颜庆津　编著

高等学校研究生教材

数值分析（第3版）

北京航空航天大学出版社

高等学校研究生教材

数值分析

（第3版）

颜庆津 编著

北京航空航天大学出版社

内 容 简 介

本书是为工学硕士研究生数值分析课而编写的学位课教材。内容包括:线性方程组的解法,矩阵特征值与特征向量的计算,非线性方程与非线性方程组的迭代解法,插值与逼近,数值积分,常微分方程初值问题的数值解法和偏微分方程的差分解法。内容丰富,系统性强,语言简练、流畅,数值例子和习题非常丰富,并附习题答案。其深度和广度适合工学硕士生的培养要求。

本书还可供从事科学与工程计算的科技人员自学和参考。

图书在版编目(CIP)数据

数值分析/颜庆津编著. —3版. —北京:北京航空航天大学出版社,2006.7

ISBN 7-81077-877-3

Ⅰ.数… Ⅱ.颜… Ⅲ.数值计算—研究生—教材 Ⅳ.0241

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 050782 号

数值分析(第3版)

颜庆津 编著

责任编辑 宋淑娟

*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路37号(100083) 发行部电话(010)82317024 传真(010)82328026

http://www.buaapress.com.cn E-mail:bhpress@263.net

北京市松源印刷有限公司印装 各地书店经销

*

开本:787×1092 1/16 印张:16.75 字数:429千字

2006年7月第3版 2006年7月第1次印刷 印数:5 000册

ISBN 7-81077-877-3 定价:22.00元

第3版序

本书是工学硕士研究生数值分析课的基本教材，是作者继1992年出版的第1版和2000年出版的修订版之后编著的数值分析第3版。2000年出版的《数值分析(修订版)》经过多所院校六年的教学实践，证明该书确实贯彻了重概念、重方法、重应用、重能力培养的原则，其内容的深度和广度确实符合工学硕士研究生的培养要求，得到了广大使用者的欢迎和肯定。

本书与修订版相比，主要是在教学法上做了较大的改进，体现了几年来使用修订版的一些成功的教学经验；习题也做了相应的调整，并在书的最后增加了全书习题的答案与提示；此外，还改正了修订版中的疏漏之处，使全书的叙述更加严谨。

作　者

2006.4

修订版前言

本书是为工学硕士研究生数值分析课而编写的学位课教材，是在作者1992年编写的《数值分析》(北京航空航天大学出版社，1992.7)的基础上修订而成的。它仍然遵循重概念、重方法、重应用、重能力培养的原则，并针对工学硕士研究生的培养要求，使学生掌握一定的理论深度。

与第1版相比，本书在内容的深度和广度上均做了较大的调整。一方面尽量简化在本科计算方法课中已有的内容，减少重复；另一方面新增加了一些目前在科学技术中需要使用的数值方法及其有关理论，使其更适应当前工学硕士研究生的培养需求。

只须具备工科本科高等数学和线性代数的知识，就能学习本书的内容。如果还掌握了一种计算机程序设计语言，并能上机计算实习，则对本书的内容会有更深刻的体会。讲授本书的全部内容大约需要70学时。学时数少于70的，可对各章内容选择讲授。本书每章都附有习题，使用它作教材的研究生都应以这些习题作为基本练习。

本书出版前，由清华大学数学科学系关治教授审阅了全部书稿，并提出了重要的修改意见，对此深表感谢。

作　者

1999.6

目　　录

第 1 章　绪　论

第 2 章　线性方程组的解法

第 3 章　矩阵特征值与特征向量的计算

第1章 绪 论

1.1 数值分析的研究对象

现代科学技术问题的研究方法可分为三种:理论推导、科学实验和科学计算。这三种方法相辅相成,又相互独立且缺一不可。科学计算就是通过建立数学模型把科学技术问题转化为数学问题,然后对数学问题进行离散化,将其转化为数值问题,最后使用数值计算方法计算出数值问题的解,并把所得的解作为原科学技术问题的解。随着电子计算机的性能不断提高,科学计算在解决现代科学技术问题中所起的作用越来越大,并已渗透到科学技术的各个领域。科学计算的基础——计算数学这个数学分支也随之发展壮大。数值分析是计算数学中最基本的内容。它研究如何用数值计算方法求解各种基本数学问题以及在求解过程中出现的收敛性、数值稳定性和误差估计等问题。数值分析所阐明的各种数值计算方法是从事科学计算的最基本工具。

