新版

第三册

九年级

阶梯训练

JIETIXUNLIAN

SHUXUEJINGSAI

数学竞赛

浙江教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学竞赛阶梯训练．第3册．九年级／王而冶，许芬英主编．—2版．—杭州：浙江教育出版社，1999.1（2006.6重印）

ISBN 7-5338-3229-9

Ⅰ．数… Ⅱ．①王… ②许… Ⅲ．数学课-初中-教学参考资料 Ⅳ．G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第21391号

数学竞赛阶梯训练 第三册

浙江省教育学会中学数学教学分会 编

出版发行 浙江教育出版社
(杭州市天目山路40号 邮编:310013)
责任编辑 金馥菊
装帧设计 韩 波
责任校对 陈云霞
责任出版 程居洪
图文制作 杭州富春电子印务有限公司
印刷装订 金华市南方彩印厂

开 本 787×960 1/16
印 张 8.25
字 数 165 000
版 次 2002年10月第2版
印 次 2006年6月第8次
印 数 15 001-20 120
书 号 ISBN 7-5338-3229-9/G·3207
定 价 8.50元

联系电话 0571-85170300-80928
e-mail：zjjy@zjcb.com
网址：www.zjeph.com

前言

QIANYAN

义务教育数学课程改革的基本理念之一是基础性、普及性和发展性，使数学教育面向全体学生，实现人人学有价值的数学；人人都能获得必需的数学；不同的人在数学上得到不同的发展。由中国教育学会数学专业委员会组织的“全国初中数学竞赛”正是为激发学生学习数学的兴趣，培养数学优秀人才，使有数学爱好的学生在数学上获得更好的发展服务的。

新课程实施后，全国初中数学竞赛命题的范围以《数学课程标准(7～9 年级)》的内容、要求为基本依据，着重考查学生对数学知识的理解和应用数学知识的能力。因此这一群众性的数学竞赛活动越来越多地受到广大数学爱好者的欢迎，有越来越多的学校和师生加入到竞赛行列，迫切需要一套依据课程标准，源于教科书又高于教科书，以教科书内容、要求为起点，逐步上升到中考、竞赛高度的辅教、辅学用书。为此我会组织了我省有丰富竞赛辅导经验的特级和高级教师，在回顾总结中考、竞赛辅导经验的基础上编写了本套丛书。

本丛书共四册，前三册依次与各套课程标准实验教科书的七年级、八年级和九年级的内容基本同步，第四册设若干专题，着重培养学生的数学综合运用能力。

本丛书涵盖《数学课程标准(7～9 年级)》的全部内容，并且根据各套课程标准实验教科书课程内容呈现先后顺序的共性，分章编写，每章分若干节，设有[温故知新][点石成金][独立尝试][数学活动][挑战自我][史海泛舟]六个栏目。[温故知新]主要回顾本节内容的知识要点，重要的公式、公理、定理、方法等；[点石成金]突出解题思路探求和解题方法的点拨；[独立尝试]给出两个典型问题，由学生尝试解答；[数学活动]重在数学阅读、数学探究、数学实践等；[挑战自我]分层要求，题量适中，紧扣课程标准内容和竞赛要求；[史海泛舟]提供数学竞赛史上的趣题、巧解、轶事、趣闻等。

本套丛书编委为(以姓氏笔画为序):王而冶、叶坚、边学平、许芬英、过伯祥、吴明华、李昌官、沃苏青、周伟扬、周道生、施储、胡兴余、倪金根、黄新民。

本套丛书由许芬英、黄新民、边学平、寿志德、白洪智设计。第三册第一章由寿德编写,第二章由吕海国编写,第三章由寿志德编写,第四章由陈琦编写,第五章由施治斌编写,第六章由白洪智编写,第七章由龚大方编写,第八章由王临军编写。竞赛模拟试卷一、二、三、四、五分别由寿志德、吕海国、黄新民、王临军和陈琦提供。全书由寿志德、许芬英统稿。

本套丛书凝聚着我省教师指导初中数学竞赛辅导的精华,希望能为广大师生提供有益的参考,并恳请读者在使用过程中多提宝贵意见,使之更臻完美。

本次印刷时,对个别差错作了校正。

浙江省教育学会中学数学教学分会

2006 年 6 月

目　录

第一章　二次函数

二次函数在中学数学中的地位十分重要，它通过数形结合帮助我们正确理解二次函数与一元二次方程、不等式之间的关系. 二次函数是中考和初中数学竞赛考查的热点内容之一.

第一节　二次函数的基本性质

温故知新

形如 $y=ax^2+bx+c\quad(a\neq0)$ 的函数称为二次函数. 二次函数在平面直角坐标系中的图象是抛物线. 求二次函数解析式一般有三种方式：(1) 已知函数图象上三点坐标，求函数解析式；(2) 已知函数图象顶点坐标和另一点坐标，求函数解析式；(3) 已知函数图象与 x 轴两个交点坐标和另一点坐标，求函数解析式.

基本性质

二次函数 $y=ax^2+bx+c\quad(a\neq0)$ 的图象的对称轴是直线 $x=-\dfrac{b}{2a}$，顶点坐标是 $\left(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$.

当 $a>0$ 时，二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 在 $x<-\dfrac{b}{2a}$ 时，y 值随 x 值增大而减小；在 $x>-\dfrac{b}{2a}$ 时，y 值随 x 值增大而增大，且当 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 时，函数有最小值 $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$.

