全国高职高专教育精品规划教材

经济数学

JINGJI SHUXUE

主编 陈笑缘 刘 萍

（下册）

北京交通大学出版社
http://press.bjtu.edu.cn

全国高职高专教育精品规划教材

经济数学

（下册）

主　编　陈笑缘　刘　萍
副主编　冯铁勇
参　编　杜　庆　武　群　石西琳

北京交通大学出版社
·北京·

目　　录

第 8 章　二元函数微分学及应用

本书前面几章介绍了一元函数微积分学. 但在经济活动中，经常涉及两个或两个以上自变量的函数问题，即提出了多元函数的微分等问题. 由于二元以上函数与二元函数没有本质差别，因此，本章主要介绍二元函数的微分学及应用. 为了学习方便，首先介绍一些空间解析几何的知识.

8.1　空间解析几何简介

8.1.1　空间直角坐标系

在空间任意选取一点 O，过 O 点作 3 条互相垂直的数轴 Ox，Oy，Oz，都以 O 为原点，取相同的单位长度，并按右手系确定其正方向(即将右手伸直，大拇指朝上为 Oz 的正方向，其余四指的指向为 Ox 的正方向，四指弯曲 90°后的指向为 Oy 的正方向)，这样就构成了空间直角坐标系，如图 8－1 所示. 其中，点 O 称为坐标原点，x 轴、y 轴、z 轴称为该坐标系的坐标轴，每两条坐标轴确定的平面称为坐标平面，由 x 轴和 y 轴确定的坐标平面称为 xOy 面，类似地有 yOz 面、xOz 面. 3 个坐标平面将空间分成 8 个部分，每一部分称为一个象限，如图 8－2 所示.

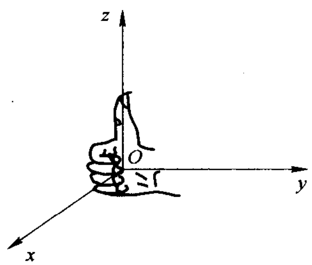

图 8－1

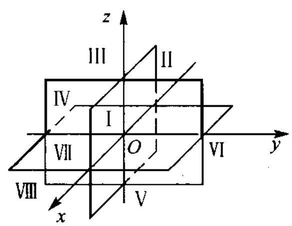

图 8－2

建立空间直角坐标系后，对于空间任意一点 M，过点 M 分别作 3 个垂直于 x 轴、y 轴与 z 轴的平面，它们与坐标轴的交点 P，Q，R 对应的 3 个实数依次为 x，y，z(如图 8－3 所示)，则点 M 唯一确定了一个有序数组(x, y, z)；反之，任意给定一个有序数组(x, y, z)，可以在 x，y，z 轴上分别取 3 点 P，Q，R，使它们的坐标分别为 x，y，z，过这 3 点分别作垂直于 x，y，z 轴的平面，这 3 个互相垂直的平面交于一点 M，则由有序数组(z, y, z)唯一

确定了空间的一个点 M. 这样，通过空间直角坐标系建立了空间点 M 与有序数组(x, y, z)之间的一一对应关系，称这个有序数组为点 M 的坐标，记为 $M(x, y, z)$.

显然，原点 O 的坐标为$(0, 0, 0)$，x 轴上任一点的坐标为$(x, 0, 0)$，y 轴上任一点的坐标为$(0, y, 0)$，z 轴上任一点的坐标为$(0, 0, z)$，xOy 面上任一点的坐标为$(x, y, 0)$，yOz 面上任一点的坐标为$(0, y, z)$，xOz 面上任一点的坐标为$(x, 0, z)$.