1.2 误差知识与算法知识

1.2.1 误差的来源与分类

在工程技术的计算中,估计计算结果的精确度是十分重要的工作,而影响精确度的是各种各样的误差。误差按照它们的来源可分为以下四种。

1. 模型误差

反映实际问题有关量之间关系的计算公式,即数学模型,通常只是近似的。由此产生的数学模型的解与实际问题的解之间的误差称为模型误差。

2. 观测误差

数学模型中包含的某些参数(如时间、长度、电压等)往往通过观测而获得。由观测得到的数据与实际的数据之间是有误差的。这种误差称为观测误差。

3. 截断误差

求解数学模型所用的数值计算方法如果是一种近似的方法,那么只能得到数学模型的近似解,由此产生的误差称为截断误差或方法误差。例如,由 Taylor(泰勒)公式,函数 $f(x)$ 可表示为

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1$$

为了简化计算，当$|x|$不大时，去掉上式右端的最后一项，得近似公式

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

此近似公式的误差就是截断误差。

4. 舍入误差

由于计算机的字长有限，参加运算的数据及其运算结果在计算机上存放会产生误差。这种误差称为舍入误差或计算误差。例如，在十位十进制的限制下，会出现

$$1 \div 3 = 0.333\,333\,333\,3$$

$$(1.000\,002)^2 - 1.000\,004 = 0$$

两个结果都不是准确的，后者的准确结果应是4×10^{-12}。这里所产生的误差就是舍入误差。

在数值分析中，主要研究截断误差和舍入误差对计算结果的影响，而一般不考虑模型误差和观测误差。

1.2.2 绝对误差、相对误差与有效数字

设a是准确值x的一个近似值，记

$$e = x - a$$

称e为近似值a的绝对误差，简称误差。如果$|e|$的一个上界已知，记为ε，即

$$|e| \leqslant \varepsilon$$

则称ε为近似值a的绝对误差限或绝对误差界，简称误差限或误差界。

准确值x、近似值a和误差限ε三者的关系就是

$$a - \varepsilon \leqslant x \leqslant a + \varepsilon$$

或记为

$$x = a \pm \varepsilon$$

例如，$a=3.14$作为圆周率π的一个近似值，它的绝对误差是

$$e = \pi - 3.14$$

易知，

$$|e| < 0.002$$

所以，$a=3.14$作为π的近似值，它的一个误差限为

$$\varepsilon = 0.002$$

用绝对误差来刻画近似值的精确程度是有局限性的，因为它没有反映出其本身在原数中所占的比例。

记

$$e_r = \frac{e}{x} = \frac{x-a}{x}$$

称e_r为近似值a的相对误差。由于x未知，实际上总把$\frac{e}{a}$作为a的相对误差，并且也记为

$$e_r = \frac{e}{a} = \frac{x-a}{a}$$

相对误差一般用百分比表示。

$|e_r|$的上界，即

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{|a|}$$

称为近似值 a 的相对误差限或相对误差界。显然有

$$|e_r| \leqslant \varepsilon_r$$

例 1 用最小刻度为毫米的卡尺测量直杆甲和直杆乙，分别读出长度 $a=312$ mm 和 $b=24$ mm，问：$\varepsilon(a)$，$\varepsilon(b)$，$\varepsilon_r(a)$，$\varepsilon_r(b)$各是多少？两直杆实际长度 x 和 y 在什么范围内？

解

$$\varepsilon(a)=\varepsilon(b)=0.5\ \text{mm}$$

$$\varepsilon_r(a) = \frac{\varepsilon(a)}{|a|} = \frac{0.5}{312} \approx 0.16\%$$

$$\varepsilon_r(b) = \frac{\varepsilon(b)}{|b|} = \frac{0.5}{24} \approx 2.08\%$$

$$311.5\ \text{mm} \leqslant x \leqslant 312.5\ \text{mm}$$

$$23.5\ \text{mm} \leqslant y \leqslant 24.5\ \text{mm}$$

例 2 设 $a=-2.18$ 和 $b=2.120\,0$ 是分别由准确值 x 和 y 经过四舍五入而得到的近似值，问：$\varepsilon(a)$，$\varepsilon(b)$，$\varepsilon_r(a)$，$\varepsilon_r(b)$各是多少？