当 $a<0$ 时，二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 在 $x<-\dfrac{b}{2a}$ 时，y 值随 x 值增大而增大；在 $x>-\dfrac{b}{2a}$ 时，y 值随 x 值增大而减小，且当 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 时，函数有最大值 $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$.

二次函数 $y=ax^2+bx+c\quad(a\neq0)$ 的图象与 x 轴的交点情况取决于 $\Delta=b^2-4ac$ 的值的正负. 当 $\Delta>0$ 时，有两个交点；当 $\Delta=0$ 时，有一个交点；当 $\Delta<0$ 时，没有交点.

点石成金

例 1　如图 1-1，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的对称轴是直线 $x=-1$，试判断 b^2-4ac，$a-b+c$，$a+b+c$，$2a-b$，$3a-b$，abc 中，哪些是负数？

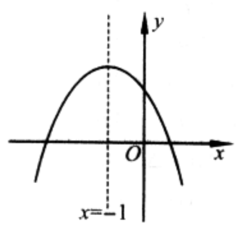


图 1-1

分析 根据图象特征，结合二次函数有关性质来判定所给代数式的正负.

解 由图 1－1 知，抛物线与 x 轴有两个交点，故 $\Delta=b^2-4ac>0$.

当 $x=-1$ 时，$y=a-b+c>0$.

当 $x=1$ 时，$y=a+b+c<0$.

由图象开口向下知，$a<0$.

由 $-\dfrac{b}{2a}=-1$，得 $b=2a<0$，

$\therefore\ 2a-b=0,3a-b=a<0$.

又当 $x=0$ 时，$y=c>0$，

故 $abc>0$.

所以，给定的代数式中，$a+b+c,3a-b$ 是负数.

评注 解决此类问题，利用图象信息特征是关键.

例 2 设 p 是实数，二次函数 $y=x^2-2px-p$ 的图象与 x 轴有两个不同的交点 $A(x_1,0),B(x_2,0)$.

(1) 求证：$2px_1+x_2^2+3p>0$；

(2) 若 $AB\leqslant|2p-3|$，求 p 的最大值.

分析 抛物线与 x 轴交点问题应考虑 Δ，并且对 x_2^2 进行降次变换.

解 (1) 由题意得 $\Delta=4p^2+4p>0$.

$\because\ x_2^2-2px_2-p=0$，

$\therefore\ x_2^2=2px_2+p$.

$\therefore\ 2px_1+x_2^2+3p$

$=2p(x_1+x_2)+4p$

$=4p^2+4p=\Delta>0$.

(2) $\because\ AB=|x_1-x_2|$

$=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{4p^2+4p}$，

$\therefore\ \sqrt{4p^2+4p}\leqslant|2p-3|$.

两边平方，得 $4p^2+4p\leqslant4p^2-12p+9$.

$\therefore\ p\leqslant\dfrac{9}{16}$.

当 $p=\dfrac{9}{16}$ 时满足题意，故 p 的最大值为 $\dfrac{9}{16}$.

评注 利用韦达定理进行整体代换消去某些字母是解决此类问题的关键.

独立尝试

1. 已知二次函数 $y=x^2-(p-4)x-3p$.

(1) 说明这个函数的图象与 x 轴的交点情况；

(2) 如果这个函数的图象与 x 轴有两个交点，分别为 $(x_1,0),(x_2,0)$，则当 p 取何值时，$x_1^2+x_2^2$ 的值最小？最小值为多少？

2. 非零实数 a,b,c 满足 $\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}}=\left|\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right|$，则抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 必经过一个与 a,b,c 取值无关的定点，求此定点坐标.

数学活动

二次函数的图象通过点 $(1,0),(5,0)$，但不通过直线 $y=2x$ 上方的点. 设其顶点纵坐标的最大值为 p，最小值为 q，求 pq 的值.

挑战自我

复习巩固

1. 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的顶点为 $(2,-3)$，且经过点 $(1,-1)$，则 $a+b+c$ 的值为________.
2. 抛物线 $y=x^2-4x+m-2$ 与 x 轴交于点 $(p,0)$，$(q,0)$，与 y 轴交于点 $(0,-3)$，则 $(p-2)(q-2)$ 的值为______.
3. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$. 当 x 取 x_1，x_2 $(x_1\neq x_2)$ 时，函数值相等. 当 x 取 x_1+x_2 时，函数值为________(用含 a,b,c 的代数式表示).
4. 设 a,b,c 是 $\triangle ABC$ 的三边长，二次函数 $y=(a+b)x^2+2cx-a+b$ 在 $x=-\frac{1}{2}$ 时，取得最小值 $-\frac{a}{2}$，则 $\triangle ABC$ 三内角度数为________.
5. 设点 A，B 是抛物线 $y=-3x^2-2x+m$ 与 x 轴的两个不同交点，C 为抛物线顶点. 当 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形时，求 m 的值.
6. 已知 a,b,c 为 $\triangle ABC$ 的三边，且 $a=b$. 若二次函数 $y=(b+c)x^2-2ax+c-b$ 与 x 轴只有一个交点，求这个交点坐标.