与平面直角坐标系下两点间的距离一样，设 $M_1(x_1, y_1, z_1)$，$M_2(x_2, y_2, z_2)$是空间任意两点(如图 8－4 所示)，可推得空间两点 M_1、M_2的距离公式为

$$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

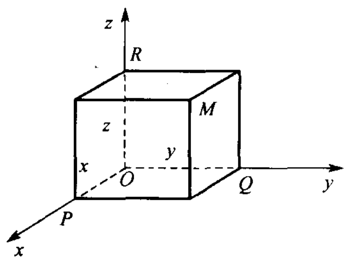

图 8－3

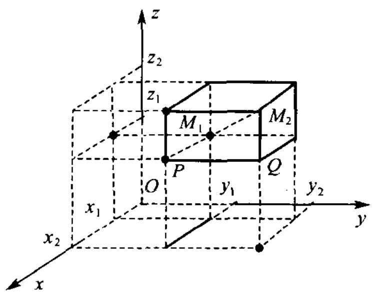

图 8－4

特别地，任意一点 $M(x, y, z)$与坐标原点 $O(0, 0, 0)$之间的距离为

$$|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

例 8.1 证明以点 $A(6, 3, 1)$，$B(7, 1, 2)$，$C(5, 2, 3)$为顶点的三角形$\triangle ABC$ 为等边三角形.

证明 根据空间两点间的距离公式，得

$$|AB|=\sqrt{(7-6)^2+(1-3)^2+(2-1)^2}=\sqrt{6}$$
$$|BC|=\sqrt{(5-7)^2+(2-1)^2+(3-2)^2}=\sqrt{6}$$
$$|AC|=\sqrt{(5-6)^2+(2-3)^2+(3-1)^2}=\sqrt{6}$$

所以$\triangle ABC$ 为等边三角形.

8.1.2 空间曲面与方程

在平面解析几何中，把曲线看成动点运动的轨迹. 同样，在空间直角坐标系中，也可以把空间曲面看成一个动点或一条曲线(直线)按特定条件运动而产生的几何轨迹，动点所满足的特定条件就是曲面上一切点所共同具有的性质，此性质可用一个方程 $F(x, y, z)=0$ 来表示. 当且仅当动点 $P(x, y, z)$在曲面 S 上时，点的坐标 $P(x, y, z)$才满足方程 $F(x, y, z)=0$. 由此，称 $F(x, y, z)=0$ 为曲面 S 的方程，而曲面 S 称为方程 $F(x, y, z)=0$ 的图形，如图 8－5 所示.

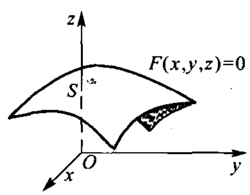

图 8－5

这就是空间曲面与方程之间的对应关系.

例 8.2　求与两定点 $M(-1,0,2)$，$N(3,1,1)$距离相等的点的轨迹方程.

解　设动点坐标为 $P(x,y,z)$，则有 $|PM|=|PN|$. 由两点间距离公式得

$$\sqrt{(x+1)^2+y^2+(z-2)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2+(z-1)^2}$$

化简得轨迹方程为

$$4x+y-x-3=0.$$

在例 8.2 中，所求的轨迹是线段 MN 的垂直平分面，它的方程是三元一次方程. 一般地，可以证明，空间平面的方程为 $Ax+By+Cz+D=0$，其中 A，B，C，D 都是常数，且 A，B，C 不全为 0.

例 8.3　作 $z=d$(d 为常数)的图形.

解　这是 $A=0$，$B=0$，$C=1$ 时的平面方程，不论 x、y 取何值，z 的值恒为 d，所以，$z=d$ 的图形是平行于 xOy 面的平面，如图 8-6 所示.

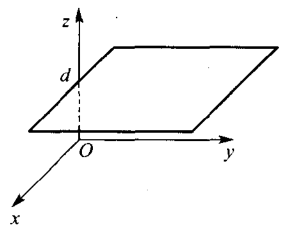

图 8-6

在例 8.3 中，当 $d=0$ 时，得 $z=0$，它的图形是 xOy 面. 类似地可知，$x=0$，$y=0$ 分别表示 yOz 面、xOz 面.

例 8.4　求球心为点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$、半径为 R 的球面方程.

解　设球面上任一点为 $P(x,y,z)$、则 $|PM_0|=R$，由两点间距离公式得

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R$$

两边平方得球面方程

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$

特别地，当球心为原点时，球面方程为

$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$

例 8.5　作 $x^2+y^2=a^2(a>0)$的图形.