解

$$\varepsilon(a)=0.005, \quad \varepsilon(b)=0.000\,05$$

$$\varepsilon_r(a) = \frac{0.005}{2.18} \approx 0.23\%$$

$$\varepsilon_r(b) = \frac{0.000\,05}{2.120\,0} \approx 0.002\,4\%$$

凡是由准确值经过四舍五入而得到的近似值，其绝对误差限等于该近似值末位的半个单位。

定义 设数 a 是数 x 的近似值。如果 a 的绝对误差限是它的某一位的半个单位，并且从该位到它的第一位非零数字共有 n 位，则称用 a 近似 x 时具有 n 位有效数字。

非零小数 a 总可以写成如下的形式

$$a = \pm\, 0.a_1a_2\cdots a_k \times 10^m$$

其中 m 是整数，$a_i(i=1,2,\cdots,k)$是 0 到 9 中的一个数字，$a_1\neq 0$。如果 a 作为数 x 的近似值，且

$$\varepsilon(a) = \frac{1}{2}\times 10^{m-n}, \quad n \leqslant k$$

则由定义知，a 有 n 位有效数字 $a_1,a_2,\cdots,a_n$。

从有效数字的定义可知，由准确值经过四舍五入得到的近似值，从它的末位数字到第一位非零数字都是有效数字。同一个准确值的不同近似值，有效数字越多，其绝对误差和相对误差都越小。有了有效数字概念之后，下面 2.140 012 的两个近似值 2.14 和 2.140 0 的写法是有区别的。前者有三位有效数字，后者有五位有效数字。

准确值的有效数字可看做有无限多位。

例 3 下列近似值的绝对误差限都是 0.005，

$$a = 1.38, \quad b = -0.031\,2, \quad c = 0.86\times 10^{-4}$$

问：各个近似值有几位有效数字？

解 a 有三位有效数字 1,3,8。b 有一位有效数字 3。c 没有有效数字。

1.2.3 函数求值的误差估计

设 $u=f(x)$ 存在足够高阶的导数,a 是自变量 x 的近似值,则 $\tilde{u}=f(a)$ 是函数值 $u=f(x)$ 的近似值。如果 $f'(a)\neq 0$ 且比值 $|f''(a)|/|f'(a)|$ 不很大,则由 Taylor 公式可得 $\tilde{u}=f(a)$ 的误差估计为

$$e(\tilde{u}) = f(x) - f(a) \approx f'(a)(x-a) = f'(a)e(a)$$

因
$$|e(\tilde{u})| \approx |f'(a)||e(a)| \leqslant |f'(a)|\varepsilon(a)$$

故
$$\varepsilon(\tilde{u}) \approx |f'(a)|\varepsilon(a)$$

如果 $f'(a)=f''(a)=\cdots=f^{(k-1)}(a)=0$,$f^{(k)}(a)\neq 0$,且比值 $|f^{(k-1)}(a)|/|f^{(k)}(a)|$ 不很大,则 $\tilde{u}=f(a)$ 的误差估计为

$$e(\tilde{u}) \approx \frac{f^{(k)}(a)}{k!}[e(a)]^k$$

$$\varepsilon(\tilde{u}) \approx \frac{|f^{(k)}(a)|}{k!}[\varepsilon(a)]^k$$

设 n 元函数 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 充分可微,a_i 是 x_i 的近似值,其中 $i=1,2,\cdots,n$,则 $\tilde{u}=f(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 是函数值 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的近似值。由多元函数 Taylor 公式可得 $\tilde{u}$ 的误差估计为

$$e(\tilde{u}) \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(a_1,a_2,\cdots,a_n)}{\partial x_i} e(a_i)$$

$$\varepsilon(\tilde{u}) \approx \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f(a_1,a_2,\cdots,a_n)}{\partial x_i}\right| \varepsilon(a_i) \tag{1.1}$$

如果 $\left|\frac{\partial f(a_1,a_2,\cdots,a_n)}{\partial x_i}\right|$ 全为零或全都很小,则要使用 Taylor 公式中的高阶项。

