智文教授主持编写，第一部分“数学史”由喻秉钧教授编写，第二部分“概率论初步”由张跃副教授编写，第三部分“线性代数”由邓丽洪副教授编写，第四部分“微积分”由杜受仪副教授与张跃副教授编写．全书统稿工作由莫智文教授完成．喻秉钧教授、谢寿才副教授审阅了全稿．柏明强老师参与了本书部分内容的打印工作。在此一并表示感谢．由于水平有限，书中不妥和错误之处不可避免，欢迎读者批评指正．

作　者

2005年7月

目　　录

第一部分　数学史

第二部分　概率论初步

第三部分 线性代数

第四部分 微积分

第一部分 数学史

第一章 数系与第一次数学危机

一、基本要求

(1) 从运算(加、减、乘、除、开方)封闭性理解数系及其从自然数到实数的扩充.

(2) 掌握有理数集与有限或无限循环小数集之间的一一对应，无理数集与无限不循环小数集之间的一一对应.

(3) 了解实数集与直线上点集之间的一一对应——数轴及其性质(有序、稠密、连续).

(4) 了解毕达哥拉斯学派对数学论证的贡献和对数的认识的局限性；了解第一次数学危机的实质——无理数的发现：$\sqrt{2}$ 不是有理数(不能表示为两个整数的商)，存在“不可公度”的量.

二、知识要点

(1) 自然数系、整数系、有理数系和实数系对加、减、乘、除、开方等运算的封闭性.

(2) 有理数集即全体(既约)分数之集，也是所有有限小数和无限循环小数之集.

① 为什么“除不尽”的分数一定是无限循环小数?(答案要点：余数的范围)

② 为什么无限循环小数一定等于一个分数?(答案要点：无穷等比数列的和)

$$M.a_1\cdots a_m\dot{b}_1\cdots\dot{b}_n=M+\frac{a_1\cdots a_m}{10^m}+\frac{b_1\cdots b_n}{10^{m+n}}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{10^n}\right)^k,$$

由于
$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{10^n}\right)^k=\frac{1}{1-\frac{1}{10^n}}=\frac{10^n}{\underbrace{99\cdots9}_{n个}},$$

故

$$M.a_1\cdots a_m\dot{b}_1\cdots\dot{b}_n=M+\frac{a_1\cdots a_m}{10^m}+\frac{b_1\cdots b_n}{\underbrace{99\cdots9}_{n个}\times10^m}.$$

③ 存在无限且不循环的小数吗？这个问题等价于“存在不等于任何分数的数吗？”

(3) 实数系与数轴：实数——(有向)线段的长度．数轴的原点与单位长度的确定决定了实数集与数轴上点集之间的一一对应：**任一实数决定数轴上唯一一点**，数轴上任一点决定唯一实数；大小关系＝左右关系；稠密：任意两个实数(有理数)之间都有第三个实数(有理数)；连续：实数从小到大的变化就如直线的点一样是连续的而不是间断的．

(4) 毕达哥拉斯学派推崇数学推理的严密性，将数与几何图形视为统一体，关于直角三角形边长的毕达哥拉斯定理(勾股定理)是其典范．虽然毕达哥拉斯“万物皆(整)数”的信条虽然与许多生活现象不谋而合(3∶4∶6 与三和旋、同名正多边形覆盖平面)，但却与无理数的存在性相抵触，尤其受到他自己定理所发现的“$\sqrt{2}$”的致命打击．毕达哥拉斯认为“任意两条线段都可公度”，即对任何两条线段 a 和 b，一定有第三条线段 c 和正整数 m、n，使得 $a=mc$，$b=nc$. 事实上，正方形的边与其对角线就是不可公度的线段．

重点和难点：$\sqrt{2}$ 不是有理数．证明要点：任一分数等于一个既约分数，既约分数的分子分母不能被任何大于 1 的自然数同时整除，反证法．

三、典型例题

例 1.1 $\frac{1}{7}=0.\dot{1}42\ 85\dot{7}$；$\frac{1}{14}=0.0\dot{7}1\ 428\ \dot{5}$；$\frac{1}{13}=0.\dot{0}76\ 92\dot{3}$；

$\frac{1}{29}=0.\dot{0}34\ 482\ 758\ 620\ 689\ 655\ 172\ 413\ 793\ \dot{1}.$

例 1.2 $0.1\dot{6}=\frac{1}{10}+\frac{6}{90}=\frac{15}{90}=\frac{1}{6}$；

$0.32\dot{6}\ 1\dot{5}=\frac{32}{100}+\frac{615}{99\ 900}=\frac{10\ 861}{33\ 300}.$