解　方程 $x^2+y^2=a^2$ 在平面上表示以原点为圆心、半径为 a 的圆. 因为方程不含 z，所以只要 x 与 y 满足 $x^2+y^2=a^2$，空间点(x,y,z)必在该曲面上. 因此这个方程所表示的曲面，是由平行于 z 轴的直线沿 xOy 面上的圆 $x^2+y^2=a^2$ 移动而形成的**圆柱面**(如图 8-7 所示). $x^2+y^2=a^2$ 称为它的**准线**，平行于 z 轴的直线称为它的**母线**.

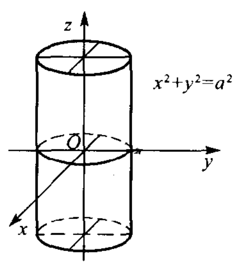

图 8-7

例 8.6　作 $z=x^2+y^2$ 的图形.

解　因为 $x^2+y^2\geqslant0$，所以曲面 $z=x^2+y^2$ 在 xOy 面的上方，且与该坐标面只有一个交点，用平面 $z=d(d>0)$截曲面，其截痕为圆 $x^2+y^2=d^2$. 让平面 $z=d$ 向上移动，则截痕圆越来越大. 如

用平面 $x=a$ 或 $y=b$ 去截曲面，则截痕均为抛物线. 称 $z=x^2+y^2$ 的图形为**旋转抛物面**(如图 8－8 所示).

例 8.7 作 $z^2=x^2+y^2$ 的图形.

解 曲面 $z^2=x^2+y^2$ 过原点，用平面 $z=\pm d(d>0)$ 截曲面，其截痕为圆 $x^2+y^2=d^2$. 让平面 $z=d$ 向上移动($z=-d$ 向下移动)，则截痕圆越来越大. 用坐标平面 yOz(坐标平面 xOz)去截，则截痕均为象限角的平分线. 称 $z^2=x^2+y^2$ 的图形为**圆锥面**(如图 8－9 所示).

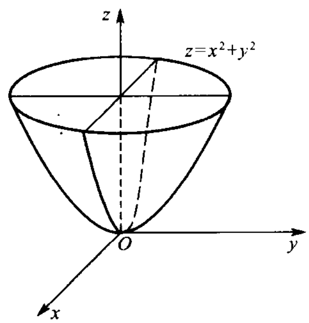

图 8－8

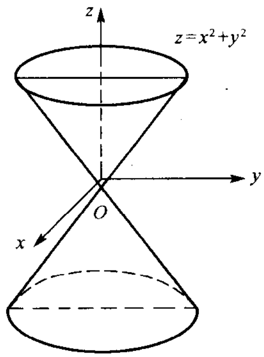

图 8－9

8.2 二元函数的极限与连续

8.2.1 二元函数的概念

1. 二元函数的定义

一元函数研究一个自变量对因变量的影响，但在许多实际问题中，往往要研究多个自变量对因变量的影响. 例如，圆柱底面半径与高分别为 x，y 时的圆柱体体积为

$$V=\pi x^2 y.$$

当 x，y 变化时，V 相应发生改变；又如，本金为 P，利息率为 r，经过 n 个周期后，按复利计算的本利和为

$$F=p(1+r)^n.$$

F 随着变量 p，r，n 的变化而变化.

于是可得多元函数的定义.

定义 8.1 设在某一个变化过程中有 3 个变量 x，y 和 z，如果对于变量 x，y 在其变化范围内所取的每一对数值，变量 z 按照某个对应法则 f，都有唯一确定的数值与之对应，则

称 z 为 x，y 的二元函数，记为

$$z=f(x,\ y).$$

其中，x，y 称为自变量，z 称为因变量. 自变量的取值范围称为函数的**定义域**.

类似地，可以定义三元函数 $u=f(x,\ y,\ z)$，以及三元以上的函数. 把二元及二元以上的函数统称为**多元函数**.

采用与一元函数求定义域相类似的方法可以求出二元函数 $z=f(x,\ y)$ 的定义域，它在几何上是一个平面区域. 所谓平面区域，是指整个 xOy 平面或者是 xOy 平面上由几条曲线所围成的部分. 围成平面区域的曲线称为该区域的边界，包括边界在内的区域称为**闭区域**，不包括边界在内的区域称为**开区域**. 如果一个区域可以包含在一个以原点为圆心且半径适当大的圆内，则称该区域为**有界区域**，否则称为**无界区域**.