由式(1.1)可推出四则运算结果的误差估计。设 a 和 b 分别是准确值 x 和 y 的近似值,则 $a+b$,$a-b$,ab,$a/b(b\neq 0)$ 分别是 $x+y$,$x-y$,xy,x/y 的近似值。根据式(1.1),可得

$$\varepsilon(a\pm b) = \varepsilon(a)+\varepsilon(b)$$

$$\varepsilon(ab) \approx |a|\varepsilon(b)+|b|\varepsilon(a)$$

$$\varepsilon\left(\frac{a}{b}\right) \approx \frac{|a|\varepsilon(b)+|b|\varepsilon(a)}{|b|^2}, \quad b\neq 0$$

$$\varepsilon_r(a+b) = \frac{\varepsilon(a)+\varepsilon(b)}{|a+b|}$$

$$\varepsilon_r(a-b) = \frac{\varepsilon(a)+\varepsilon(b)}{|a-b|}$$

$$\varepsilon_r(ab) \approx \varepsilon_r(a)+\varepsilon_r(b)$$

$$\varepsilon_r\left(\frac{a}{b}\right) \approx \varepsilon_r(a)+\varepsilon_r(b)$$

例 4 设有三个近似数

$$a=2.31, \quad b=1.93, \quad c=2.24$$

它们都有三位有效数字,试计算 $p=a+bc$,$\varepsilon(p)$ 和 $\varepsilon_r(p)$,并问:p 的计算结果能有几位有效数字?

解

$$p=2.31+1.93\times 2.24=6.633\ 2$$

$$\varepsilon(p)=\varepsilon(a)+\varepsilon(bc)\approx$$

$$\varepsilon(a)+|b|\varepsilon(c)+|c|\varepsilon(b)=$$

$$0.005+0.005(1.93+2.24)=0.025\ 85$$

$$\varepsilon_r(p)=\frac{\varepsilon(p)}{|p|}\approx\frac{0.025\ 85}{6.633\ 2}\approx 0.39\%$$

因为 $\varepsilon(p)\approx 0.025\ 85<0.05$，所以 $p=6.633\ 2$ 中能有两位有效数字。

例 5　设 $f(x,y)=\frac{\cos y}{x}$，$x=1.30\pm 0.005$，$y=0.871\pm 0.000\ 5$。如果用 $\tilde{u}=f(1.30,0.871)$ 作为 $f(x,y)$ 的近似值，则 $\tilde{u}$ 能有几位有效数字？

解

$$\tilde{u}=\frac{\cos 0.871}{1.30}\approx 0.495\ 43$$

由于

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{\cos y}{x^2},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{\sin y}{x}$$

所以

$$\varepsilon(\tilde{u})\approx\left|\frac{\cos 0.871}{1.30^2}\right|\times 0.005+\left|\frac{\sin 0.871}{1.30}\right|\times 0.000\ 5\approx 0.002\ 2<0.005$$

因而 $\tilde{u}=0.495\ 43$ 能有两位有效数字。

1.2.4　算法及其计算复杂性

用数值计算方法求解数值问题是通过具体的算法实现的。所谓算法就是规定了怎样从输入数据计算出数值问题解的一个有限的基本运算序列。其中，基本运算是指四则运算、逻辑运算和一些基本函数运算。衡量算法的优劣有两个标准：其一是要有可靠的理论基础，包括正确性、收敛性、数值稳定性以及可作误差分析；其二是要有良好的计算复杂性。

算法的计算复杂性是指在达到给定精度时该算法所需的计算量和所占的内存空间。前者称为时间复杂性，后者称为空间复杂性。在同一精度要求下，算法所需的计算量少，称为时间复杂性好；所占的内存空间少，称为空间复杂性好。例如，计算多项式

$$p(x)=\sum_{j=0}^{n}a_jx^j$$

的值，输入数据为 $a_j(j=0,1,\cdots,n)$ 和 x，输出数据为 $p(x)$ 值。

算法一

$$\begin{cases}s_0=a_0\\ s_k=a_kx^k\quad(k=1,2,\cdots,n)\\ p(x)=s_0+s_1+\cdots+s_n\end{cases}$$

算法二（秦九韶法）

$$\begin{cases}T_n=a_n\\ T_k=xT_{k+1}+a_k\quad(k=n-1,n-2,\cdots,1,0)\\ p(x)=T_0\end{cases}$$