例 1.3 证明 $\sqrt{2}$ 不是有理数．

引理 1　偶数的平方是偶数，奇数的平方是奇数．

$$(2k)^2=4k^2,\ (2k+1)^2=4k^2+4k+1.$$

推论　设 n 为整数，则 n^2 为偶数的充要条件是 n 为偶数．

证明　假设 $\sqrt{2}$ 是有理数，则有整数 m、n，使得 $\sqrt{2}=\frac{m}{n}$，当然可设 m、n 至少一个不是偶数．但由于 $m=\sqrt{2}n$，于是有 $m^2=2n^2$，即 m^2 是偶数，由引理的推论得出 m 也是偶数，故可记 $m=2k$. 由此又有 $4k^2=2n^2$，即 $2k^2=n^2$，因而 n 也是偶数．这与假设矛盾．因此 $\sqrt{2}$ 为无理数．

例 1.4　证明正方形的边和对角线是不可公度的线段．

证明　设正方形的边长为 a，对角线长为 b，则有 $b=\sqrt{2}a$. 假设有线段 c，使得 $a=nc$，$b=mc$，m、n 为自然数，那么就有 $mc=\sqrt{2}nc$，由此得 $\sqrt{2}=\frac{m}{n}$ 为有理数．这与事实不符．故正方形的边长和对角线不可公度．

习　题

1. 求出分数 $\frac{n}{7}$($n=1, 2, \cdots, 6$)的十进小数的值，观察它们循环节的有趣特点．

2. 随便写出几个你感兴趣的无限循环小数，把它们化成分数，再用计算器检验你的答案是否正确．

3. 用证明 $\sqrt{2}$ 不是有理数的类似方法，证明 $\sqrt{3}$ 乃至对任意素数 p、$\sqrt{p}$ 都不是有理数．

4. 若 p、q 是奇数，证明：一元二次方程 $x^2+px+q=0$ 的两个根既不能相等也不能是整数(提示：用反证法和关于根与系数关系的韦达定理).

5. 证明素数的个数无限多(提示：用反证法和每个整数都含有素数因子).

思考题

1. 查阅有关数学史的书籍或资料，写出一篇小论文，说明毕达哥拉斯学派对数学的伟大贡献，充分论证为什么无理数的发现是一次数学上的危机．

2. 有人这样论证“任意两条线段都可公度”：设 a、b 是两条任意线段，不妨设 $a>b$. 用 b 在 a 上截取，由于 a 的长度有限，有限次后必然得到比 b 还短

的剩余 a_1. 若 $a_1=0$，则 b 就是 a、b 的公度；不然用 a_1 在 b 上截取，同样有限次后得到比 a_1 小的剩余 b_1. 若 $b_1=0$，则 a_1 就是 a、b 的公度；不然又可以用 b_1 来截取 a_1……这样不断地截取，每次的剩余越来越短，最终必有一次剩余为 0. 若 $a_k=0$，则 b_{k-1} 就是 a、b 的公度；若 $b_k=0$，则 a_k 就是 a、b 的公度. 你觉得这样的论证正确吗？为什么？

3. 查阅资料，找出正方形的边和对角线不可公度的几何方法证明.

4. 查阅资料，理解毕达哥拉斯的学生——阿尔希塔斯给出两个比相等的定义，从而消除了第一次数学危机.