例 8.8　求下列函数的定义域并画出相应图形.

(1) $z=\ln(x+y)$　　　(2) $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$

解　(1) 由对数函数的定义可知，要使 z 有意义，必须有

$$x+y>0$$

所以该函数的定义域是

$$D=\{(x,\ y)\,|\,x+y>0\}.$$

它表示 xOy 面上第Ⅱ、Ⅳ象限角平分线上方(不包括直线 $x+y=0$)的半平面区域(见图 8-10).

(2) 要使 z 有意义，必须有

$$1-x^2-y^2\geqslant 0，即\ x^2+y^2\leqslant 1$$

所以，所求函数的定义域是

$$D=\{(x,\ y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 1\}.$$

它表示由圆 $x^2+y^2=1$ 围成的闭区域(见图 8-11).

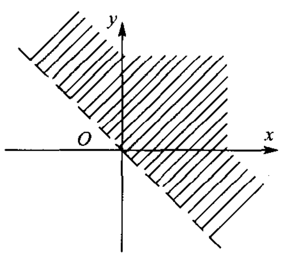

图 8-10

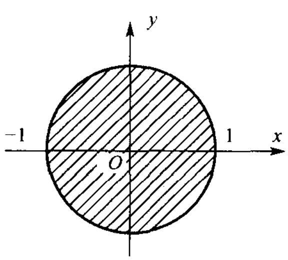

图 8-11

2. 二元函数的图像

设二元函数 $z=f(x, y)$ 的定义域为 xOy 面上的某一区域 D，对于 D 中的每一个点 $P(x, y)$，必有唯一的数 $z=f(x, y)$ 与之对应. 这样，以 x 为横坐标、y 为纵坐标、z 为竖坐标在空间就确定一点 $M(x, y, z)$，则所有这样的点的集合

$$\{(x, y, z) \mid z=f(x, y), (x, y)\in D\}$$

就是二元函数 $z=f(x, y)$ 的图像(见图 8-12). 通常，二元函数的图像是一张曲面.

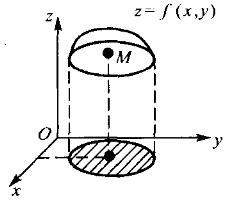

图 8-12

8.2.2 二元函数的极限与连续

与一元函数相类似，可引入二元函数的极限与连续概念.

为叙述方便，先引入平面上点 $P_0(x_0, y_0)$ 的邻域概念. 以 P_0 为中心，正数 δ 为半径，邻域是指满足 $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 的点组成的开区域，并把它称为点 P_0 的 δ 邻域.

定义 8.2 设函数 $z=f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某个邻域内有定义(点 P_0 可以除外)，如果当点 $P(x, y)$ 沿任意路径趋于点 P_0($(x, y)\neq(x_0, y_0)$)时，$f(x, y)$ 都趋于一个确定的常数 A，则称 A 是函数 $f(x, y)$ 当 $P(x, y)\to P_0(x_0, y_0)$ 时的**极限**，记为

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)=A \text{ 或 } f(x, y)\to A(x\to x_0, y\to y_0).$$

说明

(1) 因为平面上由一点到另一点有无数条路径，所以上述定义中要求点 $P(x, y)$ 沿任意路径趋向于点 $P_0(x_0, y_0)$ 时，极限都要存在且等于同一个值 A，才能说二元函数的极限存在. 因此，当点 $P(x, y)$ 按某些特殊路径趋于点 $P_0(x_0, y_0)$ 时，函数值趋向于一个常数，不能断定函数极限存在. 但是，如果当点 P 沿不同路径趋向于点 P_0 时，函数值趋向于不同的值，则函数极限必不存在.

(2) 与一元函数类似，二元函数的极限也可进行四则运算.

例 8.9 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{\sin(xy)}{x}$.