算法一所需的乘法次数为 $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$，加法次数为 n；算法二所需的乘法次

数和加法次数都是 n。两种算法所占的内存空间基本相同。可见，算法二的计算复杂性优于算法一。算法二是公元 1247 年我国古代数学家秦九韶在世界上首次提出的。

算法通常是在计算机上执行的，而计算机存储数据的字长有限，因而产生舍入误差。为了减少舍入误差的影响，设计算法时应遵循以下一些原则：

(1) 要有数值稳定性，即能控制舍入误差的传播。例如，要在四位十进制的限制下计算积分

$$y_n=\int_0^1 \frac{x^n}{x+5}\mathrm{d}x \quad (n=0,1,\cdots,100)$$

利用关系式 $y_n+5y_{n-1}=\dfrac{1}{n}$，可得出如下的算法：

$$\begin{cases} y_0=\ln 6-\ln 5\approx 0.1823 \\ y_n=\dfrac{1}{n}-5y_{n-1} \quad (n=1,2,\cdots,100) \end{cases}$$

这个算法显然不具有数值稳定性，因为 $y_0\approx 0.1823$ 的舍入误差传给 y_1 时，就增至 5 倍，传到 y_{100} 时将是 5^{100} 倍。现利用估计式

$$\frac{1}{6(n+1)}<y_n<\frac{1}{5(n+1)}$$

并取 $y_{100}\approx\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{606}+\dfrac{1}{505}\right)\approx 0.001815$，得出另一算法

$$\begin{cases} y_{100}\approx 0.001815 \\ y_{n-1}=\dfrac{1}{5n}-\dfrac{1}{5}y_n \quad (n=100,99,\cdots,1) \end{cases}$$

这个算法就具有数值稳定性。

(2) 两数相加要防止较小的数加不到较大的数中所引起的严重后果。较小的数加不到较大的数中有时是允许的，但有时会产生严重的后果。例如，在十位十进制的限制下求解一元二次方程

$$x^2+10^4x-0.01=0$$

并且使用求根公式

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

这时，按照加法运算的对阶规则，应有

$$b^2-4ac=10^8+0.04=0.1\times 10^9+0.00000000004\times 10^9$$

由于是在十位十进制的限制下进行运算，所以，上式中的 0.00000000004×10^9 被当做是 0，因而

$$b^2-4ac=0.1\times 10^9=10^8$$

于是，得到

$$x_1=0,\quad x_2=-10^4$$

所求得的根中，$x_2=-10^4$ 是合理的，可接受的；但 $x_1=0$ 是不可接受的，其后果是严重的。为了避免后一种情况的出现，计算 x_1 时，可利用关系式

$$x_1x_2=-0.01$$

由此得

$$x_1 = -\frac{0.01}{-10^4} = 10^{-6}$$

(3) 要尽量避免两个相近的近似值相减，以免严重损失有效数字。例如，$x=1.232$，$y=1.231$是两个准确值。现要在四位十进制的限制下计算 $z=x^3-y^3$ 的值。一种算法是按给出的式子直接计算，得

$$z = 1.232^3 - 1.231^3 \approx 1.870 - 1.865 = 0.005$$

所得结果最多有一位有效数字，原因是出现了 1.870 和 1.865 这两个相近的近似值相减。另外一种算法是

$$z = x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2) \approx$$
$$0.001 \times (1.518 + 1.517 + 1.515) = 0.004\ 550$$

其中 0.001 是准确值，因而

$$\varepsilon(z) = 0.001 \times (0.000\ 5 + 0.000\ 5 + 0.000\ 5) =$$
$$0.000\ 001\ 5 < 0.000\ 005$$

由此可知，$z\approx 0.004\ 550$ 至少有三位有效数字。

(4) 除法运算中，要尽量避免除数的绝对值远远小于被除数的绝对值。当 a,b 中有近似值时，由

$$\varepsilon\left(\frac{a}{b}\right) \approx \frac{|a|\varepsilon(b) + |b|\varepsilon(a)}{|b|^2}, \quad b \neq 0$$

可知，如果$|b| \ll |a|$，则 $\varepsilon\left(\frac{a}{b}\right)$可能很大。当 a,b 都是准确值时，由于$\left|\frac{a}{b}\right|$很大，会使其他较小的数加不到$\frac{a}{b}$中而引起严重后果。