综合提高

7. 已知二次函数 $y=x^2-(m-3)x-m$ 的图象与 x 轴的两个交点中至少有一个不在 x 正半轴，求实数 m 的取值范围.
8. 当 $|x+1|\leqslant 6$ 时，求函数 $y=x|x|-2x+1$ 的最大值.
9. 已知 a,b 为抛物线 $y=(x-c)(x-c-d)-2$ 与 x 轴交点的横坐标，化简 $|a-c|+|c-b|$.
10. m 为实数，若抛物线 $y=x^2-2mx+m^2-m+1$ 与 x 轴有交点，求与原点最近的交点坐标.

探究拓展

11. 若 x,y 都是实数，$p=x^2+xy+y^2-3x-3y$，求 p 的最小值.
12. 若抛物线 $y=-x^2+2ax+b$ 的顶点在直线 $y=mx-2m+1$ 上移动，且与抛物线 $y=x^2$ 有公共点，求 m 的取值范围.

解答提示

独立尝试

1. 提示：(1) $\Delta=(p+2)^2+12>0$，抛物线与 x 轴有两个交点.

   (2) $x_1+x_2=p-4$，$x_1x_2=-3p$，$x_1^2+x_2^2$
   $=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(p-4)^2+6p$
   $=(p-1)^2+15$. 由(1) p 可取任何实数，故当 $p=1$ 时，$x_1^2+x_2^2$ 的值最小，最小值为 15.

2. 提示：对 $\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}=\left|\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right|$ 两边平方并化简，得 $a+b+c=0$. 故当 $x=1$ 时，$y=a+b+c=0$. 所以抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 过定点 $(1,0)$.

数学沙龙

提示：由题意设二次函数的解析式为 $y=a(x-1)(x-5)$，图象不通过直线 $y=2x$ 上方，则抛物线开口向下，且与直线 $y=2x$ 最多只有一个交点，所以 $a<0$，且方程组 $\begin{cases} y=a(x-1)(x-5), \\ y=2x \end{cases}$ 的 $\Delta\leqslant 0$，整理得 $ax^2-2(3a+1)x+5a=0$，$\Delta=4a^2+6a+1\leqslant 0$. 设方程 $4a^2+6a+1=0$ 两根为 a_1,a_2 $(a_1<a_2)$，则 $4a^2+6a+1\leqslant 0$ 的解集为 $a_1\leqslant a\leqslant a_2$. 而 $a_1a_2=\frac{1}{4}$，又 $y=a(x-1)(x-5)=a(x-3)^2-4a$，顶点的纵坐标为 $-4a$，故 $p=-4a_1$，$q=-4a_2$，所以 $pq=16a_1a_2=4$.

挑战自我

1. $a+b+c=-1$.
2. 提示：由题意 $m-2=-3$，
   $\therefore\ y=x^2-4x-3, p+q=4, pq=-3$.
   $\therefore\ (p-2)(q-2)=pq-2(p+q)+4=-7$.
3. 提示：由题意，得 $a(x_2^2-x_1^2)+b(x_2-x_1)=0$，
   即 $a(x_1+x_2)(x_2-x_1)+b(x_2-x_1)=0$.
   而 $x_2-x_1\neq 0$，故 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$. $\therefore$ 当 $x=x_1+x_2$ 时，$y=a\left(-\frac{b}{a}\right)^2+b\left(-\frac{b}{a}\right)+c=c$.
4. $60°, 60°, 60°$.
5. 提示：$AB=|x_2-x_1|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{2\sqrt{3m+1}}{3}$. 过点 C 作 $CD\perp x$ 轴于点 D，且抛物线开口向下，顶点在 x 轴上方，则 $CD=\frac{3m+1}{3}$. 由题意得 $CD=\frac{1}{2}AB$，即 $\frac{3m+1}{3}=\frac{\sqrt{3m+1}}{3}$，解得 $m=-\frac{1}{3}$，或 $m=0$. 经检验当 $m=-\frac{1}{3}$ 时，$\Delta=0$ 与题意不符；当 $m=0$ 时，$\Delta>0$. 所以 $m=0$.
6. 提示：由 $\Delta=0$，得 $a^2+b^2=c^2$，且 $a=b$，
   $\therefore\ \triangle ABC$ 为等腰直角三角形，且 $c=\sqrt{2}a$，
   故 $y=(\sqrt{2}+1)ax^2-2ax+(\sqrt{2}-1)a$.
   当 $y=0$ 时，$(\sqrt{2}+1)x^2-2x+\sqrt{2}-1=0$，
   得 $x=\sqrt{2}-1$. 所以交点坐标为 $(\sqrt{2}-1,0)$.
7. 提示：$\Delta=(m-1)^2+8>0$，故抛物线与 x 轴必有两个交点. 设交点为 $(x_1,0)$，$(x_2,0)$. $x_1+x_2=m-3$，$x_1x_2=-m$. 当 $m>0$ 时，$x_1x_2=-m<0$，x_1,x_2 一正一负，即有一个交点不在正 x 轴上；当 $m\leqslant 0$ 时，$x_1x_2=-m\geqslant 0$，但 $x_1+x_2=m-3<0$，此时，x_1,x_2 均为非正数，满足至少一个交点不在正 x 轴上. 所以，满足条件的 m 为一切实数.
8. 提示：由 $|x+1|\leqslant 6$，解得 $-7\leqslant x\leqslant 5$. 当 $0<x\leqslant 5$ 时，$y=x^2-2x+1=(x-1)^2$，此时 $y_{最大值}=(5-1)^2=16$；当 $-7\leqslant x\leqslant 0$ 时，$y=-x^2-2x+1=-(x+1)^2+2$，此时 $y_{最大值}=2$. 所以 $y_{最大值}=16$.
9. 提示：当 $x=c$ 时，$y=-2$，即点 $(c,-2)$ 在抛物线上且位于 x 轴下方. 又抛物线 $y=(x-c)(x-c-d)-2$ 开口向上，由图象可知，$a<c<b$，或 $b<c<a$，$\therefore\ |a-c|+|c-b|=a-b$ 或 $b-a$.
10. 提示：$\Delta=4m^2-4(m^2-m+1)\geqslant 0$，得 $m\geqslant 1$.
    抛物线与 x 轴的交点为 $(m+\sqrt{m-1},0)$，$(m-\sqrt{m-1},0)$. 当 $m=1$ 时，两点为同一点.
    显然当 $m\geqslant 1$ 时，$m+\sqrt{m-1}\geqslant m-\sqrt{m-1}>0$，所以与原点最近的交点为 $(m-\sqrt{m-1},0)$.
    而 $m-\sqrt{m-1}=(\sqrt{m-1})^2-\sqrt{m-1}+1=\left(\sqrt{m-1}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$，当 $\sqrt{m-1}-\frac{1}{2}=0$，即 $m=\frac{5}{4}$ 时，$m-\sqrt{m-1}$ 的最小值为 $\frac{3}{4}$. 所以，抛物线与 x 轴交点中离原点最近的点的坐标为 $\left(\frac{3}{4},0\right)$.