解 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{\sin(xy)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{y\sin(xy)}{xy}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}y\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{\sin(xy)}{xy}=1.$

例 8.10 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to 1}}\left(1+\dfrac{y}{x}\right)^x$.

解 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to 1}}\left(1+\dfrac{y}{x}\right)^x=\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to 1}}\left(1+\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{x}{y}\cdot y}=\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to 1}}\left[\left(1+\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{x}{y}}\right]^y=\mathrm{e}.$

定义 8.3 设函数 $z=f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某个邻域内有定义，如果函数在点 P_0

的极限存在，且$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x, y)=f(x_0, y_0)$，则称函数 $f(x, y)$在点 P_0处**连续**. 否则，称函数 $f(x, y)$在点 P_0处不连续，亦称**间断**. 如果 $f(x, y)$在区域 D 的每一点都连续，则称它在区域 D 内连续.

说明

(1) 与一元函数类似，二元连续函数经过四则运算后仍连续，二元连续函数复合后连续，二元初等函数在其定义区域内必连续.

(2) 有界闭域上的连续函数必有最大值和最小值等.

8.3　偏导数与全微分

8.3.1　偏导数的概念

在实际问题中，通常要研究多元函数随一个自变量变化，其余变量固定不变时的变化率问题.

例如，对销售函数 $Q=Ap^{\alpha}L^{\beta}$(A，α，β 为常数)，当考虑价格 p 不变，销售量 Q 相对于广告费 L 的变化率时，可将 Q 看作 L 的一元函数，由一元函数求导公式，可得 $Q'_L=\beta Ap^{\alpha}L^{\beta-1}$；类似地，考虑广告费 L 不变时，Q 对于价格 p 的变化率，将 Q 看作 p 的一元函数，则有 $Q'_p=\alpha Ap^{\alpha-1}L^{\beta}$，这就是下面要研究的偏导数问题.

定义 8.4　设函数 $z=f(x, y)$在 $P_0(x_0, y_0)$的某个邻域内有定义，当 y 固定在 y_0 而 x 有增量 Δx 时，相应地，函数有偏增量

$$f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0, y_0)$$

如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限为函数 $f(x, y)$在点(x_0, y_0)处对 x 的偏导数，记为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\quad \left.z'_x\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}\text{或 } f'_x(x_0, y_0).$$

类似地，如果极限

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

存在，则称此极限值为函数 $z=f(x, y)$在点 $P_0(x_0, y_0)$对 y 的偏导数，记为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\quad \left.z'_y\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}\text{或 } f'_y(x_0, y_0).$$

如果函数 $z=f(x, y)$在平面区域 D 内每一点的偏导数都存在，则称函数 $f(x, y)$在 D

内偏导数存在. 函数 $z=f(x, y)$在点(x, y)处对自变量 x 的偏导数记为

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, z'_x\text{或} f'_x(x, y)$$

对自变量 y 的偏导数记为

$$\frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}, z'_y\text{或} f'_y(x, y)$$

由偏导数定义可知，求多元函数对某个自变量的偏导数，只需把它看成这个自变量的函数，而把其余的自变量都当作常数，然后用一元函数的求导法对这个自变量求导数.

例 8.11 求函数 $z=x^3+y^3+3x^2y^2$ 的偏导数.

解

$$z'_x=(x^3+y^3+3x^2y^2)'_x=3x^2+6xy^2$$

$$z'_y=(x^3+y^3+3x^2y^2)'_y=3y^2+6x^2y.$$

例 8.12 求函数 $z=\ln(x^2+y)$的偏导数.

解

$$z'_x=[\ln(x^2+y)]'_x=\frac{1}{x^2+y}(x^2+y)'_x=\frac{2x}{x^2+y}$$

$$z'_y=[\ln(x^2+y)]'_y=\frac{1}{x^2+y}(x^2+y)'_y=\frac{1}{x^2+y}.$$

例 8.13 求函数 $z=(x^2+y^2)e^{xy}$的偏导数.