第二章　连分数及其在天文学上的应用

一、基本要求

(1) 懂得什么是(简单)连分数，理解有理数与有限连分数之间、无理数与无限连分数之间的对应关系．

(2) 会计算一个连分数的渐近分数，懂得渐近分数(列)对连分数的(正负)最佳逼近性．

(3) 熟练掌握把一个分数写成它的连分数展开式的方法(辗转相除法)．

(4) 能理解公历闰年、农历闰年、农历大小月的确定法分别来自公历 1 年的天数、农历月数、朔望月天数的小数或分数部分的连分数最佳逼近．

(5) 能熟练背诵二十四节气，知道农历闰月放在无“中气”的农历月的道理．

(6) 知道日食、月食的沙罗周期(18 年 11 天)取决于朔望月与“交点月”天数比值的连分数最佳逼近．

(7) 知道中国的“天干”十字、“地支”十二字和它们的“六十甲子”配搭(组合)，知道如何由公历年数计算该年的干支年号．

二、知识要点

(1) 带余除法，用(带余)辗转相除法求两个自然数的最大公约数．

难点：用辗转相除法，有限步一定能求出两个自然数的最大公约数．

(2) 把分数化为有限连分数，把有限连分数化为分数，无理数与无限连分数．

(3) (简单)连分数的定义和性质．

定义　形为 $\alpha=a_0+\cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{a_2+\cfrac{b_3}{a_3+\cfrac{b_4}{a_4+\ddots}}}}$ 的“分数”称为连分数，其中，a_0是整数，其余所有 a_i、b_j 为正整数；当所有 $b_j=1$ 时称为简单连分数，由截断连分数 α 的第 k 层得到的分数 $\frac{p_k}{q_k}$ 称为这个连分数的第 k 个渐近分数．

连分数有如下性质：

① 每个有理数(分数)都可以展成有限连分数；

② 每个无理数可以展成无限连分数；

③ 渐近分数 $\frac{p_k}{q_k}$ 是分母不大于 q_k 的所有分数中最接近 α 的真值的分数；

④ 从 $\frac{p_1}{q_1}$ 开始，渐近分数列按照一小一大的顺序越来越精确地逼近 α.

难点：连分数的渐近分数是(在分母值最小的条件下)一正一负地从两边对其真值的最佳逼近．

(4) 闰年置法：“4 年 1 闰，100 年少 1 闰，400 年加 1 闰”来自 1 年有 365 $\frac{10\ 463}{43\ 200}$ 天的分数部分的连分数最佳逼近．

(5) 农历大小月置法：“2 个月 1 大 1 小，15 个月 8 大 7 小，17 个月 9 大 8 小”来自朔望月天数 29.530 6 小数部分的连分数最佳逼近．

(6) 农历闰年：“19 年 7 闰法”来自公历 1 年有 12 $\frac{108\ 750}{295\ 306}$个农历月的分数部分的连分数最佳逼近．

(7) 二十四节气完全由“太阳的视运动”——地球绕太阳的公转(扫过的面积)决定，与月亮的运动无关．因而在公历的日期上相对固定：“公历节气最好算，一月两节不改变．上半年来六、二十一，下半年来八、二十三”；公历每月的第二个节气叫中气，若阴历该月无中气，则称该月是上月的闰月．

(8) 地球公转的轨道所在平面称为黄道面，月亮绕地球的旋转轨道平面与黄道面不重合，月亮绕地球的轨道与黄道面有两个交点，月亮接连两次回到同一交点所需时间为 27.212 3 天，称为一个交点月．日食、月食只可能发生在朔望月与交点月同步之时．由朔望月与交点月之比(29.530 6/27.212 3)的第 6 个渐近分数为 242/223 知道，223 个朔望月基本上是 242 个交点月，这就是日食、月食发生的“沙罗周期”，它相当于 6 585 天，即 18 年又 11 天．

(9) 用干支记录年、月、日、时是中国的“国粹”．虽然现在已经不广泛流行，但作为一种特殊的 60 进制的记录体系，尤其是对了解中国历史事件，干

支仍是一个重要的工具.

难点：熟记六十干支的顺序，记住一种由公元年份转换干支年号的方法.需注意公元前后计算上的区别.

三、典型例题

例 2.1 计算 1 年天数的连分数和前 6 个渐近分数，并用其解释闰年置法的精确性.

例 2.2 计算朔望月天数的连分数及其前 6 个渐近分数，并用其解释农历置大小月和闰年的理由.

例 2.3 计算朔望月与交点月比值的连分数和其前 6 个渐近分数，并用其解释沙罗周期的意义.

例 2.4 用一些典型历史事件发生的年份计算其干支年号，加深理解这些历史事件对中华民族产生的重大影响.

习　题

1. 将 $\frac{94}{24}$，$\frac{106}{75}$，$\frac{29}{24}$ 展为连分数.

2. 求出 $\frac{29}{24}$ 的连分数展式的前三个渐近分数，并与精确值比较.

3. 假想行星 B 绕恒星 A 沿椭圆轨道运行，运行一周需 432 天 2 小时 15 分 15 秒. 再假定行星 B 的自转周期是 24 小时. 试为行星 B 制定闰年规定(只算前三个渐近分数).

第三章 数学命题和证明方法

一、基本要求

(1) 知道什么是概念，概念由外延和内涵组成，揭露概念的外延与内涵的基本方法(等价关系与划分、定义)和基本要求；了解数学的原始概念.