11. 提示：整理得 $x^2+(y-3)x+y^2-3y-p=0$，由 x 是实数，得 $\Delta=(y-3)^2-4(y^2-3y-p)\geqslant 0$，即 $3y^2-6y-4p-9\leqslant 0$. 令 $f(y)=3y^2-6y-4p-9$. 此抛物线开口向上，若要满足 $f(y)\leqslant 0$，则需 $\Delta'=(-6)^2-12(-4p-9)\geqslant 0$，得 $p\geqslant -3$，且当 $p=-3$ 时，存在实数 x,y. 所以 p 的最小值是 -3.

12. 提示：抛物线 $y=-x^2+2ax+b$ 的顶点为 (a,a^2+b). 由题意得 $a^2+b=ma-2m+1$，则 $b=-a^2+ma-2m+1$，即 $y=-x^2+2ax-a^2+ma-2m+1$. 它与抛物线 $y=x^2$ 有公共点，即方程 $x^2=-x^2+2ax-a^2+ma-2m+1$ 有实根，整理得 $2x^2-2ax+a^2-ma+2m-1=0$，$\Delta=(-2a)^2-8(a^2-ma+2m-1)\geqslant 0$，即 $a^2-2ma+4m-2\leqslant 0$. 令 $f(a)=a^2-2ma+4m-2$. 此抛物线开口向下，若要满足 $f(a)\leqslant 0$，则需 $\Delta'=4m^2-4(4m-2)\geqslant 0$，即 $m^2-4m+2\leqslant 0$. 解得 $m\leqslant 2-\sqrt{2}$，或 $m\geqslant 2+\sqrt{2}$.

第二节　二次函数的应用

温故知新

生产生活中的许多问题我们可以通过建立二次函数模型来求解. 涉及最值问题时，运用二次函数的性质，选取适当的变量，建立目标函数. 在求解过程中，要注意变量的取值范围.

点石成金

例 1　如图 1－2 是一抛物线形拱桥，正常水位水面宽 AB 为 20 米，水位上升 4 米就达到警戒水位，此时水面宽 CD 为 12 米. 若水到达警戒水位后，一货船需要通过此拱桥，货船宽 6 米，则货船顶部（认为是平面）离水面最多多少米时才能通过此桥？

图 1－2

分析　这是一道函数建模题，需要建立适当的直角坐标系，把实际的量转化为坐标系中的坐标进行计算.

解　如图 1－3，取 CD 的中点为坐标原点 O，CD 所在直线为 x 轴，CD 的中垂线为 y 轴，建立坐标系，则 $A(-10,-4)$，$B(10,-4)$，$C(-6,0)$，$D(6,0)$.

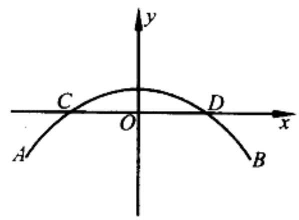


图 1－3

设抛物线的解析式为 $y=a(x+6)(x-6)$.

∵　抛物线过点 A，

∴　$-4=a(-10+6)(-10-6)$，

得 $a=-\dfrac{1}{16}$.

∴　抛物线的解析式为 $y=-\dfrac{1}{16}x^2+\dfrac{9}{4}$.

若货船要通过此桥，由货船宽为 6 米，

得当 $x=\dfrac{1}{2}\times 6=3$ 时，

$$y=-\frac{1}{16}\times 9+\frac{9}{4}=\frac{27}{16}.$$

∴ 货船顶部离水面 CD 最多$\frac{27}{16}$米时才能通过.

评注 选择合适的坐标系,可简化解题过程.如本题选取 CD 所在直线为 x 轴,CD 中垂线为 y 轴.