解

$$\begin{aligned} z'_x&=(x^2+y^2)'_x e^{xy}+(x^2+y^2)(e^{xy})'_x \\ &=2xe^{xy}+(x^2+y^2)ye^{xy}=(2x+x^2y+y^3)e^{xy} \\ z'_y&=(x^2+y^2)'_y e^{xy}+(x^2+y^2)(e^{xy})'_y \\ &=2ye^{xy}+(x^2+y^2)xe^{xy}=(x^3+xy^2+2y)e^{xy}. \end{aligned}$$

例 8.14 求函数 $z=\arctan\dfrac{x}{y}$在(1, 1)点处的偏导数.

解

$$z'_x=\left(\arctan\frac{x}{y}\right)'_x=\frac{1}{1+\left(\dfrac{x}{y}\right)^2}\left(\frac{x}{y}\right)'_x=\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$z'_y=\left(\arctan\frac{x}{y}\right)'_y=\frac{1}{1+\left(\dfrac{x}{y}\right)^2}\left(\frac{x}{y}\right)'_y=-\frac{x}{x^2+y^2}$$

所以

$$z'_x\Big|_{\substack{x=1\\y=1}}=\frac{y}{x^2+y^2}\Big|_{\substack{x=1\\y=1}}=\frac{1}{2},\quad z'_y\Big|_{\substack{x=1\\y=1}}=-\frac{x}{x^2+y^2}\Big|_{\substack{x=1\\y=1}}=-\frac{1}{2}$$

还可以作如下求解：因为 $z\Big|_{y=1}=z(x, 1)=\arctan\dfrac{x}{1}=\arctan x$，所以

$$z'_x(x, 1)=(\arctan x)'_x=\frac{1}{1+x^2}$$

因此

$$z'_x\Big|_{\substack{x=1\\y=1}}=z'_x(1,\ 1)=\frac{1}{1+x^2}\Big|_{x=1}=\frac{1}{2}$$

同理，因为 $z\Big|_{x=1}=z(1,\ y)=\arctan\dfrac{1}{y}$，所以

$$z'_y(1,\ y)=\left(\text{anctan}\ \frac{1}{y}\right)'_y=\frac{1}{1+\left(\dfrac{1}{y}\right)^2}\left(-\frac{1}{y^2}\right)=-\frac{1}{1+y^2}$$

因此

$$z'_y\Big|_{\substack{x=1\\y=1}}=z'_y(1,\ 1)=-\frac{1}{1+y^2}\Big|_{y=1}=-\frac{1}{2}.$$

一般地，当二元函数比较复杂时，要求它在某点的偏导数，可采用后面的方法.

8.3.2　高阶偏导数

一般说来，函数 $z=f(x,\ y)$的偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'_x(x,\ y),\quad \frac{\partial z}{\partial y}=f'_y(x,\ y)$$

仍然是 x，y 的函数，如果这两个偏导函数关于 x，y 的偏导数也存在，则称它们的偏导数是 $f(x,\ y)$的二阶偏导数，记为

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=z''_{xx}=f''_{xx}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=z''_{xy}=f''_{xy}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=z''_{yx}=f''_{yx}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=z''_{yy}=f''_{yy}$$

其中，z''_{xy}，z''_{yx}称为二阶混合偏导数.

类似地，可以定义三阶、四阶、…、n 阶偏导数．二阶及二阶以上的偏导数称为高阶偏导数，而 z'_x、z'_y称为函数 $z=f(x,\ y)$的一阶偏导数.

例 8.15　求 $z=x^2+2y^3-x^3y^2$ 的二阶偏导数.

解　$\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x-3x^2y^2$，　$\dfrac{\partial z}{\partial y}=6y^2-2x^3y$，　$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2-6xy^2$，　$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-6x^2y$，

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}=-6x^2y$，　$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=12y-2x^3$.

说明　可以看到，例 8.15 中两个混合偏导数相等．可以证明，当混合偏导数$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$与$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$连续时，它们必相等.

例 8.16 已知 $z=x^2\sin y$，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

解

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x\sin y,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=x^2\cos y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(2x\sin y)=2\sin y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(2x\sin y)=2x\cos y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}(x^2\cos y)=-x^2\sin y$$

8.3.3 全微分

1. 全微分的概念与运算

对于一元函数 $y=f(x)$，如果函数在 x 处的增量 Δy 可以表示为 $\Delta y=A\Delta x+\alpha$，其中 α 是 Δx 的高阶无穷小，那么 $A\Delta x$ 称为函数 $y=f(x)$ 在 x 处的微分. 类似地，可以讨论二元函数在所有自变量都有微小变化时函数增量的变化情况.