(2) 知道什么是命题. 数学命题及数学命题的分类—不需要(或不能)证明的数学命题：公理；需要证明的数学命题：引理、定理、推论等.

(3) 知道由一个命题可衍生出的四种基本形式(正、否、逆与逆否)；充要条件.

(4) 知道证明数学命题的几种基本方法：演绎、分析与综合、归纳(数学归纳法).

二、知识要点

(1) “概念”的描述(不能定义)：人们对某个(类)客观事物认识的综合和抽象，其表现形式是“词”.

概念的外延：适合概念的一切对象之全体.

概念的内涵：表达该概念特性的一切属性之总和.

等价关系与划分：揭示概念外延的基本方法—将所论对象之全体分类，必须满足“自反、对称和传递”.

定义：利用原始概念或已定义的概念(的性质)对新概念的描述，必须抓住“特性”同时避免“恶性循环”.

(2) 不加证明而被接受(但符合人们通过实践所得到的认识)的数学命题称为公理. 公理是构建数学系统理论的基石和出发点.

(3) 命题由条件和结论组成. 从一个命题可以衍生出四个命题：正命题和与其等价的逆否命题，否命题和与其等价的逆命题. 若这四个命题都等价，则该命题的条件和结论互为充要条件.

(4) 演绎法：完全的三段论和省略的三段论.

分析与综合：从条件出发经过演绎推出结论为综合；反之，从结论出发经逆演绎得到条件(从而证明命题)为分析.

归纳法：完全归纳(穷举)证明. 不完全归纳是数学发现的主要途径.

数学归纳法：数学归纳原理和证明要点.

三、典型例题

例 3.1 等价关系之例：人类集合上的“同国籍”；三角形全等、相似、与直角大小比较、边长相等关系等.

例 3.2 欧基里德几何公理；度量空间的距离公理.

例 3.3 不完全归纳：费马素数猜想、费马大定理、歌德巴赫猜想、一元 n 次方程求根公式猜想，等等.

例 3.4 用数学归纳法求证：

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1). \tag{3.1}$$

证明 当 $n=1$ 时，$1^2=\frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2\cdot 3=1$. 这时等式是成立的.

假设当 $n=k$ 时，公式是成立的，即假定

$$1^2+2^2+3^3+\cdots+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1),$$

我们来证明当 $n=k+1$ 时，公式也成立. 事实上，在上式两边各加 $(k+1)^2$，得

$$\begin{aligned}1^2+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2&=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2\\&=\frac{1}{6}(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]=\frac{1}{6}(k+1)[2k^2+7k+6]\\&=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)=\frac{1}{6}(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1].\end{aligned}$$

这就证明了公式(3.1).

数学归纳法的第一个步骤，通常证明起来很简单，但决不能略去这一步骤，这一步叫做归纳法基础. 去掉这一步骤就会导出荒谬的结论. 例如可以证出所有的自然数全相等的结论. 事实上，假定

$$k=k+1$$

成立，两边各加 1 就会得出

$$k+1=k+2,$$

由此可得出全体自然数都相等！

使用第一步骤时，并不一定每次都从 $n=1$ 开始，也可以从某一个别的自然数开始．但这个自然数必须是要证公式的第一项．

归纳法的第二个步骤是证明的难点，要经过大量的反复实践才能熟练灵活地掌握归纳法的证明方法．

习　题

1. 三角形的三边分别是 3、4 和 5，根据什么定理可以确定这个三角形是直角三角形？

2. 用三种方法，即利用术语：1)“必要而且充分的”，2)“在……时，而且仅在……时”，以及 3)“那些……，而且仅仅那些……”，以充分而且必要的特征的形式，把下列两个定理叙述为一个定理：

(1) 平行四边形的对角线互相平分；

(2) 如果一个四边形的对角线互相平分，则该四边形是一平行四边形．

3. 把下列两个定理叙述成一个定理：

(1) 如果一数的个位数字是偶数或零，则它能被 2 除尽；

(2) 如果一数的个位数字既不是偶数，又不是零，则它不能被 2 除尽．

4. 对任何自然数 n，证明下列等式成立：

(1) $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$.

(2) $\dfrac{1^1}{1\cdot 3}+\dfrac{2^2}{3\cdot 5}+\cdots+\dfrac{n^2}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\dfrac{n(n+1)}{2(2n+1)}$.

(3) $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n}=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n}$.