例 2 如图 1-4,已知抛物线 C_1:$y=-\frac{3}{16}x^2+3$ 交 x 轴于 A,B 两点,交 y 轴于点 P,另一条抛物线 C_2 过点 B,顶点为 $Q(m,n)$,对称轴与 x 轴交于点 D.若以 Q,D,B 为顶点的三角形与以 P,B,O 为顶点的三角形全等,求 m,n 的值.

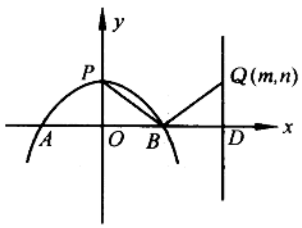


图 1-4

分析 先求出 A,B,P 三点坐标,然后根据全等三角形的性质求解.难点在于分类讨论.

解 由 $-\frac{3}{16}x^3+3=0$,得 $x=\pm 4$,

∴ $A(-4,0)$,$B(4,0)$.

令 $x=0$,得 $y=3$, ∴ 点 $P(0,3)$.

由 $OP=3$,$OB=4$,

得 $PB=\sqrt{OP^2+OB^2}=5$.

(1) 当抛物线 C_2 的对称轴在点 B 右侧时,

①若$\triangle POB\cong\triangle BDQ$,

则 $DB=OP=3$,$DQ=OB=4$,

∴ $D(7,0)$,$Q(7,4)$,

或 $D(7,0)$,$Q(7,-4)$,

故 $m=7$,$n=4$,或 $m=7$,$n=-4$;

②若$\triangle POB\cong\triangle QDB$,

则 $DQ=OP=3$,$BD=BO=4$,

∴ $D(8,0)$,$Q(8,3)$,

或 $D(8,0)$,$Q(8,-3)$,

故 $m=8$,$n=3$,或 $m=8$,$n=-3$.

(2) 当抛物线 C_2 的对称轴在点 B 左侧时,

①若$\triangle POB\cong\triangle QDB$,

则 $DQ=OP=3$,$DB=OB=4$,

∴ $D(0,0)$,$Q(0,3)$,

或 $D(0,0)$,$Q(0,-3)$,

故 $m=0$,$n=3$,或 $m=0$,$n=-3$;

②若$\triangle POB\cong\triangle BDQ$,

则 $DB=OP=3$,$DQ=BO=4$,

∴ $D(1,0)$,$Q(1,4)$,

或 $D(1,0)$,$Q(1,-4)$,

故 $m=1$,$n=4$,或 $m=1$,$n=-4$.

评注 题中的隐含条件没有给出全等的对应点,可有多种情况.

独立尝试

1. 如图 1-5,A,B 是 x 轴上两点,以 AB 为直径的圆交 y 轴于点 C.设过 A,B,C 三点的抛物线解析式为 $y=x^2-mx+n$,且关于 x 的方程 $x^2-mx+n=0$ 两根的倒数和为 -2,求此抛物线的解析式.

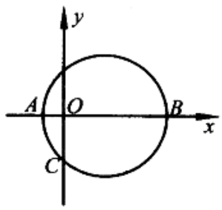


图 1－5

2. 已知二次函数 $y=x^2+ax+a-2$ $(a\neq0)$的顶点为 Q,与 y 轴交于点 C,过点 C 作 x 轴的平行线交抛物线于点 D. 问:$\triangle QCD$ 能否为等边三角形?若能,请求出二次函数的解析式;若不能,请说明理由.

数学活动

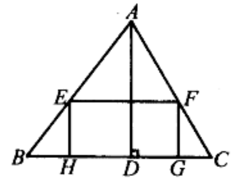
已知抛物线 $y=ax^2+ax-a$ $(a\neq0)$ 与 x 轴交于 A,B 两点,顶点为 P. 当 $\triangle ABP$ 分别为等腰直角三角形、等边三角形时,求对应 a 的值.

挑战自我

复习巩固

1. 抛物线 $y=x^2-2mx+m^2+m+2$ 的顶点在第二象限,则 m 的取值范围是________.

2. 如图,在 $\triangle ABC$ 中,$BC=80$,$AD=60$,点 E,F 分别在 AB,AC 上,点 H,G 在 BC 上,且四边形 $EFGH$ 是矩形. 若要使矩形 $EFGH$ 面积最大,EF 应等于________.



(第 2 题)

3. 根据二次函数 $y=x^2-2x-3$ 的图象,写出不等式 $x^2-2x-3>0$ 的解集为________.

4. 当抛物线 $y=x^2-2mx+4m+5$ 的顶点位置最高时,实数 m 的值为________.

5. 已知 x 为正实数,则函数 $y=x^2-x+\dfrac{1}{x}$ 的最小值为________.

6. 已知 $x+y+z=3$,$x-y+5z=1$. 设 $p=x^2+y^2+z^2$,求 p 的最小值.

综合提高

7. 已知 $x\geqslant0$,$y\geqslant0$,$x+2y=1$,且 $2x+3y^2$ 的最大值为 P,最小值为 Q,则 $P+Q$ 的值为________.

8. 已知 B 船在 A 船的西北方向上,两船相距 $10\sqrt{2}$ km. 若 A 船向西航行,B 船同时向南航行,且 B 船的速度为 A 船速度的 2 倍,求 A,B 两船的最近距离.