例 8.17 用 z 表示边长分别为 x 与 y 的矩形(见图 8-13)的面积，则$z=xy$. 如果边长 x 与 y 分别取得增量 Δx 与 Δy，则面积 z 相应地有一个增量

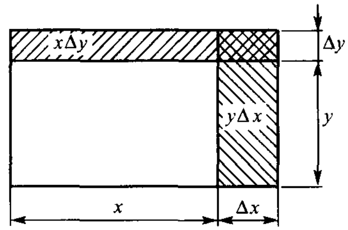

图 8-13

$$\Delta z=(x+\Delta x)(y+\Delta y)-xy=y\Delta x+x\Delta y+\Delta x\Delta y$$

可以看到，Δz 由两部分组成. 第一部分 $y\Delta x+x\Delta y$ 是 Δx，Δy 的线性函数；第二部分 $\Delta x\Delta y$ 当 $\Delta x\to 0$，$\Delta y\to 0$ 时是比 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ 高阶的无穷小. 因此，当 $|\Delta x|$，$|\Delta y|$ 都较小时，则可用第一部分 $y\Delta x+x\Delta y$ 作为 Δz 的近似值，即有

$$\Delta z\approx y\Delta x+x\Delta y$$

同时，还可以看到，上式中 Δx 和 Δy 前的系数恰好分别是二元函数 $z=xy$ 对变量 x 和 y 的偏导数. 即

$$\Delta z\approx z'_x\Delta x+z'_y\Delta y$$

把 $y\Delta x+x\Delta y$ 称为 $z=xy$ 的微分.

定义 8.5 如果二元函数 $z=f(x,y)$在点(x,y)处的增量

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$$

可以表示为

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho) \tag{8-1}$$

其中，A，B 是 x，y 的函数，与 Δx，Δy 无关，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，$o(\rho)$是一个比 ρ 高阶

的无穷小，则称 $A\Delta x+B\Delta y$ 是函数 $z=f(x, y)$ 在点 (x, y) 处的**全微分**，记为 dz，即

$$dz=A\Delta x+B\Delta y$$

这时，也称函数在点 (x, y) 处可微.

如果函数 $z=f(x, y)$ 在 (x, y) 处可微，则式(8-1)对任意的 Δx，Δy 都成立. 所以当 $\Delta y=0$ 时(此时 $\rho=|\Delta x|$)，式(8-1)成为

$$f(x+\Delta x, \Delta y)-f(x, y)=A\Delta x+o(|\Delta x|)$$

两端除以 Δx，并令 $\Delta x\to 0$ 取极限，得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x, \Delta y)-f(x, y)}{\Delta x}=A$$

即 $A=f'_x(x, y)$；同理可得 $B=f'_y(x, y)$. 如果记 $dx=\Delta x$，$dy=\Delta y$，则函数 $z=f(x, y)$ 在 (x, y) 点的微分可表示为

$$dz=f'_x(x, y)dx+f'_y(x, y)dy.$$

说明　在一元函数中，可导与可微是等价的，但在二元函数中，这个结论未必成立，即 $f'_x(x, y)$，$f'_y(x, y)$ 都存在，也不能保证函数在点 (x, y) 处可微. 不过可以证明：如果函数 $z=f(x, y)$ 在点 (x, y) 的某一邻域内有连续的偏导数 $f'_x(x, y)$，$f'_y(x, y)$，则 $f(x, y)$ 在点 (x, y) 处可微.

例 8.18　求函数 $z=e^{x+y^2}$ 的全微分.

解　因为 $\frac{\partial z}{\partial x}=e^{x+y^2}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=2ye^{x+y^2}$，所以

$$dz=e^{x+y^2}dx+2ye^{x+y^2}dy.$$

例 8.19　求函数 $z=x^2y^2$ 在点 $(2, -1)$ 处，当 $\Delta x=0.02$，$\Delta y=-0.01$ 时的增量与全微分.