1.3　向量范数与矩阵范数

1.3.1　向量范数

向量范数是用于定义向量大小的量，又称为向量的模。

定义　定义在 $\mathbf{R}^n$ 上的实值函数 $\|\cdot\|$ 称为向量范数，如果对于 $\mathbf{R}^n$ 中的任意向量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$，它满足

(1) 正定性：$\|\boldsymbol{x}\| \geqslant 0$，当且仅当 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 时，$\|\boldsymbol{x}\|=0$；

(2) 齐次性：对任一数 $k\in\mathbf{R}$，有 $\|k\boldsymbol{x}\| = |k|\,\|\boldsymbol{x}\|$；

(3) 成立三角不等式：$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \leqslant \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$。

定理 1.1　对 $\mathbf{R}^n$ 中的任一向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，记

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

$$\|\boldsymbol{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

$$\|x\|_{\infty}=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|$$

则$\|\cdot\|_1$，$\|\cdot\|_2$和$\|\cdot\|_{\infty}$都是向量范数。

证 只证$\|\cdot\|_2$是向量范数，其余两个留给读者自己证明。

$\|\cdot\|_2$满足定义中的条件(1)是显然的。对任一数$k\in\mathbf{R}$，有

$$\|kx\|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(kx_i)^2}=\sqrt{k^2\sum_{i=1}^{n}x_i^2}=|k|\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}=|k|\ \|x\|_2$$

因此，$\|\cdot\|_2$满足定义中的条件(2)。由$\|x\|_2$的含义，可用内积表示$\|x\|_2$，即

$$\|x\|_2=\sqrt{x^{\mathrm{T}}x}$$

任取向量$y\in\mathbf{R}^n$，则有

$$\|x+y\|_2^2=(x+y)^{\mathrm{T}}(x+y)=\|x\|_2^2+2x^{\mathrm{T}}y+\|y\|_2^2$$

根据Cauchy－Schwarz(柯西-施瓦兹)不等式

$$(x^{\mathrm{T}}y)^2\leqslant(x^{\mathrm{T}}x)(y^{\mathrm{T}}y)$$

可知

$$\|x+y\|_2^2\leqslant\|x\|_2^2+2\|x\|_2\|y\|_2+\|y\|_2^2=(\|x\|_2+\|y\|_2)^2$$

因而$\|\cdot\|_2$满足定义中的条件(3)。

证毕。

称$\|\cdot\|_1$为1-范数或列范数；称$\|\cdot\|_2$为2-范数或Euclid(欧几里得)范数，$\|x\|_2$实际上就是n维向量空间中向量x的欧氏长度；称$\|\cdot\|_{\infty}$为∞-范数或行范数。其实，它们都是p-范数

$$\|x\|_p=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

的特例，其中，正整数$p\geqslant1$，并且有$\lim\limits_{p\to\infty}\|x\|_p=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|$。

在空间$\mathbf{R}^n$中可以引进各种向量范数，它们都满足下述向量范数等价定理。

定理1.2 设$\|\cdot\|_{\alpha}$，$\|\cdot\|_{\beta}$是$\mathbf{R}^n$上的任意两种向量范数，则存在与向量x无关的常数m和$M(0<m<M)$，使下列关系成立

$$m\|x\|_{\alpha}\leqslant\|x\|_{\beta}\leqslant M\|x\|_{\alpha},\quad\forall x\in\mathbf{R}^n$$

(证明从略)

定理1.2的意义在于，向量x的某一种范数可以任意小(大)时，该向量的其他任何一种范数也会任意小(大)。

当不需要指明使用哪一种向量范数时，就用记号$\|\cdot\|$泛指任何一种向量范数。

1.3.2 矩阵范数

矩阵范数是用于定义矩阵“大小”的量，又称为矩阵的模。

定义 定义在$\mathbf{R}^{n\times n}$上的实值函数$\|\cdot\|$称为矩阵范数，如果对于$\mathbf{R}^{n\times n}$中的任意矩阵A和B，它满足

(1) $\|A\|\geqslant0$，当且仅当$A=O$时，$\|A\|=0$；

(2) 对任一数$k\in\mathbf{R}$，有$\|kA\|=|k|\ \|A\|$；

(3) $\|A+B\|\leqslant\|A\|+\|B\|$；