9. 已知 $y=x+2+\sqrt{-x^2+10x-21}$,求 y 的最大值和最小值.

10. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$,其中 $a>0$,$b<0$,$b^2-4a^2c^2=0$. 它的图象与 x 轴只有一个交点 A,与 y 轴交于点 B,且 $AB=2$. 过点 A 的直线 $y=x+m$ 与抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 交于另一点

C，在线段 BC 依次截取 D,E 两点．若 $DE^2=BD^2+CE^2$，求$\angle DAE$ 的度数．

探究拓展

11. 已知二次函数 $y=x^2-3x$ 的图象与 x 轴的交点从左至右分别为 A,B．问：在对称轴右边的图象上，是否存在点 M，使锐角三角形 AMB 的面积等于 3？若存在，求出点 M 的坐标；若不存在，说明理由．

12. 已知 a,b,c,m 满足条件$\frac{a}{m+2}+\frac{b}{m+1}+\frac{c}{m}=0$，且 $a\geqslant0,m>0$，求证：方程 $ax^2+bx+c=0$ 必有一根 x_0 满足 $0<x_0<1$．

解答提示

热身尝试

1. 提示：设 $A(x_1,0),B(x_2,0)$，则 $x_1<0,x_2>0$．

$\because$ x_1,x_2 是方程 $x^2-mx+n=0$ 的两根，由韦达定理及已知条件得$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{m}{n}=-2$．由 AB 是圆的直径，$CO\perp AB$，得 $CO^2=OA\cdot OB$，而 $CO=n,OA=-x_1,OB=x_2$，

$\therefore$ $n^2=-x_1x_2=-n$．解得 $n_1=-1,n_2=0$（舍去），$\therefore$ $m=2$，故 $y=x^2-2x-1$．

2. 提示：点 $Q\left(-\frac{a}{2},-\frac{1}{4}a^2+a-2\right)$，$C(0,a-2)$．

因为 $CD/\!/x$ 轴，故 $CD=|-a|$，点 Q 到 CD 的距离为$\left|(a-2)-\left(-\frac{1}{4}a^2+a-2\right)\right|=\frac{1}{4}a^2$．

过点 Q 作 $QP\perp CD$ 于点 P．若要使$\triangle QCD$ 为等边三角形，则需 $QP=\frac{\sqrt{3}}{2}CD$，即 $\frac{1}{4}a^2=\frac{\sqrt{3}}{2}|-a|$，得 $a=\pm2\sqrt{3}$，所以$\triangle QCD$ 可以是等边三角形，此时相应的二次函数为 $y=x^2+2\sqrt{3}x+2\sqrt{3}-2$，或 $y=x^2-2\sqrt{3}x-2\sqrt{3}-2$．

数学游戏

提示：$AB=\frac{\sqrt{a^2+4a^2}}{|a|}=\sqrt{5}$，$P\left(-\frac{1}{2},-\frac{5}{4}a\right)$．

过点 P 作 $PQ\perp x$ 轴于点 Q，则 $PQ=\left|-\frac{5}{4}a\right|=\frac{5}{4}|a|$，$AQ=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\sqrt{5}$．若$\triangle ABP$ 为等腰直角三角形，$PQ=\frac{1}{2}AB=AQ$，即$\frac{5}{4}|a|=\frac{\sqrt{5}}{2}$，

$\therefore$ $a=\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$；若$\triangle ABP$ 为等边三角形，$PQ=\sqrt{3}AQ$，即$\frac{5}{4}|a|=\frac{\sqrt{15}}{2}$，$\therefore$ $a=\pm\frac{2}{5}\sqrt{15}$．

挑战自我

1. $-2<m<0$．　2. 40．

3. $x<-1$，或 $x>3$．

4. 提示：抛物线顶点为$(m,-m^2+4m+5)$．设 $p=-m^2+4m+5$．若要使顶点位置最高，p 值最大，而当 $m=-\frac{4}{2\times(-1)}=2$ 时，p 最大．

$\therefore$ 当 $m=2$ 时，抛物线顶点位置最高．

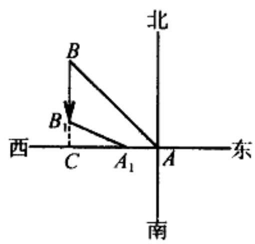
5. 提示：$y=(x-1)^2+\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2+1$，故当 $x=1$ 时，$(x-1)^2$ 与 $\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$ 同时取最小值 0，因此，y 的最小值为 1．

6. 提示：$x=2-3z$，$y=1+2z$，$p=(2-3z)^2+(1+2z)^2+z^2=14z^2-8z+5$，故当 $z=-\frac{-8}{2\times14}=\frac{2}{7}$时，$p_{最小值}=\frac{4\times14\times5-(-8)^2}{4\times14}$

$=\frac{27}{7}$.

7. 提示：令 $z=2x+3y^2$，则 $z=3y^2-4y+2=3\left(y-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}$. 由 $y\geqslant0$ 及 $x=1-2y\geqslant0$，得 $0\leqslant y\leqslant\frac{1}{2}$. 当 $y=\frac{2}{3}$时，z 取最小值，故在 $0\leqslant y\leqslant\frac{1}{2}$上 z 单调递减. 因此当 $y=0$ 时，$z=2$ 为 $2x+3y^2$ 的最大值. 当 $y=\frac{1}{2}$时，$z=\frac{3}{4}$为 $2x+3y^2$的最小值，即 $P=2,Q=\frac{3}{4},P+Q=\frac{11}{4}$.