解　函数 $z=x^2y^2$ 在点 $(2, -1)$ 处，当 $\Delta x=0.02$，$\Delta y=-0.01$ 时的增量为

$$\Delta z=(2+0.02)^2\times(-1-0.01)^2-2^2\times(-1)^2=0.1624$$

又因为 $\frac{\partial z}{\partial x}=2xy^2$，$\frac{\partial z}{\partial y}=2x^2y$，即 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=2\\y=-1}}=2xy^2\Big|_{\substack{x=2\\y=-1}}=4$，$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=2\\y=-1}}=2x^2y\Big|_{\substack{x=2\\y=-1}}=-8$，所以函数 $z=x^2y^2$ 在点 $(2, -1)$ 处的全微分为

$$dz\Big|_{\substack{x=2\\y=-1}}=4\times 0.02+(-8)\times(-0.01)=0.16.$$

*2. 近似计算

与一元函数的微分一样，可利用全微分进行近似计算.

由全微分的定义可知，如果函数 $z=f(x, y)$ 在点 (x, y) 可微，则当自变量的增量 $|\Delta x|$ 和 $|\Delta y|$ 很小时，有下述近似计算公式

$$\Delta z\approx dz=f'_x(x, y)\Delta x+f'_y(x, y)\Delta y$$

或

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y)\approx f(x, y)+f'_x(x, y)\Delta x+f'_y(x, y)\Delta y.$$

例 8.20 计算$(0.98)^{2.01}$的近似值.

解 设$f(x, y)=x^y$，$x_0=1$，$\Delta x=-0.02$，$y_0=2$，$\Delta y=0.01$. 由于

$$f(1, 2)=1,\ f'_x(1, 2)=yx^{y-1}\Big|_{\substack{x=1\\y=2}}=2,\ f'_y(1, 2)=x^y\ln x\Big|_{\substack{x=1\\y=2}}=0$$

所以，根据微分的近似计算公式，得

$$(0.98)^{2.01}\approx 1+2\times(-0.02)+0\times 0.01=0.96.$$

8.3.4 复合函数与隐函数的偏导数

1. 二元复合函数及其偏导数

在一元复合函数中，研究了复合函数求导的法则，这一法则可推广到多元复合函数.

设函数$z=f(u, v)$是变量u，v的函数，而u，v又是变量x，y的函数，则

$$z=f\left[u(x, y), v(x, y)\right]$$

是x，y的复合函数，其中$u=u(x, y)$，$v=v(x, y)$称为中间变量，x，y是自变量.

对于这类复合函数的偏导数，有下面的定理.

定理 8.1 如果函数$u=u(x, y)$，$v=v(x, y)$在点(x, y)的偏导数都存在，且在对应于(x, y)的点(u, v)处，函数$z=f(u, v)$可微，则复合函数

$$z=f[u(x, y), v(x, y)]$$

对x及y在点(x, y)的偏导数存在，且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

上述求导公式称为多元复合函数求导数的链式法则.

例 8.21 求函数$z=(2x+y)^{xy}$的偏导数.

解 设$u=2x+y$，$v=xy$，则$z=u^v$，且

$$\frac{\partial z}{\partial u}=vu^{v-1},\ \frac{\partial z}{\partial v}=u^v\ln u,\ \frac{\partial u}{\partial x}=2,\ \frac{\partial u}{\partial y}=1,\ \frac{\partial v}{\partial x}=y,\ \frac{\partial v}{\partial y}=x$$

于是，根据链式法则得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=vu^{v-1}\cdot 2+u^v\ln u\cdot y=2xy\,(2x+y)^{xy-1}+y\,(2x+y)^{xy}\ln(2x+y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=vu^{v-1}+u^v\ln u\cdot x=xy\,(2x+y)^{xy-1}+x\,(2x+y)^{xy}\ln(2x+y)$$

特殊地，如果$z=f(u, v)$，而$u=u(x)$，$v=v(x)$，则z就是x的一元函数

$$z=f[u(x), v(x)]$$

这时，z对x的导数称为全导数，其计算公式是