8. 提示：如图，设经过 t 小时后，A 船、B 船分别航行到 A_1，B_1 处. 设 $AA_1=x$，则 $BB_1=2x$. $AB=10\sqrt{2}$，得 $AC=BC=10$， ∴ $A_1C=|10-x|$，$B_1C=|10-2x|$，于是 $A_1B_1=\sqrt{A_1C^2+B_1C^2}=\sqrt{5(x-6)^2+20}$，故 A_1B_1 的最小值为 $2\sqrt{5}$.



（第 8 题）

9. 提示：由 $-x^2+10x-21\geqslant0$，得 $3\leqslant x\leqslant7$. 将 $y-x-2=\sqrt{-x^2+10x-21}$两边平方，得

$2x^2-(6+2y)x+y^2-4y+25=0$，

∴ $\begin{cases}\Delta=(6+2y)^2-8(y^2-4y+25)\geqslant0,\\ y\geqslant x+2\geqslant5.\end{cases}$

解得 $5\leqslant y\leqslant7+2\sqrt{2}$. ∴ $y_{最大值}=7+2\sqrt{2}$，此时 $x=5+\sqrt{2}$，满足 $3\leqslant x\leqslant7$. $y_{最小值}=5$，此时 $x=3$，满足 $3\leqslant x\leqslant7$.

10. 提示：由 $\Delta=b^2-4ac=0$ 和 $b^2-4a^2c^2=0$，得 $ac=1$，或 $ac=0$（舍去）， ∴ $b^2=4$. 由 $b<0$，得 $b=-2$. 由 $AB=2$，解得 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x^2-2x+\sqrt{2}$， ∴ $A(\sqrt{2},0)$，$B(0,\sqrt{2})$. 又直线 $y=x+m$过点 $A(\sqrt{2},0)$， ∴ $m=-\sqrt{2}$，

∴ 直线 $y=x-\sqrt{2}$.

由$\begin{cases}y=x-\sqrt{2},\\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}x^2-2x+\sqrt{2},\end{cases}$解得$\begin{cases}x=2\sqrt{2},\\ y=\sqrt{2}.\end{cases}$

∴ 点 $C(2\sqrt{2},\sqrt{2})$. 过点 C 作 $CF\perp x$ 轴于点 F. 由 A,B,C 三点坐标可知四边形 $BOFC$ 为矩形，且 $AB=AC$，$\angle BAC=90°$. 在 CF 上截取 $CM=BD$，连结 EM，AM，在 Rt$\triangle ECM$ 中，$EC^2+CM^2=EM^2$. 由已知 $EC^2+BD^2=DE^2$，∴ $EM=DE$. 又$\angle ABD=\angle ACM=45°$，∴ $\triangle ABD\cong\triangle ACM$. 由 $\angle BAC=90°$，得 $\angle DAM=90°$， ∴ $\angle DAE=\angle MAE=\frac{1}{2}\angle DAM=45°$.

11. 提示：$A(0,0)$，$B(3,0)$. 假设点 M 存在，设为 $M(a,b)$. 画出图象可知，当$\triangle AMB$ 为锐角三角形时，$\frac{3}{2}<a<3,b<0$，故有 $S_{\triangle AMB}=\frac{1}{2}AB\cdot(-b)=3$， ∴ $b=-2$， ∴ $a=1$ 或 2. 由点 M 在对称轴右侧，得 $a=2$， ∴ 点 M 存在为$(2,-2)$.

12. 提示：(1) 当 $a=0$ 时，①若 $b\neq0$，则 $x_0=-\frac{c}{b}=\frac{m}{m+1}$. ∵ $m>0$， ∴ $0<\frac{m}{m+1}<1$，即 $0<x_0<1$；②若 $b=0$，则由已知 $c=0$，此时任意实数均为方程的根，故存在一根 x_0 满足 $0<x_0<1$.

(2) 当 $a>0$ 时，令 $f(x)=ax^2+bx+c$，

则 $f\left(\frac{m}{m+1}\right)=a\left(\frac{m}{m+1}\right)^2+\frac{mb}{m+1}+\frac{mc}{m}$

$=a\left(\frac{m}{m+1}\right)^2+m\left(\frac{b}{m+1}+\frac{c}{m}\right)$

$=a\left(\frac{m}{m+1}\right)^2-\frac{am}{m+2}$

$=\frac{am^2(m+2)-am(m+1)^2}{(m+1)^2(m+2)}$

$=\frac{-am}{(m+1)^2(m+2)}<0.$

①若 $c>0$，则 $f(0)=c>0$，此时抛物线 $f(x)=ax^2+bx+c$ 与 x 轴的交点在 $(0,0)$ 与 $\left(\frac{m}{m+1},0\right)$ 之间，即 $f(x)$ 必有一根 x_0 满足 $0<x_0<\frac{m}{m+1}<1$；②若 $c\leqslant 0$，则 $f(1)=a+b+c$

$=(m+2)\cdot\frac{a}{m+2}+(m+1)\frac{b}{m+1}+c$

$=\frac{a}{m+2}+(m+1)\left(\frac{a}{m+2}+\frac{b}{m+1}+\frac{c}{m}\right)$

$-\frac{c}{m}=\frac{a}{m+2}+\left(-\frac{c}{m}\right)>0$，此时表明抛物线 $f(x)=ax^2+bx+c$ 与 x 轴交点在 $\left(\frac{m}{m+1},0\right)$ 与 $(1,0)$ 之间，即 $f(x)=0$ 必有一根 $0<\frac{m}{m+1}<x_0<1$.

第二章　相似形

相似形是研究两个图形之间的形状、大小之间的关系，运用相似形的性质可以解决许多实际问题，特别是应用于测量长度. 本章主要研究相似三角形的性质、判定、应用和相似变换.

第一节　相似三角形

温故知新

相似的两个三角形虽然大小不一定相同，但形状相同. 相似三角形的性质和判定，在有关线段、角的计算或证明以及解决实际问题有着重要作用. 要善于从证明结论中寻找相似三角形，如果没有相似三角形，可以运用比例的性质来转化，或者有针对性地构造相似三角形，并利用相似三角形性质来解题.

基本结论

(1) 若$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，则$ad=bc$；反之也成立.

(2) 若$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，则$\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}$.

(3) 若$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\cdots$

$=\frac{m}{n}(b+d+\cdots+n\neq 0)$，

则$\frac{a+c+\cdots+m}{b+d+\cdots+n}=\frac{a}{b}$.

(4) 如图 2-1，若$AC^2=AB\cdot BC$，则$AC=\frac{\sqrt{5}-1}{2}AB$，点$C$为$AB$的黄金分割点.

图 2-1

(5) 如图 2-2，若$DE/\!/BC$，

则$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$.

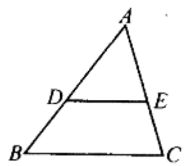


图 2-2

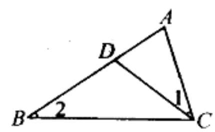


图 2-3

(6) 如图 2-3，若$\angle 1=\angle 2$，则$AC^2=AD\cdot AB$.

(7) 如图 2-4，若$\angle ADE=\angle C=90°$，则$AD\cdot AB=AE\cdot AC$.

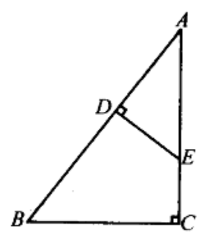


图 2-4

(8) 相似三角形的判定

①平行于三角形一边的直线和其他两

边(或两边的延长线)相交,所构成的三角形与原三角形相似.

②两角对应相等,两个三角形相似.

③两边对应成比例且夹角相等,两个三角形相似.

④三边对应成比例,两个三角形相似.

⑤直角三角形被斜边上的高分成的两个直角三角形相似.

⑥如果一个直角三角形的斜边和一条直角边与另一个直角三角形的斜边和一条直角边对应成比例,那么这两个直角三角形相似.

重要方法

构造法、分类讨论法、数学实验、综合分析法.

点石成金

例 1 如图 2-5,在$\triangle ABC$中,$\angle ACB=120°$,点 D,E 在 AB 上,且$\triangle CDE$为等边三角形.

(1) 求证:$DE^2=AD\cdot BE$;

(2) 若$\angle ACB=120°$变为$\angle ACB=135°$,$\triangle CDE$变为$\angle DCE=90°$的等腰直角三角形,则$DE^2=AD\cdot BE$还会成立吗?若不成立,则 DE,AD,BE 有何关系,请说明理由.

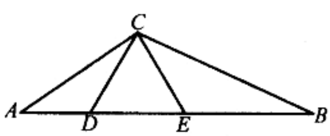


图 2-5

分析 (1) 由$\triangle CDE$为等边三角形,得$DE=CD=CE$,故$DE^2=CD\cdot CE=AD\cdot BE$,只需证明$\triangle ADC\backsim\triangle CEB$即可.

(2) 由(1)同样可证明$\triangle ADC\backsim\triangle CEB$,此时$CD=CE=\frac{\sqrt{2}}{2}DE$,故$DE^2=2CD\cdot CE=2AD\cdot BE$.

(1) **证明** 由$\angle ACB=120°$,

得$\angle A+\angle B=60°$.

又$\triangle CDE$为等边三角形,

则$\angle ECB+\angle B=60°$,$CD=DE=CE$,

故$\angle A=\angle ECB$.

又$\angle ADC=\angle CEB=120°$,

故$\triangle ADC\backsim\triangle CEB$,

$\therefore$ $CD\cdot CE=AD\cdot BE$,

$\therefore$ $DE^2=AD\cdot BE$.

(2) **解** 结论$DE^2=AD\cdot BE$不成立,而$DE^2=2AD\cdot BE$.

由$\angle ACB=135°$,得$\angle A+\angle B=45°$.

由$\triangle CDE$为等腰直角三角形,

得$\angle ECB+\angle B=45°$.

故$\angle ECB=\angle A$.

又$\angle ADC=\angle CEB=135°$,

得$\triangle ADC\backsim\triangle CEB$,

故$CD\cdot CE=AD\cdot BE$.

又$DE=\sqrt{2}CD=\sqrt{2}CE$,

故$DE^2=2AD\cdot BE$.

评注 线段乘积式常转化为比例式,通过线段转换及三角形相似可证得.

例 2 如图 2-6,在梯形 $ABCD$ 中,